

# 气动弹性问题的模型试验技术



国际航空杂志社

1960年4月

# 气动弹性问题的 模型试验技术

国际航空雜誌社

1960年4月

## 前 言

气动弹性问题是飞机设计中的一个重要问题。近年来由于飞行速度的迅速发展，为了适应超音速飞行的要求，飞机设计中采用了越来越薄的小展弦比机翼和越来越细长的机身，因而由于飞机结构挠性的加大，气动弹性问题就更加重要了。气动弹性问题，尤其是动气动弹性问题（如颤振）的理论分析很复杂，影响的因素很多，目前尚缺乏十分可靠的分析计算方法。因此，虽然使用了高速电子计算机，但仅仅依靠理论计算时，往往花费了很大的精力，而得不到一个准确可靠的结果。为此，世界各国在关于气动弹性问题的研究工作中，大量采用了各种形式的试验方法，尤其是各种形式的模型试验技术。试验结果为飞机设计人员提供了很多可用的资料。在试验过程中也发展了很多新的有价值的方法。国内很多有关单位也在进行这方面的研究，但目前系统介绍这方面情况的可用的中文资料不多。为此，我们特将 Raymond L. Bisplinghoff, Holt Ashley 和 Robert L. Halfman 所著“气动弹性力学 (Aeroelasticity)”一书中关于气动弹性的模型试验技术的一部分（原书第十一章，第十二章和第十三章）译出供读者参考。

因为是作为独立的一个部分出版，我们对原文的语气作了部分修改，并在文中提到原书其他部分的地方根据需要作了一些注解和补充。尽管如此，因为是全书的一个部分，在语气方面，在前后文的连系方面恐仍有不当之处，另外由于译者水平有限，在技术上仍难免有错误的地方，尚希读者能将在阅读过程中发现的问题和意见寄给我们，以便将来将全书整理出版时修改。意见请寄“北京1652号信箱编辑部”。

本文在翻译过程中参考了俄文译本。

——译者——

# 目 录

## 第一部分 气动弹性模型理论

§1. 引言	3
§2. 因次概念	3
§3. 运动方程式	4
§4. 振动模型的相似律	5
§5. 稳定空气载荷作用下的系统的相似律	9
§6. 颤振模型的相似律	12
§7. 自由颤振模型	15
§8. 动稳定性模型	17
参考文献	18

## 第二部分 模型的设计和构造

§1. 引言	19
§2. 结构模拟	23
§3. 弹性特性为一元函数	24
§4. 弹性特性为二元函数	31
§5. 形态模拟	35
§6. 惯性模拟	36
参考文献	39
附录(原书第2章第15节): 用最小应变能原理确定复杂组合稳定的影响系数	39

## 第三部分 试验技术

§1. 引言	42
§2. 结构挠性的测量	42
§3. 自振频率和振动形态的测定	44
§4. 静状态气动弹性试验	61
§5. 动(气动弹性)试验——全尺寸试验	62
§6. 动(气动弹性)试验——模型试验	66
参考文献	77

# 第一部分 气动弹性的模型理论

## §1. 引言

在气动弹性范围内的试验研究主要具有两方面的目的：即对于任何有用的理论发展具有巨大的影响，同时可用以解决广泛范围内实际问题，在这些范围内现有理论还不十分可靠。特别是在对颤振的研究工作中具有相似质量与刚度特性的风洞模型的试验给研究人员提供的资料常常比在分析计算，甚至全尺寸飞机的试验中用同样努力所能获得的资料多。在这些试验过程中，曾经发展了很多新的有价值的方法和技术。为了合理地设计和使用模型，要求对模型理论有全面的了解。本部分将比较系统地介绍气动弹性模型设计中的一些理论问题。

## §2. 因次概念

要掌握模型理论(不管是用在飞机上或者是用在化学反应过程中)，首先必须清楚地了解因次概念和熟悉因次分析原理。因此，我们先从测量的科学系统的基本性质开始。首先“因次”是在需要测量某一物理量时产生的。例如，测量距离要求有长度的概念。同样，测量速度要求同时有时间和长度的概念。当然，距离的度量要求有一切确的规则，通过它，将数和距离联系起来。常用的规则说明给定距离的度量即为包括在此距离内的单位长度的简单倍数。同样，测量时间要求采用单位时间间隔。因为距离的度量决定于所采用的单位长度的大小，即距离的度量同单位长度的大小成反比。此一般测量系统的特性导出了重要的结果：即两个距离度量之比与用以度量该距离的长度单位的大小无关。例如，升力面的展弦比与测量翼展和翼弦时所用的是英制或是米制单位无关。在科学实践中所有的测量体系都具有这种性质，因而这些性质已成为因次分析的基础。

