线性代数复习指南

电子科技大学应用数学系 编

电子科技大学出版社
UESTC PUBLISHING HOUSE

线性代数
复习指南

电子科技大学应用数学系 编

电子科技大学出版社

线性代数
复习指南

电子科技大学应用数学系

出　　版：电子科技大学出版社　（成都建设北路二段四号，邮编：610054）
责任编辑：张献贵
发　　行：新华书店经销
印　　刷：电子科技大学出版社印刷厂
开　　本：787×1092　1/16　印张 10.25　字数 250 千字
版　　次：1998 年 8 月第一版
印　　次：1999 年 9 月第二次印刷
书　　号：ISBN 7—81043—999—5/O・62
印　　数：5001—7000 册
定　　价：11.00 元

前　言

本书是根据国家教委颁发的《高等工业学校线性代数课程教学基本要求》并参照《全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲》编写的。旨在帮助大学生在学习线性代数时，进一步深入理解基本概念，掌握基本理论和基本方法，提高分析问题和解决问题的能力。本书编写的指导思想是：紧扣大纲，突出重点；加强基础，重视综合；总结题型，启迪思路；注重应用，提高能力。

本书根据教学内容分为六章，每章分为四个部分：(1)基本要求；(2)内容提要；(3)典型例题；(4)检测题。书末附有检测题参考答案和近几年电子科大本科生线性代数考试题及其参考答案。

本书在内容编排与题目的选择上，融汇了编者多年从事线性代数教学的经验。特别注意选编了近几年各类研究生入学考试的试题。本书内容全面，例题典型，分析透彻，深入浅出，叙述清晰，便于自学，是读者学习线性代数的得力助手。本书可供普通高校、成人教育、高教自考等各类本科、专科学生以及报考研究生的读者参考。

本书由成孝予主编。各章执笔者是：钟守铭（第一、二章），黄廷祝（第三章），成孝予（第四、五、六章）。

限于编者水平，难免有不妥之处，敬请批评指正。

编　者

1998 年 1 月

目　录

第一章　行　列　式

一、基本要求

1. 了解 n 阶行列式的定义；
2. 了解行列式的性质，掌握行列式的计算；
3. 掌握克兰姆法则.

二、内容提要

1. 排列的逆序与逆序数

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列. 在一个排列中任取两个数，如果前面的数大于后面的数，则称这两个数构成一个逆序；一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.

2. 奇偶排列

逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列.

3. 对换改变排列的奇偶性

把一个排列中两个数的位置互换，其余的数不动，这样得到一个新的排列，这两个数的位置互换称为对换. 每一个对换都要改变排列的奇偶性.

4. n 阶行列式的定义

设 n^2 个数组成 n 行 n 列的方块

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示数

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中，a_{ij}称为第 i 行第 j 列的元素，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

5. n 阶行列式的性质

性质 1 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 2 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特别地，如果行列式中某一行全为零，则行列式为零.

性质 3 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4　行列式中两行互换，则行列式改变符号.

性质 5　若行列式有两行对应元素相同，则这个行列式为零.

性质 6　若行列式有一行元素是另一行对应元素的 k 倍(即两行成比例)，则行列式为零.

性质 7　将行列式的某一行的 k 倍(即将这行的每一个元素乘以 k)加到另一行，行列式不变.

注意：性质 2～7 中将行换成列，其结论均成立..

6. 余子式、代数余子式的定义

在 n 阶行列式中，把 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij}的余子式，记作 M_{ij}. 将它带上符号 $(-1)^{i+j}$后所得的

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称为 a_{ij}的代数余子式.

7. 行列式按行(列)展开定理

行列式等于它的任一行(列)的所有元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

一般地有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} D & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases} \qquad (i,k = 1,2,\cdots,n)$$

或 $$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \begin{cases} D & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \qquad (j,k = 1,2,\cdots,n)$$

注意：有时也用 $D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$ $(D_1 = |a_{11}| = a_{11})$来给出 n 阶行列式的定义.

