大學叢書

實用最小二乘式

唐藝菁著

商務印書館發行

大 學 叢 書

實用最小二乘式

唐 藝 菁 著

商務印書館發行

中華民國二十四年四月初版
中華民國三十八年四月三版

(53764千)

大學叢書（教本）實用最小二乘式一冊

平裝 定價拾元

印刷地點外另加運費

著作者 唐藝菁

發行人 陳懋解 上海河南中路

印刷所 商務印書館印刷廠

發行所 商務印書館 各地

（本書校對者胡達聰）

商

目　次

實用最小二乘式

第一章

概論

1. 量及數量. 設有二量,如距離 AB 及 CD. 今研究二者長之關係,若不採用單位,則除 $AB \gtreqless CD$ 外,餘無方法,可資表示.若以尺度之,而設 $AB=10$ 尺,$CD=5$ 尺,則 $AB=\frac{10}{5}CD=2\cdot CD$,即 AB 之量爲 CD 之量之 2 倍. AB 及 CD 曰量,10 及 5 曰數,10 尺,5 尺曰數量.又如某物質之質量爲 n 磅,n 磅曰某物質之數量.

2. 觀測及觀測值(Observation and observed value). 用各種測器,以以直接或間接方法,求距離之長度,物體之體積,物質之質量,時間之分秒,稱曰觀測.觀測所得之數量曰觀測值.

3. 眞值及最或是值(True value and most probable value). 凡一量祇有一眞值.但就一量返復施行若干次觀測,無論同一測器,同一方法,同一注意,其所得結果,恆一不致.此從事觀測者所共知.因之於各觀測值中,難得量之**眞值**,卽令有之,亦不能決定何者爲是.實際又不能不取一值以代之.不得已,祇

能由平均法求與眞值最近之一値耳.此最近之一値曰最或是値.

4. 精密及精度(Precision and measure of precision). 就同一量而言,若觀測結果有多組觀測値,且各組觀測之情狀,又各互異,則每組將有一最或是値.設對各最或是値不加研究,將不知應取何値以代眞値.是則當先研究各組觀測之精密程度,以比較其優劣,用以研究精密之量曰**精度**.(見後27節).

5. 最小二乘式之目的.

(1) 求最或是値.

(2) 求精度.

(3) 若觀測値有多組,則利用精度以比較各最或是値之優劣.或利用精度,合併各最或是値,以求最後之最或是値,以代眞値.

6. 直接觀測及間接觀測(Direct observation and indirect observation). 觀測方法有二:曰直接觀測,曰間接觀測.

(1) 直接觀測者,就所求量逕行觀測之謂.例如用測尺直接測定一距離之長,用經緯儀直接測定一角之大小.

(2) 間接測量者,不測其應測定之量,而測其有關係之量.即就原量之函數,施行觀測之謂.如求一角之大小,觀測其他諸角之和或差以定之;觀測恆星之高,以定地點之經緯度;調查一國之人口,以算定全國所需糧食之總額.

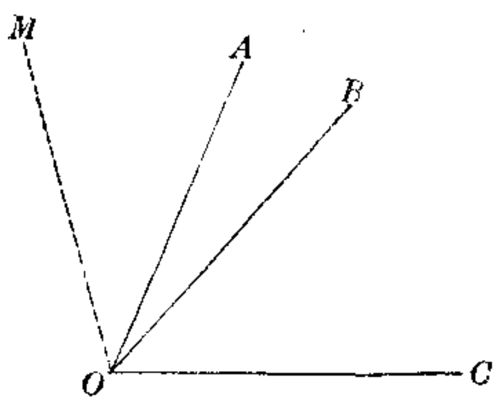
7. 獨立觀測及規約觀測 (Independent observation and conditioned observation). 觀測種類亦有二:曰獨立觀測,曰規約觀測.

(1) 規約觀測者,不問測法為直接或間接,惟其結果,須合於理論上嚴密之規約.例如測一平面三角形之各角,其和必為180°;測一點周圍各角,其和必為360°.

(2) 獨立觀測者,不拘於嚴格之規約,有時亦分直接間接兩法.例如測一平面三角形,僅測其二角,其餘一角,不施行觀測,則所測二角,彼此毫無關係,是曰**直接獨立觀測**.

又如測一線之長,分為兩段測之,彼此仍為獨立.是曰**間接獨立觀測**.