在测量物理量值的过程中可以看出有两种类型的量值。属于第一种类型的、亦即最简单的量值是：每一个量值都可以很容易地直接用其自己的单位度量。属于第二种类型的量值是按某一规则由第一类型的值推导出的。在包含有一系列物理量的问题中，所有的物理量值都能由属于第一类型的少数几种量值推导出。这几种属第一类型的量值称之为基本量值。其余的量值称为诱导量值。例如，在结构静力学问题中所有诱导量值(如弯曲力矩，弹性系数)都可以由基本量值——力和长度导出。在力学中选取质量、长度和时间作为基本量比较合适，而在可压缩流体的空气动力学和在热力学中常常选取温度为第四个基本量值。必须注意，没有理由说明某些量值必须经常选为基本量值，但根据所采用的测量体系，选用某些量值为基本量值，而其余量值为诱导量值，会更方便一些。

由上述一般科学测量体系中可以看出，在由基本量值推导诱导量值的组合规则中必须有一重要约束，即一物理量值(无论是基本量值还是诱导量值)在两种情况中的度量比与基本量值的单位的大小无关。这样两个速度的度量比是一样的，无论其测量单位是哩和小时还是呎和秒。Beidgman(参考文献1)指出，此约束限制某一诱导量值的度量所能由一组  $m$  个适当的基本量值的度量  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$  推导出的形式。此形式为：

$$S = C P_1^{d_1} P_2^{d_2} P_3^{d_3} \dots P_m^{d_m} \dots \dots \dots (1)$$

式中  $C$  为无因次数值。这样，每一诱导量值都可用具有正的或负的幂的基本量值和一因次

量的乘积表示。指数 $d_k$ 称为诱导量值对基本量值 $E_k$ 的“因次”，并且对于一般的基本量值它为整数。

为了能从力学的比较熟悉的领域内举出一些实例，我们选取质量、长度、时间为基本量值，并给出相应的度量符号分别为M、L和T。那么，力的度量表示形式为 $CM^1L^1T^{-2}$ ，同样密度的度量将为 $CM^1L^{-3}$ ，压力的度量为 $CM^1L^{-1}T^{-2}$ 和速度度量为 $CL^1T^{-1}$ 。如果在力的表示中的单位为磅、斯拉格、呎和秒或为达因、克、厘米和秒，则常数C等于1。其它的物理量值，如密度、压力和速度，和力不一样，其常用的单位没有专门的名词，而是由其它单位名称表示。这样，密度单位用基本单位斯拉格和呎表示，即斯拉格/呎<sup>3</sup>，压力常用一个诱导量和一个基本量表示：磅/呎<sup>2</sup>。当然在这两种情况下常数C都等于1。对于速度有一不通用单位一节，对于它，如果长度和时间不以哩和小时为测量单位，则常数C不等于1。

有一点很重要，力的度量的表示常用

$$F = CM^1L^1T^{-2} \dots \dots \dots (2)$$

这主要是取决于牛顿第二定律在实践中的重要性。牛顿第二定律是：物体质量和加速度的乘积与作用在物体上的力成正比。但没有理由说明不能用牛顿万有引力定律来确定力的因次。此定律是：两个物体间的吸引力与质量的乘积成正比而和两个物体间距离的平方成反比。这样，力的度量可写成：

$$F = CM^2L^{-2} \dots \dots \dots (3)$$

很明显，诱导量值一力的两种表达形式是不一致的，所以不应同时应用。如果采用了第一种形式就要求将万有引力定律写成：

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \dots \dots \dots (4)$$

式中 $\gamma$ 的因次形式为 $M^{-1}L^3T^{-2}$ ，并称为有引力常数。如果采用（但并不经常）第二种形式，则要求将第二定律写成：

$$F = \beta m \frac{d^2s}{dt^2} \dots \dots \dots (5)$$

式中 $\beta$ 可称为“万有惯性常数”，其因次形式为 $M^1L^{-3}T^2$ 。在本文内将采用较通用的基于牛顿第二定律的第一种形式。虽然如此，知道存在有因次常数，如引力常数，光速，和气体常数，而不将它们和无因次量值C（其值仅决定于单位的大小）混淆起来，是非常重要的。

