全国著名重点中学特高级教师、高三备考组长·联合推出

桂壮红皮书·高考总复习系列——

根据最新命题趋势编写

2004年

高考红皮书

·教材全程总复习试卷·

数学

丛书主编／陈桂壮

北京大学出版社

南京一中
南昌二中
黄冈中学
太原五中
济南实验中学
杭州二中
北大附中
郑州一中
联合推出

令 $a=\frac{1}{1-q}$，$b=\frac{-q}{1-q}$，所以 $S_n=a+ba_n$ 且 $a+b=1$.

(2)设存在非零常数 a,b 满足 $S_n=a+ba_n$ 且 $a+b=1$. 所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=ba_n-ba_{n-1}$ $(n\geqslant2)$，$(b-1)a_n=ba_{n-1}$. 若 $b-1=0$，因为 $b\neq0$，所以 $a_{n-1}=0$ （对任何 $n\geqslant2$ 都成立），所以 $a_1=a_2=0$，与 $a_1\neq a_2$ 矛盾，所以 $b\neq1$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{b}{b-1}$，又因为 $S_1=a+ba_1=a_1$，所以 $a+ba_1=a_1$ 又因为 $a+b=1$，两式相减得 所以 $b(a_1-1)=a_1-1$，$(b-1)(a_1-1)=0$. 因为 $b\neq1$，所以 $a_1=1$. 所以 $\{a_n\}$是首项为1的等比数列. 综合(1)(2)知，命题得证.

试卷(十)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	B	C	D	B	B	B	D	C	D	B

13. -1　　14. 75　　15. 36　　16. $a_n=1+(-1)^n\cdot\frac{2}{n}$ 或 $a_n=\begin{cases}1 & n\text{ 为奇数}\\ 2 & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

17. 解：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则

$T_1=a_1$，$T_2=2a_1+a_2=a_1(2+q)$. 因为 $\begin{cases}T_1=1,\\ T_2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1,\\ a_1(2+q)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1,\\ q=2.\end{cases}$

(2)由(1)知 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$，$S_n=2^n-1$.

解法一：$T_n=na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n$

$=a_1+(a_1+a_2)+(a_1+a_2+a_3)+(a_1+a_2+a_3+a_4)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)$

$=(2-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+(2^4-1)+\cdots+(2^n-1)$

$=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n$

$=2^{n+1}-(n+2)$.

解法二：$T_n=n\cdot1+(n-1)\cdot2+\cdots+2\cdot2^{n-2}+1\cdot2^{n-1}$

所以 $T_n=2T_n-T_n=n\cdot2+(n-1)\cdot2^2+\cdots+2\cdot2^{n-1}+2^n$

$-[n\cdot1+(n-1)\cdot2+(n-2)\cdot2^2+\cdots+2^{n-1}]$

$=-n+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n$

$=-n+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-(n+2)$.

18. 解：(1)假设 $q=1$，则 $S_5=5a_1$，$S_{15}=15a_1$，$S_{10}=10a_1$.

S_5，S_{15}，S_{10}成等差数列，所以 $2S_{15}=S_5+S_{10}\Rightarrow a_1=0$. 这与等比数列中 $a_1\neq0$ 矛盾. 所以 $q\neq1$. 所以 当 S_5，S_{15}，S_{10}成等差数列时，

有 $2S_{15}=S_5+S_{10}\Rightarrow2\cdot\frac{a_1(1-q^{15})}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}(1-q^5)+\frac{a_1}{1-q}(1-q^{10})\Rightarrow2q^{10}-q^5-1=0\Rightarrow q^5=-\frac{1}{2}$. 所以 $S_{10}^2=\left[\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}\right]^2=\left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2=\frac{9}{16}\left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2>0$. 而 $2S_5\cdot(S_{20}-S_{10})=2\cdot\frac{a_1}{1-q}(1-q^5)$

$$\left[\frac{a_1}{1-q}(1-q^{20})-\frac{a_1}{1-q}(1-q^{10})\right]$$

$$=2\cdot\left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2(1-q^5)(q^{10}-q^{20})$$

$$=2\left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\right)\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^c\right]$$

$$=\frac{9}{16}\left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2.$$

所以 $S_{10}^2=2S_5\cdot(S_{20}-S_{10})$ 且 $S_{10}\neq 0$.所以 $2S_5,S_{10},S_{20}-S_{10}$ 成等比数列.

(2)不一定成立,例如当 $q=1$ 时,$2S_5,S_{10},S_{20}-S_{10}$ 即 $10a_1,10a_1,10a_1$ 成等比数列,但 S_5,S_{15},S_{10} 不成等差数列.

19. 解:设甲、乙两企业的各月利润数依次构成数列$\{a_n\},\{b_n\}$,所有利润的和分别为 S_n、T_n,

(1)依题意,$\begin{cases}a_1=1,\\ a_n=S_{n-1}(n\geqslant 2)\end{cases}$ 和 $\begin{cases}b_1=1,\\ b_n=kn.\end{cases}$ (k 为正常数),

由 $a_n=S_{n-1}(n\geqslant 2)$,所以 $a_{n+1}=S_n$ 两式相减,$a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}=a_n$,所以 $a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$.所以$\{a_n\}$从第二项起构成公比为 2 的等比数列,且 $a_2=S_1=1$.所以 $a_n=\begin{cases}1 & n=1,\\ 2^{n-2} & n\geqslant 2.\end{cases}$ 因为 $\begin{cases}b_1=1,\\ b_n=kn\end{cases}\Rightarrow k=1$,所以 $b_n=n$.所以 $a_6=2^{6-2}=16$(万元),$b_6=6$(万元).

(2)由(1)知 $S_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,$T_n=\frac{n(n+1)}{2}$,$S_1=1,S_2=2,S_3=4,S_4=8,S_5=16,T_1=1,T_2=3,T_3=6,T_4=10,T_5=15$,当 $n\geqslant 5$ 时,$S_n>T_n$.

因为 $2^{n-1}=(1+1)^{n-1}=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}(n\geqslant 5)$

$$\geqslant C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}=1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2))}{2}+n-1+1$$

$$=\frac{n^2+n}{2}+1>T_n.$$

答:(1)2002 年 6 月份,甲、乙两企业的利润分别为 16 万元和 6 万元.

(2)从 5 月份开始,甲企业的利润超过乙企业的利润.

20. 解:由 $3a_5=8a_{12}>0$,可得 $a_5=-\frac{56}{5}d$ 且 $d<0$.所以 $a_{16}=-\frac{1}{5}d>0,a_{17}=\frac{4}{5}d<0$.从而可知 $b_1>b_2>\cdots>b_{14}>0>b_{17}>b_{18}>\cdots$,而 $b_{15}=a_{15}a_{16}a_{17}<0,b_{16}=a_{16}a_{17}a_{18}>0$,

$$\left.\begin{aligned}\text{由 } a_{15}&=-\frac{6}{5}d>0\\ a_{18}&=\frac{9}{5}d<0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad a_{18}|>a_{15}.$$

所以 $b_{16}>-b_{15}$.所以 $S_{16}=S_{14}+b_{15}+b_{16}>S_{14}$.故 $n=16$ 时,S_n 达到最大.