8. 以上諸項觀測之區別,更舉例以明之如下:



(圖 1)

欲測 $\angle AOB$, $\angle BOC$ 兩角(圖 1),若直置經緯儀於 O 點而分別測之,其所測二角為直接獨立觀測.若取他之補助方向 OM,測 $\angle MOA$, $\angle MOB$, $\angle MOC$ 三角,由此決定

$$\angle AOB = \angle MOB - \angle MOA,$$

$$\angle BOC = \angle MOC - \angle MOB.$$

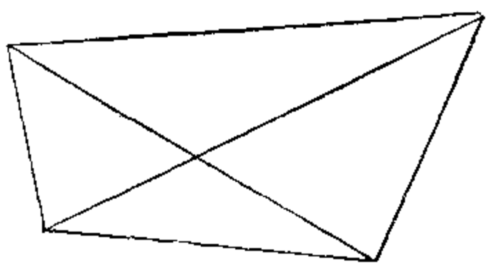
是謂間接獨立觀測.

今於測定 $\angle AOB$, $\angle BOC$ 外,再測 $\angle AOC$,則三角有一嚴格之規約.

即 $$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC.$$

三角之觀測值,必合乎此規約,方能適用,是謂規約觀測.

又舉例以明之如下:



(圖 2)

欲測定一四邊形(圖 2).若僅測各邊各角,則為直接獨立觀測.若由各邊各角,測定四邊形之面積,則為間接獨立觀測.

僅測兩邊或兩角,自然各無關係而為獨立.若測邊角全體,必合乎多數幾何規約,然後依觀測值所製之圖,在紙上方無錯誤,是為規約觀測.

9. 觀測誤差(Errors of observation). 眞值與觀測值之差,曰觀測誤差.吾人日常欲測定一量,同一測器,同一方法,同一注意,返復觀測 n 次,其 n 個觀測值,將有偶同者,有相異者.召

途人而告之,莫不信以爲然.但一量僅有一值,故異觀測值之觀測誤差因而各異.卽凡觀測值必附有觀測誤差.諸觀測誤差中,是否有一爲零,無從推知.故量之眞值,決難求得.所可求者,誤差最小之近似値耳,是卽最或是值.然此值果與眞值最近與否,仍是疑問,惟勉強利用之,以代眞值而已.

附於觀測值之觀測誤差,其成因不一,玆類別之如下:

(1) 定誤差.

(2) 過失誤差(或曰錯誤).

(3) 不定誤差(或曰不期誤差).

10. 定誤差(Constant error). 凡定誤差,可由精密方法或物理公式改正之.其改正法類別之如下:

理論改正 (Theoretical correction). 如測定基線(base line),測尺因溫度增減而有伸縮,此可據物理公式,由計算改正之.

測器改正 (Instrumental correction). 如測尺刻度不合標準,可求其差數改正之.如水準儀水平時,汽泡不在中點,可返復檢點改正之.

癖差改正 (Personal correction). 如持測尺者,習用大力,或不喜用力,可利用多人互測,彼此消除改正之.如視準者,或習於偏左,或習於偏右,可利用左右眼互易改正之.

上述改正,旣可推知,自可消除,故不屬本書研究之範圍.

11. 過失誤差 (Mistakes). 過失誤差,或因忽略,或未熟練所致,乃觀測者偶不留意所發生之誤差,縱細心而且熟練者,

亦難保其必無.如誤9爲6誤a爲b,測水平者誤樹枝爲標桿,記載者誤記數字,消除此種誤差,不外事先留意,事後檢點,或返復觀測多次,比較其異同.過失誤差,設偶入觀測值內,則全局皆誤,必盡力設法除去之,故亦不屬本書研究之範圍.

12. 不定誤差(Accidental error). 定誤差及過失誤差,經多方改正,旣已盡行除去,而尙存餘於觀測值中之誤差,曰不定誤差.其成因,或由測器之急劇伸縮,或由天氣不正,致折光偶起不規則之變化,或由整理器械,尙欠精密,或由觀測未能適中目的.總之,觀測者無論若何注意,終存於觀測值中,而不能免.果欲去之,非用最小二乘式不爲功.驟觀之.此種誤差,似極不規則,非數學所能研究,然由或是率推之,竟得一意外精密之法.此最小二乘式之所以作也.不定誤差分眞差及眞值減觀測值.

13. 眞值及眞差(True value and true errors). 設T爲某量之眞值,$M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$爲其觀測值,$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$爲其眞差.