### § 3 运动方程式

为了用数学方程式描述某一种现象，需要应用一个或数个物理原理。在力学和空气动力学中典型的原理是牛顿定律和物质不灭的原理。对已知物理现象应用相应原理的结果会获得一个或更多的包括相应物理量值作为自变量的方程式，这些量值可能是基本量值、诱导量值或因次常数（具有和诱导量值相同的形式）。这样导出的方程式，如果它包括了必须的因次常数，则将根本和基本量值的单位大小的改变无关。这种基本单位的改变将简单地使方程式中每一项发生同一因子的改变，因为方程式的每一项都具有同样的因次。换言之，因为物理现象不会由于基本单位大小的改变而变化，所以完全描述此物理现象的方程式也应同样和基本单位的大小无关。这样的方程式称为“完全方程式”。本文也仅研究这种类型的方程式。

只有一种情况在基本单位大小改变时不会影响完全方程式中每一项的系数，那就是当方程式各项都为特定基本量值的无因次量时。例如，如果基本量值——时间不用秒而改用小时

### 測量，質點的等速運動方程式

$$x = x_0 + v_0 t \dots\dots\dots (6)$$

并不改变。实际上以  $x_0$  除方程式各項，就使方程式的每一項對於兩個基本量值——時間和長度都為無因次量。這樣，無因次表达式

$$\frac{x}{x_0} = 1 + \frac{v_0 t}{x_0} \dots\dots\dots (7)$$

完全和單位的大小無關。而且很顯然，原來較複雜的方程式被省化為只需考慮兩個無因每變量 ( $x/x_0$ ) 和 ( $v_0 t/x_0$ ) 的無因次形式而不是原有的四個物理量值  $x, x_0, v_0, t$ 。

這種將完全方程式寫成包含較少變量的無因次形式的概念曾為 Buckingham (參考文獻2) 所推廣，Bridgman (參考文獻1) 所精確地說明過。這種概念被概括在“ $\Pi$ -定理”中，其內容是：如果物理現象可用完全方程式

$$\psi(S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_n) = 0 \dots\dots\dots (8)$$

代表(式中幾個參數包括了所有基本量值、誘導量值和必須在問題中考慮的因次常數)，此方程式可以寫成下面的形式

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \dots, \Pi_{n-m}) = 0 \dots\dots\dots (9)$$

式中  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}$  為參數  $S_1, \dots, S_n$  的  $(n-m)$  個獨立組合，並為  $m$  個基本量值的無因次量。這些無因次  $\Pi$  的形式可以用形式程序 (參考文獻1) 確定，但常可以用直接觀察的方法和一般常識確定，通常用的典型的  $\Pi$  量是展弦比、減縮頻率、 $M$  數和雷諾數。

在模型理論中採用無因次變量的優點在於兩方面。第一，問題可很方便地用最少數的變量表示。第二，由於運動的無因次方程式完全不會受比例效應 (即基本單位的大小的改變) 的影響，則無因次變量的值對原來問題及其模型一定相同。此概念將在本文以下各節內詳細敘述。

### §4 振動模型的相似律

作為模型理論的第一個實例，我們研究用小的模型確定張臂式梯形機翼在翼尖處有集中質量時的自振頻率和形態形狀的問題。如圖1所示，機翼半翼展為  $l$ ，翼尖重量為  $M_T$ 。這屬於能用簡單樑理論描述的結構類型，結構具有分佈質量  $m(y)$ ，變化的面積慣性矩  $I(y)$  和撓度  $w(y, t)$ 。

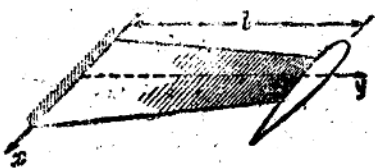


圖1 具有翼尖質量的張臂梯形機翼。

設計這種機翼的合適模型的問題用上節中談及的方法解決。這樣，將研究主要的運動方程式以確定問題中必須考慮的參數。這些參數將被寫成一組適當的無因次參數，以使運動方程式可以寫成包括最少變量的無因次形式。由於這樣的方程式不會以任何方式受到基本單位大小變化的影響，因此同樣