8. 几个特殊行列式的值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)$$

9. 克兰姆法则

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1-1}$$

如果系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(1-1)有唯一解,这个解由下列公式表示

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \cdots, \frac{D_n}{D}\right)$$

其中,$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把 D 中第 j 列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,而其余各列不变的行列式.

特别地,对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1-2}$$

如果系数行列式 $D\neq0$,则方程组(1-2)只有唯一的零解. 换句话说,如果方程组(1-2)有非零解,则必有 $D=0$.

三、典型例题

例 1 计算排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数,并指出它是奇排列,还是偶排列.

解 由于与 1 构成的逆序的数有 $n-1$ 个,与 2 构成逆序的数有 $n-2$ 个,依次类推,与 $n-1$ 构成逆序的数有 1 个,故

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$ 是偶数，所以排列是偶排列，当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$ 是奇数，所以排列是奇排列．

例 2 设排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 r，试计算 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 的逆序数．

解 在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，任意取出两个数，如果前面的数小于后面的数，则称这两个数构成一个顺序；一个排列中顺序的总数称为顺序数. 由于在排列中任取两个数，它们不构成逆序，那么它们就构成顺序；或它们不构成顺序，那么它们就构成逆序，因而有

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\text{排列 } i_1i_2\cdots i_n \text{ 的顺序数}=C_n^2$$

又因为排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的顺序数就等于排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序数. 故

$$\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)=C_n^2-r$$

例 3 当 $n\geqslant 2$ 时，n 个数的奇排列与偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个．

证 设 n 级排列中，奇排列共有 p 个，而偶排列共有 q 个. 对这 p 个奇排列进行同一个对换，即 i 与 j 的对换，那么根据对换改变奇偶性可知，原 p 个奇排列变为 p 个不同的偶排列，因而 $p\leqslant q$. 同理可得 $q\leqslant p$，因此 $p=q=\frac{n!}{2}$.

例 4 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 因为在行列式 D_n 中除了第 n 行外，其余的每一行只有一个非零元素，由 n 阶行列式的定义可知，D_n 只含一项 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_{n1}$；其中元素的下标（第 n 个数 a_{n1} 的第一个下标）正好是它们的行指标，已是一个标准的排列，而它们所在列的下标构成的排列为 $23\cdots n1$；这个排列的逆序数 $\tau[23\cdots n1]=n-1$；故

$$D_n=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_{n1}$$

例 5 回答下列问题：

(1) 在一个 n 阶行列式中等于零的元素如果比 n^2-n 还多，那么此行列式等于零，为什么？

(2) 如果 n 阶行列式中所有的元素变号，那么 n 阶行列式有什么变化，为什么？

解 (1) 由 n 阶行列式的展开式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

可知，D_n 的值是 $n!$ 项的代数和，而其中每一项都是 n 个元素的乘积，这 n 个元素又需要取自不同行不同列．

又 n 阶行列式 D_n 中一共有 n^2 个元素，如果等于零的元素比(n^2-n)还多，那么其中不等于零的元素就一定比 $n^2-(n^2-n)=n$ 还少，也就是说，D_n 中最多有 $n-1$ 个元素不等于零，所以 D_n 的 $n!$ 项中每一项的 n 个元素中必有零元出现．即 $n!$ 项的每一项都是零，故必有 $D_n=0$.

(2) 设

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在行列式 D_n 中每一个元素均变号，则得

$$D_n'=\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^nD_n$$

因此，当 n 为偶数时，有 $D_n'=D_n$，即 n 阶行列式不变；当 n 为奇数时，有 $D_n'=-D_n$，即 n 阶行列式变号.

例 6 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ x & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

其中，$a_i\neq 0(i=0,1,2,\cdots,n)$.

解 如果 $x=0$，则容易计算得

$$D_{n+1}=a_0a_1a_2\cdots a_n$$

如果 $x\neq 0$ 时，考虑将 D_{n+1}化为一个上(下)三角形式的行列式，即

$$D_{n+1}=a_1a_2\cdots a_nx\begin{vmatrix} \frac{a_0}{x} & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \frac{b_n}{a_n} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_nx\begin{vmatrix} \frac{a_0}{x}-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i} & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \frac{b_n}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_0a_1a_2\cdots a_n - a_1a_2\cdots a_n x\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}.$$

例 7 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

其中，$x_i \neq a_i (i=1,2,\cdots,n)$.