21. 解:(1)由 $S_n=4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$,得 $S_{n+1}=4\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2}S_n+2\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)要使$\frac{S_{k+1}-c}{S_k-c}>2$,只要$\frac{c-\left(\frac{3}{2}S_k-2\right)}{c-S_k}<0$.因为 $S_k=4\left(1-\frac{1}{2^k}\right)<4$,所以 $S_k-\left(\frac{3}{2}S_k-2\right)=-\frac{1}{2}S_k+2>$

0.所以 $\frac{3}{2}S_k-2<c<S_k(k\in\mathbf{N}^*)$.　　①

因为 $S_{k+1}>S_k(k\in\mathbf{N}^*)$,所以 $\frac{3}{2}S_k-2\geqslant\frac{3}{2}S_1-2=1$.又因为 $S_k<4$,故要使①成立,c 只能取 2 或 3,当 $c=2$ 时,因为 $S_1=2$,所以 当 $k=1$ 时,$c<S_k$ 不成立.从而①不成立,因为 $\frac{3}{2}S_2-2=\frac{5}{2}>c$,由 $S_k<S_{k+1}(k\in\mathbf{N}^*)$,得 $\frac{3}{2}S_k-2<\frac{3}{2}S_{k+1}-2$,

所以 当 $k\geqslant2$ 时,$\frac{3}{2}S_k-2>c$,从而①不成立.当 $c=3$ 时,因为 $S_1=2,S_2=3$,所以 当 $k=1,2$ 时,$c<S_k$ 不成立,从而①不成立.

因为 $\frac{3}{2}S_3-2=\frac{13}{4}>c$,又 $\frac{3}{2}S_k-2<\frac{3}{2}S_{k+1}-2$ 所以 当 $k\geqslant3$ 时,$\frac{3}{2}S_k-2>c$,从而①不成立.

故不存在自然数 c,k,使 $\frac{S_{k+1}-c}{S_k-2}>2$ 成立.

试卷(十一)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	D	D	A	D	C	B	B	C	C

13. $m=10$ 或 $0<m<1$　　14. $c\geqslant1$　　15. $(x-1)^2+(y\pm2\sqrt{2})^2=9$　　16. $x<1$ 或 $x>3$

17. 解:(1)设 BC 中点 $D(x,y)$.

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}=\frac{-3+2x}{3},\\ -1=\frac{0+2y}{3},\end{cases}\Rightarrow D\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right).$$

因为 $OD\perp BC$,所以 $k_{BC}=-\frac{1}{k_{OD}}=\frac{1}{2}$.

$BC:y+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{4}\right)$,即 $4x-8y-15=0$.

(2) $|BD|^2=|OB|^2-|OD|^2=9-\left(\frac{-15}{\sqrt{16+64}}\right)^2=\frac{99}{16}$,

$|BD|=\frac{3}{4}\sqrt{11}$,$|BC|=2|BD|=\frac{3}{2}\sqrt{11}$.

18. 解:每天应生产 A、B 型桌子各 x 张,y 张,利润为 Z,则 $Z=2x+3y$.

$$\begin{cases}x+2y\leqslant8,\\ 3x+y\leqslant9,\end{cases}\quad x,y\in\mathbf{N},$$

作直线 $l_0:2x+3y=0$,并将其向右上方平移至直线 l,此时直线 l 过 M 点,且在 y 轴上截距最大,$Z=2x+3y$ 取最大值.

$$\begin{cases}x+2y=8,\\ 3x+y=9\end{cases}\Rightarrow M(2,3).$$

答:工厂每天应生产 A,B 型桌子各 2 张,3 张.

19. 解：设 A、B 为圆与切线的交点，则 $\tan\angle APB=\left|\frac{k_{PA}-k_{PB}}{1+k_{PA}k_{PB}}\right|$，由题已知，由 P 向圆引切线斜率存在，所以可设切线方程　$y+2=k(x-5)$，即 $kx-y-5k-2=0$.

$\frac{|-5k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，$16k^2+20k-5=0$，$k_{PA}+k_{PB}=-\frac{5}{4}$，$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{5}{16}$，$|k_{PA}-k_{PB}|=\cdots=\frac{3}{4}\sqrt{5}$，所以 $\tan\angle APB=\frac{\frac{3}{4}\sqrt{5}}{\frac{11}{16}}=\frac{12}{11}\sqrt{5}$，所以 $\angle APB=\arctan\frac{12}{11}\sqrt{5}$.

20. 解：(1)将圆 C 方程化为 $x^2+y^2+2y-4+a(-2x-4y+4)=0$.

令 $\begin{cases}x^2+y^2+2y-4=0,\\-2x-4y+4=0.\end{cases}$　解得 $\begin{cases}x=2,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{2}{5},\\y=\frac{6}{5}.\end{cases}$

所以不论 a 为何值，圆 C 经过两个定点 $A(2,0)$，$B\left(-\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right)$.

(2)设圆心 $C(x,y)$，则 $\begin{cases}x=a,\\y=2a-1,\end{cases}$ 消去 a 得 $y=2x-1$.

(3)因为圆 C 恒过点 A、B，所以当线段 AB 为直径时，圆 C 面积最小. $S_{最小值}=\pi\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2=\frac{9}{5}\pi$. 所以圆 C 的方程为 $\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{5}$.

21. 解：设圆心为 $P(a,b)$，半径为 r，由题设可知：

$\begin{cases}r^2=2b^2,\\r^2=a^2+1\end{cases}\Rightarrow 2b^2-a^2=1$. 又 P 到直线 $x-2y=0$ 的距离 $d=\frac{a-2b}{\sqrt{5}}$. 所以 $5d^2=a^2+4b^2-4ab\geqslant a^2+4b^2-2(a^2+b^2)=1$. 当且仅当 $a=b$ 时等号成立，此时 d 取得最小值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，并且 $\begin{cases}a=1,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\b=-1,\end{cases}$ $r=\sqrt{2}$. 所以圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

试卷(十二)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	A	D	A	D	B	C	B	C	C	A

13. $(-\infty,2-\sqrt{3}]\cup[2+\sqrt{3},+\infty)$　　14. $\frac{16}{3}$　　15. -4　　16. $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$

17. 解：在 $Rt\triangle PF_2F_1$ 中，

因为 $\angle PF_1F_2=30°$，所以 $|PF_1|=\frac{2c}{\cos 30°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}c$. $|PF_2|=\frac{2\sqrt{3}}{3}c$. 又 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以 $\frac{2\sqrt{3}}{3}c=2a$.

所以 $c=\sqrt{3}a$. 所以 $b=\sqrt{2}a$. 所以双曲线渐近线方程为：$y=\pm\sqrt{2}x$.