地應用於全尺寸機翼和為模擬全尺寸機翼而設計的任何模型。這樣的方程式直接表示了模型中必須考慮的無因次參數，以使模型能給出與從全尺寸機翼試驗所得結果相同的無因次解。

真正用於模型設計的比例因子的確定要考慮對模型的實際限制。這些限制可能是：模型的容許尺寸、模型的加工方法或者是可用的儀器和設備。如果在運動方程式中所有的無因次參數都是獨立的，所能加於模型的限制的數且等於必須確定的比例因子的數目，即問題中所包含的基本量值的數目。在較簡單的問題中，一對或幾對無因次參數能僅僅在一固定組合中

出現。在這種情況下，可加以附加的限制。

根據此方法，第一步是寫出可用的運動方程式

$$[EI(y)w''(y,t)]'' + m(y)w(y,t) = 0 \dots\dots\dots (3-7)$$

為了考慮翼根的固定情況及翼尖集中質量  $M_T$  的影響，此方程式在  $y=0$  和  $y=1$  處應有合適的邊界條件。象原書第 3 章所示，此方程式可以分成兩個完全的微分方程式〔原書第三章的方程式(3-10)和(3-11)〕。我們所尋求的振動形態形狀  $W(y)$  和頻率  $\omega$  即為原書方程式(3-11)

$$[EI(y)W''(y)]'' - \omega^2 m(y)W(y) = 0 \dots\dots\dots (3-11)$$

譯者註：原方程式(3-10)和(3-11)為：

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \dots\dots\dots (3-10)$$

$$(EIW'')'' - m\omega^2 W = 0 \dots\dots\dots (3-11)$$

的解。此方程式中的每一參數的因次可用一組基本量值——質量、長度和時間 (M, L, T) 表示。但是這樣作以前應注意，某些參數包含着兩種概念：隨  $y$  的變化和因次量的概念。採用能區別這兩種概念的符號可以使下一步更容易理解。其方法如下：令

$$m(y) = m_{\text{翼根}} \cdot m_N(y) \dots\dots\dots (10)$$

式中  $m_{\text{翼根}}$  為分佈質量在翼根處的因次量，而  $m_N(y)$  代表分佈質量沿翼展的變化情況，在翼根處其值等於 1。這樣， $m_N(y)$  表示與任何截面上分佈質量的實際量無關的質量分佈。這當然是無因次量。同樣，令

$$W(y) = W_{\text{翼尖}} \phi(y) \dots\dots\dots (11)$$

$$I(y) = I_{\text{翼根}} I_N(y) \dots\dots\dots (12)$$

這樣，運動方程式變成

$$[EI_{\text{翼根}} I_N(y) \phi''(y)]'' - \omega^2 m_{\text{翼根}} m_N(y) \phi(y) = 0 \dots\dots (13)$$

式中參數的因次為：

$$\begin{aligned} y, l &\sim L, & E &\sim ML^{-1}T^{-2}, & I_{\text{翼根}} &\sim L^4, \\ \omega &\sim T^{-1}, & m_{\text{翼根}} &\sim ML^{-1}, & M_T &\sim M, \dots\dots\dots (14) \\ I_N(y), \phi(y), m_N(y) &\sim \text{無因次量} \end{aligned}$$

這些參數可以組成下列的無因次量組：

$$\frac{y}{l}, \frac{I_{\text{翼根}}}{l^4}, \frac{M_T}{m_{\text{翼根}} l}, \frac{\omega^2 m_{\text{翼根}}}{E}, I_N(y), \phi(y), m_N(y) \dots\dots\dots (15)$$

象  $\Pi$ -一定理指出的一樣，(15)式中的無因次參數的數目比(14)式中的因次參數的數目少了三個，而且組成了一個完整的組，因為由同樣的因次組(14)所組成的任何其它無因次參數都可以由完整組(15)中的無因次參數的組合構成。

現在，運動方程式的無因次形式可寫成：

$$\left[ I_N \left( \frac{y}{l} \right) \phi'' \left( \frac{y}{l} \right) \right]'' - \left[ \frac{l^4 \omega^2 m_{\text{翼根}}}{EI_{\text{翼根}}} \right] m_N \left( \frac{y}{l} \right) \phi \left( \frac{y}{l} \right) = 0 \dots\dots (16)$$