解 由行列式的性质，将 n 阶行列式化为上(下)三角形式的行列式来计算，即

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 - x_1 & x_2 - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 - x_1 & 0 & x_3 - a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 - x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\cdots(x_n - a_n)\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1 - a_1} & \frac{a_2}{x_2 - a_2} & \frac{a_3}{x_3 - a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n - a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{n}(x_j - a_j)\begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i - a_i} & \frac{a_2}{x_2 - a_2} & \frac{a_3}{x_3 - a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n - a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{n}(x_j - a_j)\left(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i - a_i}\right)$$

其中，$\frac{x_1}{x_1-a_1} = 1 + \frac{a_1}{x_1-a_1}$.

值得注意的是，如果一个 n 阶行列式能够化为形如例 6 的行列式，用化三角形式计算行列式比较容易掌握，这也是计算行列式的一种常用方法. 如下面各行列式都可以使用化三角形法来计算.

(1) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$ (2) $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

(3) $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$

例 8 求下列方程的解:

(1) $\begin{vmatrix}0 & 1 & x & 1\\ 1 & 0 & 1 & x\\ x & 1 & 0 & 1\\ 1 & x & 1 & 0\end{vmatrix}=0$; (2) $\begin{vmatrix}a_1-x & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2-x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-x\end{vmatrix}=0$

解 (1) 由于方程是以行列式的形式出现的,按行列式的展开式可以求得一个未知量 x 的多项式,然后令该多项式为零,并求出它的所有根,就可以得到原方程的解. 因为

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & x & 1\\ 1 & 0 & 1 & x\\ x & 1 & 0 & 1\\ 1 & x & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2+x & 1 & x & 1\\ 2+x & 0 & 1 & x\\ 2+x & 1 & 0 & 1\\ 2+x & x & 1 & 0\end{vmatrix}=(x+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & x & 1\\ 1 & 0 & 1 & x\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & x & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(x+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & x & 1\\ 0 & -1 & 1-x & x-1\\ 0 & 0 & -x & 0\\ 0 & x-1 & 1-x & -1\end{vmatrix}$$

$$=(x+2)(-x)[1-(x-1)^2]=x^2(x+2)(x-2)$$

令 $x^2(x+2)(x-2)=0$,故得根为 0(二重根),-2,2. 所以原方程的解为

$$x_1=x_2=0,\quad x_3=-2,\quad x_4=2.$$

(2) 因为

$$\begin{vmatrix}a_1-x & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2-x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-x & a_2 & \cdots & a_n\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i-x & a_2-x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i-x & a_2 & \cdots & a_n-x\end{vmatrix}$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}a_i-x)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2-x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_2 & \cdots & a_n-x\end{vmatrix}=(\sum_{i=1}^{n}a_i-x)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & -x & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -x\end{vmatrix}$$

$$=(-x)^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}a_i-x)$$

令 $(-1)^{n-1}x^{n-1}(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-x)=0$,方程式的根为

$$0(n-1\text{ 重根}),\quad \sum_{i=1}^{n}a_i$$

所以原方程的解为

$$x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=0,\quad x_n=\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

例 9 求下列行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 150 & 97 & 508 \\ -1 & 4 & 43 & 78 & 968 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

解 (1) 在 5 阶行列式中，左下角三行两列均为零元素，故利用拉普拉斯展开式有

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 150 & 97 & 508 \\ -1 & 4 & 43 & 78 & 968 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(8+3)(12+4)=176.$$

(2) 利用按行(列)展开定理，将行列式按第一列展开，可得：

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n$$

例 10 设 n 是奇数，将 $1,2,\cdots,n^2$ 共 n^2 个数排成一个 n 阶行列式 D_n，使其每行、每列的和都相等，证明该行列式能被全体元素的和整除.