18. 解：设 $Q(x,y)$，$A(x_1,1)$，$B(\frac{1}{4},y_B)$，因为 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OQ}$ 共线，可设 $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OB}=m\cdot\overrightarrow{OQ}$，又 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}=$

$\overrightarrow{OA}^2$，所以 $m\overrightarrow{OQ}^2=k^2\overrightarrow{OQ}^2$，若 $\overrightarrow{OQ}^2=0$，则 $x^2+y^2=0$，所以 $\overrightarrow{OA}^2=0$，所以 $|\overrightarrow{OA}|=0$，而 A 在 l_1 上，所以 $|\overrightarrow{OA}|\neq 0$，所以$\overrightarrow{OQ}^2\neq 0$，所以 $m=k^2$．因为 $(x_A,1)=k(x,y)$，$(\frac{1}{4},y_B)=m(x,y)$，所以 $ky=1$，$mx=\frac{1}{4}$．所以 $\frac{1}{4x}=\frac{1}{y^2}$，所以 $y^2=4x(x\neq 0)$．所以 点 Q 的轨迹方程为 $y^2=4x(x\neq 0)$．

19．解：(1) 作 M 关于直线 $y=-2$ 的对称点 M'，因为 $M(-4,1)$，则 $M'(-4,-5)$，因为 $\triangle M'PQ\backsim\triangle M'F_1F_2$，所以 $\frac{|PQ|}{|F_1F_2|}=\frac{3}{5}$，所以 $\frac{\frac{12}{5}}{2c}=\frac{3}{5}$，所以 $c=2$，因为 $e=\frac{c}{a}=2$，所以 $a=1$，所以 双曲线方程为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$．

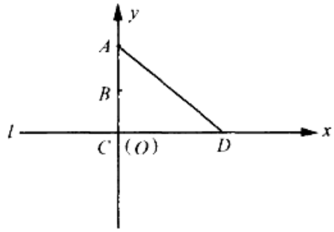
(2)当 $NF_2\perp x$ 轴时，$|AF_2|=3$，$|NF_2|=3$，所以$\angle NF_2A=2\angle NAF_2$．

猜想：当 NF_2 不垂直于 x 轴时，也有$\angle NF_2A=2\angle NAF_2$，不妨设 $N(x_0,y_0)$在第一象限，且 $x_0\neq 2$．

因为 $\tan\angle NAF_2=\frac{y_0}{x_0+1}$，$\tan 2\angle NAF_2=\frac{2\cdot\frac{y_0}{x_0+1}}{1-\frac{y_0^2}{(x_0+1)^2}}=-\frac{y_0}{x_0-2}$，而 $\tan\angle NF_2A=-\frac{y_0}{x_0-2}$．

又因为 $0<\angle NAF_2<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<2\angle NAF_2<\pi$，而 $0<\angle NF_2A<\pi$，所以$\angle NF_2A=2\angle NAF_2$，得证．

20．解：以 l 为 x 轴，AC 为 y 轴建立如图的直角坐标系，则 $A(0,2a)$，$B(0,a)$，兔与狼的速度分别为 $2v$、v，要使兔不被狼逮住，则应满足 $\frac{|AM|}{2v}<\frac{|BM|}{v}$



第 20 题图

所以 $|AM|<2|BM|$．设 M 点坐标为(x,y)，所以 $\sqrt{x^2+(y-2a)^2}<2\sqrt{x^2+(y-a)^2}$．所以 $x^2+(y-\frac{2}{3}a)^2>(\frac{2}{3}a)^2$．由此知，直线 AD 与圆 $x^2+(y-\frac{2}{3}a)^2=\left(\frac{2}{3}a\right)^2$ 相离时，兔在 AD 上不会被狼逮住．

设 $D(b,0)$，所以直线 AD 方程为：$\frac{x}{b}+\frac{y}{2a}=1$．所以 圆心到直线的距离 $d=\frac{\left|\frac{2}{3}ab-2ab\right|}{\sqrt{(2a)^2+b^2}}>\frac{2}{3}a$，所以 $b>\frac{2\sqrt{3}}{3}a$．故只要 D 点在点$(\frac{2\sqrt{3}}{3}a,0)$的右侧，兔在 AD 上就不会被逮住．

21．解：(1)设 E 为$(x_0,0)$，因为$|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OF}|\cdot|\overrightarrow{OE}|$，所以 $a^2=x_0\cdot c$，所以 $x_0=\frac{a^2}{c}$，所以 $\overrightarrow{PF}=(c,-b)$，$\overrightarrow{PE}=\left(\frac{a^2}{c},-b\right)$，所以 $\overrightarrow{PN}=\left(\frac{c}{2}+\frac{a^2}{2c},-b\right)$．所以 $N\left(\frac{c}{2}+\frac{a^2}{2c},0\right)$，$PF$ 所在直线方程为：$\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$．由

$\begin{cases} \frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \end{cases}$ 所以 $\frac{x^2}{a^2}+1-\frac{2x}{c}+\frac{x^2}{c^2}=1$，所以 $x=\frac{2a^2c}{a^2+c^2}$ 或 $x=0$（舍去）．所以 $y=\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}$，所以 Q $\left(\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}\right)$．又 PN 的方程为：$\frac{x}{\frac{c}{2}+\frac{a^2}{2c}}+\frac{y}{b}=1$，所以 M 点坐标为：$\left(\frac{a^2}{c},\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}\right)$．所以 $EM\perp x$ 轴，所以 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{EM}=0$，所以 $\overrightarrow{QM}(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PE})=0$．所以 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{PE}$．

(2) $\overrightarrow{PF}=(c,-b)$，$\overrightarrow{FQ}=\left(\frac{c(a^2-c^2)}{a^2+c^2},\frac{-b^3}{a^2+c^2}\right)$，因为 $\overrightarrow{PF}=2\overrightarrow{FQ}$，

所以 $\begin{cases} c=\frac{2cb^2}{a^2+c^2}, \\ -b=\frac{-2b^3}{a^2+c^2}. \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a^2+c^2=2b^2, \\ a^2=3c^2. \end{cases}$ 又 $\frac{a^2}{c}-\frac{2a^2c}{a^2+c^2}=\frac{3}{2}$，所以 $\begin{cases} a^2=3, \\ b^2=2, \\ c^2=1. \end{cases}$

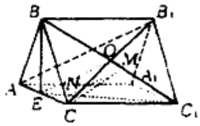
所以 椭圆方程为：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$．

试卷（十三）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	C	C	A	D	D	C	B	C	A	A

13. 2　14. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　15. $\sqrt{2}$　16. 6

17. 解：(1)连结 B_1C 交 BC_1 于 O，在 $\triangle AB_1C$ 中，O 是 CB_1 中点，E 是 AC 的中点，所以 $EO\parallel AB_1$．又因为 $EO\subset$ 面 BEC_1，$AB_1\not\subset BEC_1$，所以 $AB_1\parallel$ 面 BEC_1．



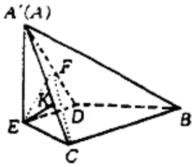
第 17 题图

(2)易证面 $BEC_1\perp$ 面 AA_1C_1C，过 C 作 $CN\perp EC_1$ 于 N，则 $CN\perp$ 面 BEC_1，过 C 作 $CM\perp BC_1$，连结 NM，则 $MN\perp BC_1$，所以 $\angle NMC$ 就是二面角 $E-BC_1-C$ 的平面角．