並在  $y/l=0$  和  $y/l=1$  處具有相應的邊界條件，其中包括了  $M_T/m_{\text{翼根}}$  和上述方程式中的參數。此處的符號“ $''$ ”代表對  $y/l$ ，而不是對  $y$  微分。由方程式的形式可以看出，在此問題中參數  $\omega^2 m_{\text{翼根}}/E$  和  $I_{\text{翼根}}/l^4$  不是獨立的，而僅組成一個參數  $\omega^2 l^4 m_{\text{翼根}}/EI_{\text{翼根}}$

以無因次形式  $\phi(y/l)$  和  $\omega^2 l^4 m_{\text{翼根}}/EI_{\text{翼根}}$  表示的形態形狀和自振頻率，顯然可以由任



何模型試驗確定，模型本身具有正確的面積慣性矩分佈  $I_N(y/l)$ ，具有正確的質量分佈  $m_N(y/l)$  和在翼尖處具有的集中質量的正確比例。

為了確定模型的因次特性，需要研究確定三個比例因子的獨立限制。假設從實際和經濟觀點出發，模型的大小限制為機翼的  $1/10$ ，則長度比例因子可寫成：

$$\frac{l_m}{L_w} = \frac{1}{10} \dots \dots \dots (17)$$

也假設可用的測量設備適合於比機翼（全尺寸）振動高的頻率範圍，則設計的模型的頻率或者應比機翼頻率大三倍，即

$$\frac{T_m}{T_w} = \frac{1}{3} \dots \dots \dots (18)$$

第三個設計限制，可能是模型必須是金屬結構，其內部阻尼與全尺寸機翼的阻尼為同級大小。這樣，彈性模數比由材料的選擇確定。如果選擇的模型材料為鋼，機翼的材料為鋁合金，則

$$\frac{E_m}{E_w} = \frac{3}{1} = \frac{(ML^{-1}T^{-2})_m}{(ML^{-1}T^{-2})_w} \dots \dots \dots (19)$$

對第三個基本量值的比例因子求解，得

$$\frac{M_m}{M_w} = \frac{3}{1} \frac{l_m}{L_w} \left( \frac{T_m}{T_w} \right)^2 = \frac{1}{30} \dots \dots \dots (20)$$

根據基本量值——質量、長度、時間的三個比例因子，可以確定方程式(16)內模型的全部必須的因次量值的大小。例如，模型翼尖處的質量可由下式確定：

$$(M_T)_m = \frac{1}{30} (M_T)_w \dots \dots \dots (21)$$

分佈質量的參考值等於

$$(m_{\text{翼根}})_m = \frac{1}{30} \left( \frac{1}{10} \right)^{-1} \cdot (m_{\text{翼根}})_w = \frac{1}{3} (m_{\text{翼根}})_w \dots \dots \dots (22)$$

面積慣性矩等於

$$(I_{\text{翼根}})_m = \frac{1}{10^4} (I_{\text{翼根}})_w \dots \dots \dots (23)$$

當模型的所有特性已計算出時，即可用以確定不包括方程式(16)內的所有其他的模型特性。一般不能正確地根據質量、長度和時間的比例因子所確定的這些量值的比例來計算這些量值：

例如，我們不能作出這樣的結論：在第一自振形態中由於按比例計算出撓度在模型中產生的最大應力，可以用全尺寸機翼的應力乘以相應的比例因子的方法確定。在給定截面上的最大應力不僅決定於局部彎矩和面積慣性矩，同時還決定於中性軸和最外邊緣之間的距離。雖然前面兩個量值將有適當的比例，但最後的量值（例如）卻與所選擇的模型截面形狀有關。沒有理由必須使模型截面形狀與全尺寸結構的形狀完全相同，模型截面只需具有正確的面積慣性矩，以獲得要求的頻率和形態形狀即可。在多數氣動彈性模型中，採用了不是十分有效但是容易加工的結構，因而這些模型與全尺寸結構只是部分相似。

這樣模型可能呈鋼制的，其半翼展為全尺寸機翼的  $1/10$ ，質量為全尺寸機翼的  $1/30$ ，其質量

和刚性分布与全尺寸机翼相同。这时在相应的振动形态中模型的振动频率将比机翼的振动频率大三倍，振型的形态形状  $\phi(y/l)$  将与机翼完全相同。当然，如果对模型的设计限制与上面假设不同，则此比例因子也将不同\*。测得的频率当换算为全尺寸的情况时应完全相同。

作为模型理论的第二个实例，我们将研究写成用积分方程式，而不是上述的微分方程式表示的更一般的振动问题。假设，为了确定一完全有约束的飞机振动的形态形状和频率，我们希望设计其振动模型。