证 已知行列式 D 的元素总和 S 为

$$S=\frac{1}{2}n^2(n^2+1)$$

每行、每列元素之和为 $b=\dfrac{S}{n}=\dfrac{1}{2}n(n^2+1)$

设行列式 D 为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

先将第 $2,3,\cdots,n$ 行都加到第一行，有

$$D=\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} nb & b & \cdots & b \\ b & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=nb\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{b}{n} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{b}{n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=SD_1$$

因为 n 为奇数，n^2+1 是偶数，故$\frac{b}{n}=\frac{1}{2}(n^2+1)$是整数，$a_{ij}$也是整数．因此，行列式 D_1 是整数，故 D 被 S 整除．

例 11 证明下列各式

(1)
$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$$

(2)
$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

证 (1) 根据所给行列式的特点，我们利用按行（列）展开定理使行列式降阶．即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}=xD_{n-1}+a_n$$

由以上递推公式可得：

$$D_1=a_1$$
$$D_2=xD_1+a_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-1}$$
$$D_n=xD_{n-1}+a_n$$

逐个代入可得

$$\begin{aligned}D_n&=x(xD_{n-2}+a_{n-1})+a_n=x^2D_{n-2}+a_{n-1}x+a_n\\&=\cdots=x^{n-1}D_1+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\\&=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\end{aligned}$$

(2) 利用数学归纳法来证明

当 $n=1$ 时，$|\alpha+\beta|=\alpha+\beta=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$，结论成立.

假设当 $n\leqslant k$ 时，结论也成立，即

$$\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}(n\leqslant k)$$

令证当 $n=k+1$ 时，利用行列式按第 $k+1$ 行展开，有

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=(\alpha+\beta)D_k-\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha\beta\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=(\alpha+\beta)D_k-\alpha\beta D_{k-1}\\&=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\\&=\frac{\alpha^{k+2}+\alpha^{k+1}\beta-\alpha\beta^{k+1}-\beta^{k+2}-\alpha^{k+1}\beta+\alpha\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}\\&=\frac{\alpha^{k+2}-\beta^{k+2}}{\alpha-\beta}\end{aligned}$$

故结论成立.

例 12 计算下列 n 阶行列式:

$$(1)D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\end{vmatrix}\qquad (2)D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0\end{vmatrix}$$

解 (1)后一行减去前一行，则有

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&1&\cdots&1&1-n\\1&1&1&\cdots&1-n&1\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&0&0&\cdots&0&-n\\1&0&0&\cdots&-n&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&-n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=n^{n-1}\begin{vmatrix}1&\frac{1}{n}&\frac{2}{n}&\cdots&\frac{n-2}{n}&\frac{n-1}{n}\\1&0&0&\cdots&0&-1\\1&0&0&\cdots&-1&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&-1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=n^{n-1}\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}&\frac{1}{n}&\frac{2}{n}&\cdots&\frac{n-2}{n}&\frac{n-1}{n}\\0&0&0&\cdots&0&-1\\0&0&0&\cdots&-1&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&-1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=n^{n-1}[1+\frac{1}{n}\frac{1}{2}(n-1)n](-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)^{n-1}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}$$

(2)将第一行分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行，有

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\0&2&6&\cdots&2(n-1)&2n\\0&0&3&\cdots&2(n-1&2n\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1&2n\\0&0&0&\cdots&0&n\end{vmatrix}=n!$$

例 13 计算 $f(x+1)-f(x)$，其中

$$f(x)=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&x\\1&2&0&\cdots&0&x^2\\1&3&3&\cdots&0&x^3\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&n&c_n^2&\cdots&c_n^{n-1}&x^n\\1&n+1&c_{n+1}^2&\cdots&c_{n+1}^{n-1}&x^{n+1}\end{vmatrix}$$

解 注意到 $(x+1)^i=x^i+c_i^1x^{i-1}+c_i^2x^{i-2}+\cdots+c_i^{i-1}x+1(i=1,2,\cdots,n+1)$，因而有