在 Rt$\triangle CNM$ 中，设 $AB=a$，$AA_1=\sqrt{2}a$．则 $CM=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，

$CN=\frac{\sqrt{2}a}{3}$．所以 $\sin\angle NMC=\frac{\sqrt{3}}{3}$．所以 $\angle NMC=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$．

18. 解：(1)由已知可得 $DE\perp A'E$、$DE\perp EC$．因为二面角 $A'-DE-B$ 是直二面角，所以 $A'E\perp EC$．所以 $CE\perp$ 平面 $A'ED$，作 $EF\perp A'D$ 于 F，连 CF，则 $CF\perp A'D$．因为 $A'E=4$，$ED=3$，所以 $EF=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$．在 Rt$\triangle CFF$ 中，$CF=\sqrt{4^2+(\frac{12}{5})^2}=\frac{4\sqrt{34}}{5}$，即为 C 到 $A'D$ 的距离．



第 18 题图

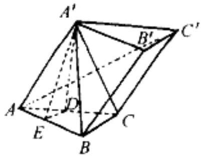
(2)利用三棱锥体积法：由 $V_{D-A'BC}=V_{A'-BCD}$，

得所求距离 $h=\dfrac{S_{\triangle BCD}\cdot A'E}{S_{\triangle A'BC}}=\dfrac{\frac{1}{2}BC\cdot CE\cdot A'E}{\frac{1}{2}BC\cdot A'C}=2\sqrt{2}$.

(或由 $DE//$平面 $A'BC$,转化为求 E 到平面 $A'BC$ 的距离.为此作 $EK\perp A'C$ 于 K,可证 $EK\perp$平面 $A'BC$,则 EK 就是所求距离).

(3)设所求角为 α,则 $\sin\alpha=\dfrac{h}{A'D}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

19.解:(1)连结 AC',因为 $ACC'A'$为菱形,所以 $AC'\perp A'C$.



第 19 题图

因为 $AC'\perp A'B$,所以 $AC'\perp$面 $A'BC$.所以 $AC'\perp BC$.因为 $AC\perp BC$,所以 $BC\perp$面 $ACC'A'$,所以 面 $ACC'A'\perp$面 ABC.

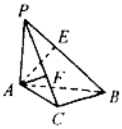
(2)作 $A'D\perp AC$ 于 D,$DE\perp AB$ 于 E,连 $A'E$.

因为 面 $ACC'A'\perp$面 ABC,所以 $A'D\perp$面 ABC,所以 $A'E\perp AB$,

$\angle A'AC=60^\circ$.所以 $AD=4$,$A'D=4\sqrt{3}$,$DE=\dfrac{12}{5}$,

$A'E=\dfrac{8}{5}\sqrt{21}$,所以 $S_{\square AA'B'B}=16\sqrt{21}$.

20.解:(1)$BC\perp$平面 PAC,再证 $AF\perp$平面 PBC.



第 20 题图

所以 $AF\perp PB$.又 $AE\perp PB$,则 $PB\perp$平面 AEF.

(2)在 Rt$\triangle PEF$ 中,因为 $PE=\sqrt{2}a$,

所以 $EF=PE\cdot\tan\theta=\sqrt{2}a\cdot\tan\theta$,在 Rt$\triangle AEF$ 中,

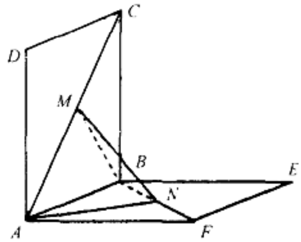
因为 $AE=\sqrt{2}a$,所以 $AF=\sqrt{AE^2-EF^2}=a\sqrt{2-2\tan^2\theta}$.

所以 $S_{\triangle AEF}=\dfrac{1}{2}\cdot EF\cdot AF=\tan\theta\cdot\sqrt{1-\tan^2\theta}\cdot a^2$.

(3)$S_{\triangle AEF}=\tan\theta\cdot\sqrt{1-\tan^2\theta}\cdot a^2\leqslant\dfrac{\tan^2\theta+(1-\tan^2\theta)}{2}a^2=\dfrac{1}{2}a^2$,

当 $\tan\theta=\sqrt{1-\tan^2\theta}$时,取等号.易知$\angle AEF$ 为二面角 $A-PB-C$ 的平面角.所以 $\tan\angle AEF=\dfrac{AF}{EF}=\dfrac{\sqrt{2}a\sqrt{1-\tan^2\theta}}{\sqrt{2}a\tan\theta}=1$.又因为 $\angle AEF\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,所以$\angle AEF=\dfrac{\pi}{4}$.即二面角 $A-PB-C$ 为 45°.

21.解:(1)作 $MP//AB$ 交 BC 于点 P,$NQ//AB$ 交 BE 于点 Q,连结 PQ,依题意可知 $MP//NQ$ 且 $MP=NQ$,即 $MNQP$ 是平行四边形,



第 21 题图

所以 $MN=PQ$.由已知 $CM=BN=a$,$CB=AB=BE=1$,所以 $AC=BF=\sqrt{2}$,$\dfrac{CP}{1}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$,$\dfrac{BQ}{1}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.即 $CP=BQ=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.所以 $MN=PQ$

$=\sqrt{(1-CP)^2+BQ^2}$

$=\sqrt{\left(1-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}(0<a<\sqrt{2}).$ ①

(2)由①，$MN=\sqrt{\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$.

即 M,N 分别移动到 AC,BF 的中点时，MN 的长最小，最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)取 MN 的中点为 G，连结 AG,BG，因为 $AM=AN,BM=BN$，所以 $AG\perp MN,BG\perp MN$.所以 $\angle AGB$ 即为二面角 α 的平面角.又 $AG=BG=\frac{\sqrt{6}}{4}$，所以，由余弦定理有，

$$\alpha=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2-1}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}}=-\frac{1}{3}.$$故 所求二面角 $\alpha=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

试卷(十四)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	B	A	C	D	C	A	D	C	A	B

13. $\left|\frac{\pi}{2}-\alpha\right|$ 14. $\sqrt{2}$ 15. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 16. (1) (4)

17. 解：以 B 为空间直角坐标系的原点建立如图的直角坐标系，

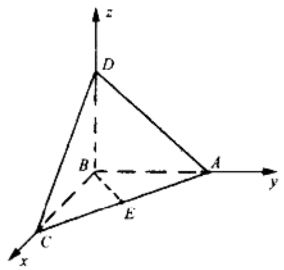
则 $B(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$C(2,0,0)$，$E(1,1,0)$，设 $D(0,0,t)$.

则 $\overrightarrow{AD}=(0,-2,t)$，$\overrightarrow{BE}=(1,1,0)$

所以 $\left|\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BE}|}=\frac{\sqrt{10}}{10}\right|$，所以$\frac{|-2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{t^2+4}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，所以 $t=4$ 或 -4(舍)，

又因为 $\overrightarrow{AC}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{DE}=(1,1,-t)$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=2+(-2)=0$.