描述下图所示的飞机的振动的完整方程式，为

$$\omega^2 \iint_S G(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta = W(x, y) \dots \dots \dots (3-172) **$$

式中  $W(x, y)$  为自振形态形状， $\omega$  为自振频率， $\rho(x, y)$  为二元质量分布，而

$$G(x, y; \xi, \eta) = C(x, y; \xi, \eta) - \iint_S C(r, s; \xi, \eta) \times \left[ \frac{1}{M} + \frac{y r}{I_x} + \frac{x s}{I_y} \right] \rho(r, s) dr ds \dots \dots \dots (3-173) **$$

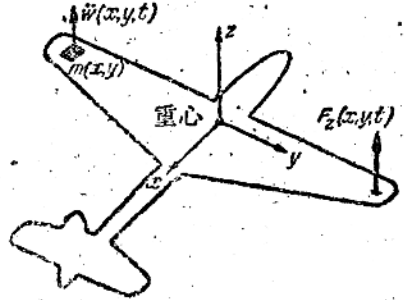


图3-21 非约束的弹性飞机 \*\*

在原书方程式(3-173)内， $C(x, y; \xi, \eta)$  为二元弹性影响函数，而  $M, I_y$  和  $I_x$  为刚性飞机的质量特性。积分面积  $S$  可以半翼展<sup>1</sup>代表其特性。和前面的问题一样，某些变数包括了两种概念，即沿飞机表面分布的概念和因次量概念。为了将这两种概念分开，令

$$\rho(x, y) = \rho_0 \rho_N(x, y) \dots \dots \dots (24)$$

式中， $\rho_N(x, y)$  在截面  $x=0, y=0$  处等于1，同样令

$$C(x, y; \xi, \eta) = C_{\text{翼尖}} C_N(x, y; \xi, \eta) \dots \dots \dots (25)$$

式中  $C_{\text{翼尖}}$  为  $x=\xi=0, y=\eta=L$  处的  $C$  值。振动形态形状用主形态形状表示如下：

$$W(x, y) = W_{\text{翼尖}} \phi(x, y) \dots \dots \dots (26)$$

为了用无因次形式表示积分方程式，每一参数的因次首先应写成以三个基本量值——质量、长度和时间表示的形式。这样，

$$\left. \begin{array}{l} \omega \sim T^{-1} \\ C_{\text{翼尖}} \sim M^{-1} T^2 \\ M \sim M \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \rho_0 \sim M L^{-2} \\ W_{\text{翼尖}} \sim L \\ I_y, I_x \sim M L^2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x, y \\ \xi, \eta \\ r, s, b \end{array} \right\} \sim L \dots \dots \dots (27)$$

$\rho_N(x, y), C_N(x, y; \xi, \eta), \phi(x, y) \sim$  无因次量。

由这些参数可以容易地构成一组无因次比值。根据  $\Pi$ -一定理，独立的无因次比值的数量应比上述参数的数量少3个，因为在此问题中有三个基本量值。这些无因次参数为：

$$\omega^2 M C_{\text{翼尖}}, \frac{\rho_0 l^2}{M}, \frac{I_x}{M l^2}, \frac{I_y}{M l^2}, \frac{W_{\text{tip}}}{l}, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}$$

\* 在此实例中，如前所示，两个无因次比值  $I_{\text{翼根}}/l^4$  和  $\omega^2 m_{\text{翼根}}/E$  不是独立出现，而仅组成一个参数，即  $\omega^2 l^4 m_{\text{翼根}}/E I_{\text{翼根}}$ 。这种特殊情况的结果是仅必须模拟组合的参数，而可以应用第四个独立限制。例如，如果对  $I_{\text{翼根}}$  选取异于  $10^4$  的比因子，如果对  $m_{\text{翼根}}$  的比例因子不等于3，则  $\omega^2 l^4 m_{\text{翼根}}/E I_{\text{翼根}}$  之值不变。在此修正中，为了使  $M_T/m_{\text{翼根}} l$  不改变，还需要改变对  $M_T$  的比例因子。