則 $$T-M_1=x_1,\ T-M_2=x_2,\ T-M_3=x_3, \cdots\cdots T-M_n=x_n.$$

14 最或是值及舛差(The most probable value and residuel errors). 最或是值減觀測值之差曰舛差.設z爲某量之最或是值,$M_1, M_2, M_3 \cdots\cdots M_n$爲其觀測值,$v_1, v_2, v_3 \cdots\cdots v_n$爲其舛差,

則 $$z-M_1=v_1,\ z-M_2=v_2,\ z-M_3=v_3, \cdots\cdots z-M_n=v_n.$$

觀測次數愈增,z愈近於T.若次數無限增大,視z爲T,當無大誤.同時$v_1 v_2 v_3 \cdots\cdots v_n$將各與$x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_n$一致,而無大差別.然

盡吾人之力,殊難達到$n=\infty$之事實.是則z永不能適合於T,僅能謂兩者之差能達到最小可也.

15. 或是率原理 (Principle of probabilitiy). 在數學中,或是率爲小於一之數.卽一狀況(way)之或出現之數,或不出現之數,與兩數之和之比

(例一) 擲一銅元,或現表面,或現裏面,其狀況有二.然出現之狀況雖不外表裏二面,究得表面,或得裏面,殊難預知.但可決定其機會相等,各得$\frac{1}{2}$.$\frac{1}{2}$曰現表面狀況之或是率,同時亦曰現裏面狀況之或是率.就表面而言,出現之數爲1,不出現之數亦爲1,其和爲2.

出現表面之或是率$=\frac{1}{2}$.

不出現表面之或是率$=\frac{1}{2}$.

此差兩種之差值曰眞差.今設一事出現之或是率曰成率,不出現之或是率曰敗率.

則　出現表面之成率$=\frac{1}{2}$.

出現表面之敗率$=\frac{1}{2}$.

(例二) 擲一骰子,其面有6(卽狀況有6).向上之面,僅6面之一.至於何面應向上,則毫無輕重之別.故各面向上之機會必相等,而各爲$\frac{1}{6}$.

就一點而言,出一點之或是率$=\frac{1}{6}$.

不出一點之或是率$=\frac{5}{6}$.

卽　出一點之成率$=\frac{1}{6}$.

$$出一點之敗率=\tfrac{5}{6}.$$

(**例三**) 設一事出現狀況之數爲a,不出現狀況之數爲b,則其和爲$a+b$.

$$\therefore\quad 事之成率=\frac{a}{a+b},$$

$$事之敗率=\frac{b}{a+b}.$$

今
$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1.$$

即
$$成率+敗率=1$$

1者,謂事若不論成敗,其遇可必,故曰必率 (Certainty). $\frac{a}{a+b}$之值,因a減小而變小.若$a=0$,則$\frac{a}{a+b}=0$者,謂事決不成,而必失敗.

$$\therefore\quad 1>或是率>0.$$

由此推知,或是率無負值.

(**例四**) 設
$$P=一狀況之成率,$$
$$Q=其狀況之敗率.$$

則
$$P+Q=1.$$

或
$$Q=1-P.$$

(**例五**) 抽籤博彩,設2000號中有一頭彩,

$$則得頭彩之成率=\frac{1}{2000},$$

$$得頭彩之敗率=1-\frac{1}{2000}=\frac{1999}{2000}.$$

今$\frac{1999}{2000}$幾等於1,即謂得頭彩之希望太小,而必至失敗也.

16. 單純事件 (Single event). 1單純事件中,有多數狀況之可能.其中幾個狀況之或是率,等於各該狀況或是率之和.

(例一) 一袋中容有白球二個,紅球三個,黑球五個.今自袋中任取一球,則取得

$$白球之成率=\frac{2}{2+3+5}=\frac{2}{10}.$$

$$紅球之成率=\frac{3}{2+3+5}=\frac{3}{10}.$$

$$黑球之成率=\frac{5}{2+3+5}=\frac{5}{10}.$$

∴取得

$$白球或紅球之成率=\frac{2+3}{2+3+5}=\frac{5}{10}=\frac{2}{10}+\frac{3}{10},$$

$$紅球或黑球之成率=\frac{3+5}{2+3+5}=\frac{8}{10}=\frac{3}{10}+\frac{5}{10},$$

$$黑球或白球之成率=\frac{5+2}{2+3+5}=\frac{7}{10}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}.$$

(例二) 一袋中容有白球 a 個,紅球 b 個,黑球 c 個,自袋中任取一球,則取得

$$白球或紅球之成率=\frac{a+b}{a+b+c},$$

$$白球或紅球之敗率=1-\frac{a+b}{a+b+c}=\frac{c}{a+b+c}.$$

17. 組合事件 (Compound events). 組合多個事件,其相互關聯諸狀況之或是率,等於各該狀況之或是率之乘積.

(例一) 有甲乙二袋,甲袋內容二白球,三紅球;乙袋內容四