所以 $DE\perp AC$，又 $BE\perp AC$，所以 $\angle DEB$ 为二面角 $D-AC-B$ 的平面角，所以 $\tan\angle DEB=\frac{|BD|}{|BE|}=\frac{t}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.



第 17 题图

所以 二面角 $D-AC-B$ 的大小为 $\arctan 2\sqrt{2}$.

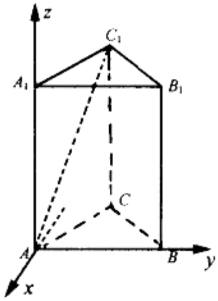
18. 解：(1)如图，以点 A 为坐标原点，以 AB 所在直线为 y 轴，以 AA_1 所在直线为 z 轴，以经过原点 A 且与平面 ABB_1A_1 垂直的直线为 x 轴，建立空间直角坐标系，由已知得：

$A(0,0,0)$，$B(0,a,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2}a)$，$C_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$.

(2)因为 $\overrightarrow{AC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$，取平面 ABB_1A_1 的法向量 $e=(1,0,0)$. 所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC_1},e\rangle=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{|\overrightarrow{AC_1}|}=$

$\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{3}a}=-\dfrac{1}{2}$.

所以$\langle\overrightarrow{AC_1}, e\rangle=120°$,所以 AC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角为 $120°-90°=30°$.



第 18 题图

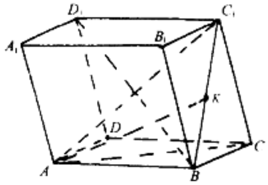
19. 解:(1) $A\left(-\dfrac{a}{2},b,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ $B(0, b, 0)$ $C_1(-a, 0, 0)$ $D\left(-\dfrac{3}{4}a,b,\dfrac{\sqrt{3}}{4}a\right)$

1 1 //

(2)连 B_1C 交 BC_1 于 O,则 $OD//AB_1$,所以 $OD\perp C_1B$.

先求$\overrightarrow{OD}$与平面 BCC_1 的法向量 $e=(0,0,1)$所成的角 θ.因为 $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{B_1A}=\left(-\dfrac{a}{4},\dfrac{b}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{4}a\right)$,又因为$\overrightarrow{C_1B}=(a,b,0)$,$AB_1\perp BC_1$,所以 $-\dfrac{a^2}{2}+b^2=0$,所以 $a=\sqrt{2}b$,所以 $\cos\theta=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}a}{\sqrt{\left(-\dfrac{a}{4}\right)^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

所以 二面角 $D-BC_1-C$ 的大小为$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$.



第 20 题图

20. 解:(1)因为 $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$

所以 $|\overrightarrow{AC_1}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CC_1}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CC_1}+2\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{AB}=1+1+4+2\times1\times2\times\cos120°+2\times1\times2\times\cos120°=2$,

所以 $AC_1=\sqrt{2}$.

(2)因为 $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{2}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1})$,

所以$|\overrightarrow{AK}|^2=\dfrac{1}{4}(4|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{AA_1}|^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AA_1}+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1})$

$=\dfrac{1}{4}\cdot(4+1+4+0-4-2)=\dfrac{3}{4}$,所以$|\overrightarrow{AK}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)因为$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$,所以$|\overrightarrow{BD_1}|^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1})^2=6$

所以 $|\overrightarrow{BD_1}|=\sqrt{6}$,又$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$

设 BD_1 与 AC 所成的角为θ,则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}|}{\sqrt{12}}$.

因为 $\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1})\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{DD_1}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times1\times\cos120°+2\times1\times\cos120°=-2$,所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

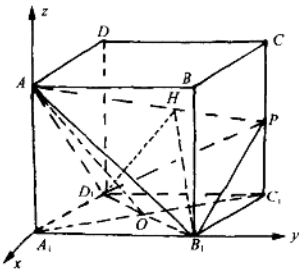
所以 $\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(4) 因为 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AA_1}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=2\times1\times\cos120^\circ-2\times1\times\cos120^\circ=0$

所以 $AA_1\perp BD$.

21. 解:(1)建立如图的直角坐标系



第 21 题图

则 $A_1(0,0,0)$, $B_1(0,2,0)$, $A(0,0,2)$, $D_1(-2,0,0)$, 设 $P(-2,2,a)$,

所以 $\overrightarrow{B_1D_1}=(-2,-2,0)$, $\overrightarrow{AP}=(-2,2,a-2)$.

所以 $\overrightarrow{B_1D_1}\cdot\overrightarrow{AP}=0$, 所以 $B_1D_1\perp AP$.

(2)因为 $AO\perp D_1B_1$, 平面 $AD_1B_1\perp$ 平面 PB_1D_1,

所以 $AO\perp$ 平面 PB_1D_1. 又 $PB_1\subset$ 平面 PB_1D_1,

所以 $AO\perp PB_1$, 又因为 $\overrightarrow{AO}=(-1,1,-2)$ $\overrightarrow{PB_1}=(-2,0,a)$.

所以 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{PB_1}=2-2a=0$, 所以 $a=1$, 所以 P 为 CC_1 中点时,

平面 $AD_1B_1\perp$ 平面 PD_1B_1.

(3)此时 P 点坐标为 $(-2,2,1)$, 因为 $\frac{AH}{HP}=2$, 所以 H 点的坐标为 $\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, 所以 $\overrightarrow{AP}=(-2,2,-1)$,

$\overrightarrow{B_1H}=\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{B_1H}=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=0$, 所以 $AP\perp B_1H$, 由(1)知,

$AP\perp B_1D_1$ 所以 $AP\perp$ 平面 HB_1D_1, 所以 AH 为点 A 到平面 D_1B_1H 的距离.

因为 $|\overrightarrow{AP}|=3$, 所以 $AH=2$.

试卷(十五)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	B	D	D	C	D	C	B	C	D	C

13. 42　　14. 1440　　15. $n=5$　　16. 6144

17. 解:(1)数列 $\{a_n\}$ 共有 $P_5^5=120$(项), 其中最后一项应是 54321, 所以 $a_{120}=54321$, $n=120$.

(2)分别以 1,2,3,4 为万位数字的五位数各有 $\frac{1}{5}P_5^5=24$(个).

所以 $a_{96}=45321$

(3)因为 $a_{96}=45321$, $a_{95}=45312$, $a_{94}=45213$, $a_{92}=45132$.

所以 $m=92$.

(4) $S_{120}=\frac{12345+54321}{2}\times120=3999960$.

18. 解:(1) $\frac{C_n^4}{7}=\frac{C_n^2}{2}$, 即 $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}=7\cdot\frac{n(n-1)}{2\times2!}$. 所以 $n^2-5n-36=0$　解得 $n=-4$(舍去), $n=9$.

(2) $T_4 = C_9^3 \cdot 2^6 \cdot a = 5376a$.

(3) $T_5 = 4032 \cdot a^{-\frac{1}{6}}$, $T_6 = 2016 \cdot a^{-\frac{4}{3}}$.

(4) $T_4 = 5376a$.

19. 解: $A \cap B = \{1,2,3,4\}$, $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = \complement_I (A \cap B) = \{5,6,7,8\}$.