\*\*原书第三章的公式及图。——译者

$$\frac{r}{l}, \frac{s}{l}, \rho_N, C_N, \phi \dots \dots \dots (28)$$

积分方程式可写成下面的形式:

$$\begin{aligned} & (\omega^2 M C_{\text{翼尖}}) \left( \frac{\rho_0 l^2}{M} \right) \iint_S \frac{G\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}; \frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}\right)}{C_{\text{翼尖}}} \phi\left(\frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}\right) \\ & \times \rho_N\left(\frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}\right) d\frac{\xi}{l} d\frac{\eta}{l} = \phi\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}\right) \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned} & \frac{G\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}; \frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}\right)}{C_{\text{翼尖}}} = C_N\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}; \frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}\right) \\ & - \iint_S C_N\left(\frac{-r}{l}, \frac{s}{l}; \frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}\right) \left[ 1 + \left(\frac{M l^2}{I_x}\right) \frac{y}{l} \frac{r}{l} \right. \\ & \left. + \left(\frac{M l^2}{I_y}\right) \frac{x}{l} \frac{s}{l} \right] \left(\frac{\rho_0 l^2}{M}\right) \rho_N\left(\frac{r}{l}, \frac{s}{l}\right) d\frac{r}{l} d\frac{s}{l} \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

这样, 在相同几何尺寸中 (无因次积分面积), 任何具有相同的质量分布  $\rho_N$  (因而也是有相同的  $\frac{\rho_0 l^2}{M}, \frac{I_y}{M l^2}, \frac{I_x}{M l^2}$  值) 和相同的刚性分布  $C_N$  的模型将具有与全尺寸飞机相同的形态形状  $\phi$  和无因次频率  $\omega^2 M C_{\text{翼尖}}$ 。确定模型的质量和刚性分布  $[(\rho_0)_{\text{m}} \text{ 和 } (\rho_{\text{翼尖}})_{\text{m}}]$  的因次量及模型大小的三个比例因子, 和上述问题一样, 由对模型的三个独立的设计限制确定。这些限制可表示为, 例如, 对模型尺寸的限制, 利用合理尺寸的单独的金属大梁来模拟不同构件的挠性以及很多其他方法。

### §5. 稳定空气载荷作用下的系统的相似律

作为进一步研究模型理论的实例, 我们将考虑用模型研究在不可压缩流中升力面在空气载荷作用下的静弹性变形的問題。在原书第 8 章里曾提出了计算简单二元机翼和后掠梯形翼面的这种变及其引起的空气载荷分布的分析方法。

在原书第 8 章中获得的在速度为  $U$  的气流中, 二元弹性支持的机翼的转角为 [原书方程式 (8-46)]

$$\theta = \frac{C^{\theta\theta} [(iC_L/\partial\alpha) \alpha \alpha^{\tau} + C_{\text{MACC}}] q S}{1 - C^{\theta\theta} (\partial^2/\partial\alpha^2) q S_0} \dots \dots \dots (8-46)$$

(式中,  $C^{\theta\theta}$  为弹簧的挠性影响系数,  $C_L$  为机翼升力系数,  $C_{\text{MACC}}$  为绕气动力中心的机翼俯仰力矩系数,  $q$  为动压力,  $S$  为刚性机翼段的面积。)

由于问题是静力学问题, 只有两个基本量值, 可选为力 ( $F$ ) 和长度 ( $L$ )。显然, 上述方程式中的量值的因次为:

$$C^{\theta\theta} \sim F^{-1} L^{-1}, S \sim L^2, e \sim L, q \sim F L^{-2}, C \sim L, \theta, \alpha^{\tau}, \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}, C_{\text{MACC}} \sim \text{无因次量} \dots (31)$$

由这些量值组成的无因次比值为：

$$C^{00} q S c, \frac{c}{c}, \frac{c^2}{S}, \theta, \alpha^r, \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}, C_{MAC} \dots \dots \dots (32)$$

如由口一定理所预测，其数量比因次参数少两个。用无因次参数表示时，上述方程式（8—46）可写成：

$$\theta = \frac{[(\partial C_L / \partial \alpha) (1/c) \alpha^r + C_{MAC}] (C^{00} q S c)}{1 - (\partial C_L / \partial \alpha) (C^{00} q S c) (c/c)} \dots \dots \dots (33)$$

从此无因次方程式可以看到，此半刚性机翼的任何模型顺流方向必须相同的翼型\*，（ $C_{MAC}$  和  $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ ），弹性轴的无因次位置必须相同，必须具有相同的初始攻角（ $\alpha^r$ ）及相同的气动力与弹性力之比（ $C^{00} q S c$ ）。因为参数  $C^2/S$  实际上不包括在方程式（33）中，则在此问题中不需要模拟此量值，两个比例因子可由两个结构限制确定。