(1) $C_3^1 (C_3^1\ C_4^2\ A_3^3) = 324$.

(2) $2(C_3^1\ C_4^2\ A_3^3) = 210$.

20. 解:设每年平均新增住房面积为 d 万 m^2,由题意,从 2000 年底起,这个城市每年年底的住房面积组成一个以 160 万为首项,d 为公差的等差数列;每年年底的人口组成一个以 20 万为首项,$(1+1\%)$ 为公比的等比数列,2004 年底对应的项数为 5,于是: $20(1+1\%)^4 \times 10 = 160 + 4d$,即 $d = 50(1+1\%)^4 - 40$

$$= 50[1 + C_4^1 \times 0.01 + C_4^2 \cdot (0.01)^2 + \cdots] - 40$$

$$\approx 12.04(\text{万 } m^2).$$

答略.

21. (1) 证明:对于 $1 < i \leqslant m$,有: $A_m^i = m(m-1)\cdots(m-i+1)$,

$\frac{A_m^i}{m^i} = \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdots \frac{m-i+1}{m}$.

同理有: $\frac{A_n^i}{n^i} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n}$. 因为 $m < n$ 且 $\frac{n-k}{n} > \frac{m-k}{m}$ $(k = 1,2,\cdots,i-1)$,所以 $\frac{A_n^i}{n^i} > \frac{A_m^i}{m^i}$. 即 $m^i A_n^i > n^i A_m^i$.

(2) 由二项式定理,有: $(1+m)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} m^i C_n^i$, $(1+n)^m = \sum\limits_{i=0}^{n} n^i C_m^i$,由 (1) 知 $m^i A_n^i > n^i A_m^i$ $(1 < i \leqslant m < n)$,又 $m^0 A_n^0 = n^0 A_m^0 = 1$, $m A_n^1 = n A_m^1 = mn$, $m^i A_n^i > 0 (m < i \leqslant n)$. 所以 $\sum\limits_{i=0}^{n} m^i A_n^i > \sum\limits_{i=0}^{m} n^i A_m^i$. 即 $(1+m)^n > (1+n)^m$.

试卷(十六)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	D	B	C	D	D	C	B	C	C	B

13. $\frac{C_2^1\ C_4^2}{2^6} = \frac{3}{16}$　　14. 2　　15. $\frac{2}{5}$　　16. 0.3

17. 解: (1) $P = \frac{C_2^1\ C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$.

(2) 解法一:摸出一白球概率为 $\frac{2}{5} = 0.4$,摸出一黑球概率 $\frac{3}{5} = 0.6$,所以 $P = 0.4 \times 0.6 + 0.6 \times 0.4 = 0.48$.

解法二:有放回地摸 2 次,相互独立,摸一次得白球概率为 $\frac{2}{5}$,

所以 $P = C_2^1 \cdot \frac{2}{5}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = 0.48$.

18. 解: (1) $\bar{x}_{甲} = \frac{1}{20}(96 \times 3 + 98 \times 6 + 100 \times 8 + 102 \times 2 + 106 \times 1) = 99.3$.

$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{20}(94\times1+96\times2+98\times7+100\times4+102\times3+104\times2+106\times1)=99.6$.

(2)甲厂灯泡合格品比例为 $A_{甲}=\frac{19}{20}=95\%$.乙厂灯泡合格品比例为 $A_{乙}=\frac{18}{20}=90\%$.

(3)$S_{甲}^2\approx\frac{1}{20}[3\times(96-99.3)^2+6\times(98-99.3)^2+8\times(100-99.3)^2+2\times(102-99.3)^2+(106-99.3)^2]=5.31$.

$S_{乙}^2\approx\frac{1}{20}[(94-99.6)^2+2\times(96-99.6)^2+7\times(98-99.6)^2+4\times(100-99.6)^2+3\times(102-99.6)^2+2\times(104-99.6)^2+(106-99.6)^2]=8.64$.

所以 $S_{甲}^2<S_{乙}^2$,甲厂的生产情况比较稳定.

19. 解:(1)设甲射进 2 球乙射进 1 球的事件为 A.

则 $P(A)=P_2(2)\cdot P_2'(1)=(C_2^2\times0.7^2\times0.3^0)\times(C_2^1\times0.8\times0.2)=0.1568$.

(2)设甲、乙得分相等的事件为 B,

则 $P(B)=P_2(2)\cdot P_2'(2)+P_2(1)\cdot P_2'(1)+P_2(0)\cdot P_2'(0)$

$=C_2^2\cdot0.7^2\cdot C_2^2\cdot0.8^2+(C_2^1\times0.7\times0.3)\cdot(C_2^1\times0.8\times0.2)+C_2^0\,0.3^2\cdot C_2^0\cdot0.2^2=0.4516$.

20. 解:孩子一对基因为 dd,rr,rd 的概率分别为$\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}$,孩子有显性决定特征具有 dd 或 rd.

(1)1 个孩子有显性决定特征的概率为$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

(2)2 个孩子中至少有一个有显性决定特征的概率为 $1-C_2^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$.

21. 解:(1)设 A,B,C,D 分别表示事件开关 A,B,C,D 接通 $P(A)=P(B)=P(C)=P(D)=P$.先求灯亮的概率 B,C 与 D 并联电路接通为事件 E, $P(E)=P(BC+D)=P(BC)+P(D)-P(BC\cdot D)=P^2+P-P^3$.

所以 电灯亮的概率 $P(AE)=P(A)P(E)=P^3+P^2-P^4$.

所以 $f(P)=1-P(AE)=1+P^4-P^2-P^3$.

(2)由(1)$f'(P)=4P^3-3P^2-2P$.令 $f'(P)=0\Rightarrow P=\frac{3\pm\sqrt{41}}{8}$.

因 $0<P<1$,而$\frac{3+\sqrt{41}}{8}>1$,$\frac{3-\sqrt{41}}{8}<0$,所以 $f'(P)=0$ 无解.

故在(0,1)内 $f(P)$无最大值.

试卷(十七)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	C	B	B	A	A	D	A	C	A	C

13.4　14. $y=3x+4$　15. $-\frac{3}{2}$　-6　16. 16　-16　17. $b=-1,c=2$.　18. $y_{max}=f(-2)=19$, $y_{min}=f(1)=-8$.　19. $\frac{32}{9}\sqrt{3}$.

20. 解:设支付存户的年利率为 x,银行获得的利润 y 是贷出后收入的利润与支付存户的利息差.

所以 $y=kx^2\times0.9\times0.1-kx^2\times x=0.09kx^2-kx^3\quad(x>0)$.令 $y'=0.18kx-3kx^2=0\Rightarrow x=0.06$.当 $0<x<0.06$ 时,$y'>0$,当 $x>0.06$ 时 $y'<0$.所以 当 $x=0.06$ 时,y 取极大值就是 y 的最大值.

答:银行支付给存户年利率为6%时银行可获最大利润.

21. 解:(1)$f'(x)=3kx^2-6(k+1)x<0$ 的解集为$(0,4)$,所以 $\frac{2(k+1)}{k}=4\Rightarrow k=1$.

(2)要证 $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$ 即证 $4x^3>(3x-1)^2$.

令 $g(x)=4x^3-(3x-1)^2=4x^3-9x^2+6x-1$,$g'(x)=6(2x^2-3x+1)=6(2x-1)(x-1)>0$,

对一切实数 $x>1$ 都成立,所以 $g(x)$在$(1,+\infty)$上递增.所以 $g(x)>g(1)=0$ 即 $g(x)>0$,原不等式得证.

试卷(十八)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	A	B	D	C	B	A	D	D	A	A

13. 5　14. $(3,+\infty)$　15. 16　16. (1) (2) (4) ⇒(3)或(1) (3) (4) ⇒(2)

17. 解:(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\cos23°,\cos67°)\cdot(\cos68°,\cos22°)$

$$=\cos23°\cos68°+\cos67°\cos22°$$

$$=\sin67°\cos68°+\cos67°\sin68°$$

$$=\sin135°=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2)$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=(\cos23°+t\cos68°,\cos67°+t\cos22°)$,$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{1+t^2+2t\cos45°}=\sqrt{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$.,$|\boldsymbol{c}|_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18. 解:(1)因为甲,乙,丙各自考试合格的事件是相互独立的,所以三人同时考试合格的概率是

$P(甲\cdot乙\cdot丙)=P(甲)\cdot P(乙)\cdot P(丙)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$.

(2)只有一个不合格,按不合格者的情形可分为:

只有甲不合格的概率是

$P(\overline{甲})\cdot P(乙)\cdot P(丙)=\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{9}{60}$.

只有乙不合格的概率是

$P(甲)\cdot P(\overline{乙})\cdot P(丙)=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{60}$.

只有丙不合格的概率是

$P(甲)\cdot P(乙)\cdot P(\overline{丙})=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{60}$.

故只有两人考试合格的概率是

$\frac{9}{60}+\frac{2}{60}+\frac{12}{60}=\frac{23}{60}$.

19. 解:(1)由已知数据,易知函数 $y=f(t)$的周期 $T=12$,振幅 $A=3$, $b=10$,所以 $y=3\sin\frac{\pi t}{6}+10$.

(2)由题意,该船进出港时,水深应不小于 $5+6.5=11.5$(米),

所以 $3\sin\frac{\pi t}{6}+10\geqslant 11.5$.所以 $\sin\frac{\pi t}{6}\geqslant\frac{1}{2}$.解得,$2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}t\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,$12k+1\leqslant t\leqslant 12k+5$ ($k\in\mathbf{Z}$).在同一天内,取 $k=0$ 或 1,

所以 $1\leqslant t\leqslant 5$ 或 $13\leqslant t\leqslant 17$.

所以 该船最早能在凌晨 1 时进港,下午 17 时出港,在港口内最多停留 16 个小时.

20. 解:(1)在平面 BA_1 内,过 B_1 作 $B_1D\perp AB$ 于 D,因为 侧面 $BA_1\perp$平面 ABC,所以 $B_1D\perp$平面 ABC,所以 $\angle B_1BA$ 是 BB_1 与平面 ABC 所成的角.所以 $\angle B_1BA=60°$.又因为 ABB_1A_1 是菱形,所以 $\triangle ABB_1$ 为正三角形,所以 D 是 AB 的中点,即 B_1 在平面 ABC 上的射影为 AB 的中点.

(2)连结 CD,所以 $\triangle ABC$ 为正三角形,所以 $CD\perp AB$.又因为平面 $A_1B\perp$平面 ABC,所以 $CD\perp$平面 A_1B_1.在平面 BA_1 内,过 D 作 $DE\perp AB_1$ 于 E,连结 CE,则 $CE\perp AB_1$.所以 $\angle CED$ 为二面角 $C-AB_1-B$ 的平面角.在 $\mathrm{Rt}\triangle CED$中,$CD=2\sin 60°=\sqrt{3}$.连结 BA_1 交 AB_1 于 O,则 $BO=\sqrt{3}$ 所以 $DE=\frac{1}{2}BO=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\tan\angle CED=\frac{CD}{DE}=2$.所以 所求二面角 $C-AB_1-B$ 为 $\arctan 2$.

(3)$B_1C\perp C_1A$

证法一:连结 BC_1,因为 BB_1C_1C 是菱形,所以 $BC_1\perp CB_1$.

因为 $CD\perp$平面 A_1B,$B_1D\perp AB$,所以 $B_1C\perp AB$.所以 $B_1C\perp$平面 ABC_1.所以 $B_1C\perp AC_1$.

证法二:取 A_1B_1 的中点 D_1,连结 C_1D_1、AD_1,连结 CA_1 交 AC_1 于 G,连结 GD_1

因为 $GD_1/\!/CB_1$,又 $D_1C_1=AD_1$,所以 $AC_1\perp GD_1$ 所以 $AC_1\perp B_1C$.

(亦可补成三棱柱、四棱柱,再由勾股定理或用补体法计算或证明.)

21. 解:(1)由已知,可得 $f'(x)=2a+\frac{2}{x^3}$. 因为 $f(x)$在 $x\in(0,1]$上是增函数,有 $f'(x)>0$.即 $a>-\frac{1}{x^3}$.

而函数 $g(x)=-\frac{1}{x^3}$在 $x\in(0,1]$上是增函数,且$[g(x)]_{\max}=g(1)=-1$,所以 $a>-1$.当 $a=-1$ 时,$f'(x)=-2+\frac{2}{x^3}$,对于在 $x\in(0,1)$也有 $f'(x)>0$,满足 $f(x)$在 $x\in(0,1]$上是增函数,所以 $a\geqslant-1$ 即为所求.

(2)由(1)知 $a\geqslant-1$ 时,$f(x)$在 $x\in(0,1]$上是增函数.所以 当 $a\geqslant-1$ 时,$[f(x)]_{\max}=f(1)=2a-1$.;当 $a<-1$ 时,令 $f'(x)=2a+\frac{2}{x^3}=0$,得 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{-a}}$.注意到 $0<\frac{1}{\sqrt[3]{-a}}<1$,所以 当 $0<x<\frac{1}{\sqrt[3]{-a}}$时,$f'(x)>0$;当$\frac{1}{\sqrt[3]{-a}}<x\leqslant 1$时,$f'(x)<0$.所以 当 $a<-1$ 时,$[f(x)]_{\max}=f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{-a}}\right)=2a\frac{1}{\sqrt[3]{-a}}-(\sqrt[3]{-a})^2=-3\sqrt[3]{a^2}$.故对 $x\in(0,1]$,当 $a\geqslant-1$ 时,$[f(x)]_{\max}=2a-1$.当 $a<-1$ 时,$[f(x)]_{\max}=-3\sqrt[3]{a^2}$.

22. 解:(1)解法一:设椭圆 C:$\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

因为 $2c=2$,所以 $c=1$,所以 右准线方程为 $x=a^2+1$,设 $M(x,y)$,$P(x_0,y_0)$,连接 PB,则 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2$,所以 $(|PA|+|PB|)^2-2|PA|\cdot|PB|=4$.所以 $(2a)^2-2\cdot 2|y_0|=4$.

$y_0=\pm(a^2-1)$.由 $\begin{cases}x=a^2+1,\\ y=y_0=\pm(a^2-1).\end{cases}$ 消去 a,得 $y=\pm(x-2)$.因为 $0<|y_0|<1$,所以 $0<a^2-1<1$,$1<a^2<2$.所以 $2<x<3$.即 M 点的轨迹方程是 $y=\pm(x-2)$ $(2<x<3)$.

解法二:如解法一,

由 $\begin{cases}(x_0-1)^2+y_0^2=1,\\ \dfrac{(x_0-1)^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1.\end{cases}$ 解得 $y_0^2=b^2(a^2-1)$.因为 $b^2=a^2-c^2=a^2-1$,所以 $y_0^2=(a^2-1)$.即 $y_0=\pm(a^2-1)$.

以下同解法一.

(2)解法一:设 $\angle ABQ=\alpha$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,则 $|AB|=2$,$|PA|=|BQ|=2\cos\alpha$,

$|PQ|=|AB|-2|BQ|\cos\alpha=2-4\cos^2\alpha$.所以 周长 $L=(2-4\cos^2\alpha)+4\cos\alpha+2$.

$=-4(\cos\alpha-\frac{1}{2})^2+5$.当 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$,即 $\alpha=\frac{\pi}{3}$时,

周长 L 取最大值 5.此时 $|BQ|=1$,$|AQ|=\sqrt{3}$,$2a=|BQ|+|AQ|$,$a^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$,$b^2=a^2-1=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以所求椭圆 C 的方程为 $\dfrac{(x-1)^2}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{y^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$.

解法二:设 $P(x_0,y_0)$,$|PA|=t$,因为 $|PA|^2=(||AB|-x_0|)|AB|$,所以 $t^2=2(2-x_0)$.$x_0=2-\frac{t^2}{2}$.因为 $1<x_0<2$,所以 $0<t<\sqrt{2}$.梯形周长 $L=|PQ|+2|PA|+|AB|$

$$\begin{aligned}&=2(x_0-1)+2t+2\\&=2\left(1-\frac{t^2}{2}\right)+2t+2\\&=-t^2+2t+4\\&=-(t-1)^2+5.\end{aligned}$$

当 $t=1$ 时,L 取最大值 5,此时 $|PB|=\sqrt{3}$,以下同解法一.

试卷(十九)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	D	B	B	D	D	C	A	D	B

13. 4　　14. $1<m<2$　　15. 7　　16. ①③⇒②④或②③⇒①④

17. 解:$e_1^2=4$,$e_2^2=1$,$e_1\cdot e_2=2\times1\times\cos60°=1$.

所以 $(2te_1+7e_2)\cdot(e_1+te_2)=2te_1^2+(2t^2+7)e_1\cdot e_2+7te_2^2=2t^2+15t+7$.所以 $2t^2+15t+7<0$.所以 -7

$<t<-\frac{1}{2}$. 设 $2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2)(\lambda<0)\Rightarrow\begin{cases}2t=\lambda\\7=t\lambda\end{cases}\Rightarrow 2t^2=7\Rightarrow t=-\frac{\sqrt{14}}{2},\lambda=-\sqrt{14}$. 所以 $t=-\frac{\sqrt{14}}{2}$ 时, $2t\boldsymbol{e}_1+7_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 π, 所以 t 的取值范围是 $(-7,-\frac{\sqrt{14}}{2})\cup(-\frac{\sqrt{14}}{2},-\frac{1}{2})$.

18. 解:(1)因为 这名学生第一、二个交通岗未遇到红灯,第三个交通岗遇到红灯,

所以 $P=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$.

(2)因为 $\xi\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$, 所以 $E\xi=6\times\frac{1}{3}=2$, $D\xi=6\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

19. 解:(1) $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=4a_n-4a_{n-1}$, 所以 $a_{n+1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})$, 即 $b_n=2b_{n-1}(n\geqslant2)$.

又因为 $b_1=a_2-2a_1=S_2-3a_1=a_1+2=3$, 即 $\{b_n\}$ 是首项为 3, 公比为 2 的等比数列.

(2)由(1) $b_n=3\times2^{n-1}$, 得 $a_{n+1}-2a_n=3\times2^{n-1}$, 又 $C_n=\frac{a_n}{2^n}$, 所以 $C_{n+1}-C_n=\frac{1}{2^{n+1}}(a_{n+1}-2a_n)=\frac{1}{2^{n+1}}\times3\times2^{n-1}=\frac{3}{4}$, 且 $C_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$, 即 $\{C_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, 公差为 $\frac{3}{4}$ 的等差数列.

20. 解:(1)

$$\left.\begin{array}{l}\text{在 Rt}\triangle ABC\text{ 中},\angle C=30^\circ\Rightarrow\angle BAC=60^\circ,\\ DA=DC\Rightarrow DA=DB\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\triangle ABD\text{ 为正三角形},\\ BE=ED\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}AE\perp BD,\\ EF\perp BD\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}BD\perp A'E,\\ BD\perp EF,\\ A'E\cap EF=E,\\ EF,A'E\subset\text{面 }A'EF\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}BD\perp\text{面 }A'EF,\\ BD\subset\text{面 }BCD\end{array}\right\}\Rightarrow\text{面 }A'EF\perp\text{面 }BCD.$$

$$\text{(2)由(1)}\left.\begin{array}{l}DB\perp A'E,\\ BD\perp EF\end{array}\right\}\Rightarrow\angle A'EF\text{ 是二面角 }A'-BD-C\text{ 的平面角},\angle A'EF=\theta.$$

因为 面 $A'EF\perp$ 面 BCD 在面 $A'EF$ 内过 A' 作 $A'O\perp EF$ 交 FE 的延长线于 O,

$$\left.\begin{array}{l}\text{所以 }A'O\perp\text{面 }CDB,\\ A'B\text{ 是面 }CDB\text{ 的斜线},\\ BO\text{ 是 }A'B\text{ 在面 }CDB\text{ 上的射影},\\ A'B\perp CD\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}BO\perp CD,\\ AO\perp BD\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}O\text{ 是}\triangle ABD\text{ 的垂心},\\ \triangle ABD\text{ 是正三角形}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

O 是 $\triangle ABD$ 的重心, 所以 $\frac{OE}{A'E}=\frac{1}{3}$, 在 Rt$\triangle A'EO$ 中, $\cos(\pi-\theta)=\frac{OE}{A'E}=\frac{1}{3}$.

所以 $\pi-\theta=\arccos\frac{1}{3}\Rightarrow\theta=\pi-\arccos\frac{1}{3}$.

(3)在 Rt$\triangle A'OE$ 中 $A'O=\sqrt{A'E^2-OE^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$, $A'E=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

$V_{C-A'BD}=V_{A'-BCD}\Rightarrow\frac{1}{3}S_{\triangle A'BD}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot A'O\Rightarrow d=\frac{A'O\cdot S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle A'BD}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$.