现在，由这个比较简单的实例转到细长后掠梯形挠性升力面的空气载荷的分布情况。假设飞机处于对升力面产生一已知稳定加速度的机动飞行中。相应的积分方程式可由原书方程式（8—170）和（8—173）\*\*导出：

$$\theta (cc_1^e) = q \int_0^1 \bar{C}(y, \eta) cc_1^e d\eta + \bar{i}(y) \dots \dots \dots (34)$$

式中：

$$\bar{i}(y) = q \int_0^1 \bar{C}(y, \eta) cc_1^e d\eta + q \int_0^1 C^{00}(y, \eta) c_{MAC} c^2 d\eta - g \int_0^1 [C^{02}(y, \eta) + C^{00}(y, \eta) d(\eta)] m N d\eta \dots \dots \dots (8-171) ***$$

$$\bar{C}(y, \eta) = C^{02}(y, \eta) + c(\eta) C^{00}(y, \eta) \dots \dots \dots (8-172) ***$$

算子  $\alpha$  为攻角分布和升力分布之间的函数关系，其形式决定于所用的气动力理论类型。乘积  $m N g$  代表分布重量和用  $q$  表示的过载因子的乘积， $d(y)$  确定任何截面的重心位置。

为了将分布概念和因次量的概念分开，引入下列定义是有用的。

$$\begin{aligned} C^{02}(y, \eta) &= c_{翼尖}^{02} C^{02}(y, \eta), & c(y) &= c_{翼尖} c_N(y), \\ C^{00}(y, \eta) &= c_{翼尖}^{00} C^{00}(y, \eta), & c(\eta) &= c_{翼尖} c_N(\eta), \\ m(y) &= m_{翼尖} m_N(y), & d(y) &= d_{翼尖} d_N(y), \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

方程式（34）和（35）中出现的参数的因次为：

$$\begin{aligned} c_{翼尖}^{02} &\sim F^{-1} & c_{翼尖}^{00} &\sim F^{-1} L^{-1} \\ q &\sim FL^{-2} & (g m_{翼尖}) &\sim FL^{-1} \\ c &\sim L^{-1} & \left. \begin{aligned} &1, c_{翼尖} \\ &y, \eta \\ &d_{翼尖}, c_{翼尖} \end{aligned} \right\} && \sim L, \dots \dots (36) \end{aligned}$$

\*应该注意到，为了使模型和机翼上的气动反作用力相同，其雷诺数  $\rho U c / \mu$  应相同。对于在空气中的小尺寸模型，这就要求有很大的气流速度，这可能是不实际的。但由于雷诺数的影响常常是次要的，就需将雷诺数限制为不小于某一最小值。

\*\* 原书方程式（8—170）和（8—173）为： $\theta(y) = q \int_0^1 \bar{C}(y, \eta) cc_1^e d\eta + \bar{i}(y) \dots \dots (8-170)$

和  $\theta(y) = q(cc_1^e) \dots \dots \dots (8-173)$ ——译者

\*\*\* 原书第六章方程式。——译者

$$\left. \begin{aligned} c_1^e, c_1^r, c_{mAC}, N, C_N^{\theta z}, c_N, \\ m_N, C_N^{\theta\theta}, e_N, d_N \end{aligned} \right\} \sim \text{无因次量}$$

这些参数可组成下列无因次组

$$\begin{aligned} q c_{翼尖} / C_{翼尖}^{\theta z}, \quad \frac{c_{翼尖} C_{翼尖}^{\theta\theta}}{C_{翼尖}^{\theta z}}, \quad \frac{g m_{翼尖}}{q c_{翼尖}}, \quad \frac{d_{翼尖}}{c_{翼尖}}, \\ \frac{e_{翼尖}}{c_{翼尖}}, \quad \alpha c_{翼尖}, \quad \frac{v}{l}, \quad \frac{\eta}{l}, \quad \frac{c_{翼尖}}{l} \dots \dots \dots (37) \end{aligned}$$

此外还应加上前面已经列出的无因次量值。这样，方程式变成：

$$c_{翼尖} \alpha c_N c_1^e = (q c_{翼尖} / C_{翼尖}^{\theta z}) \int_0^1 \frac{\bar{C}}{C_{翼尖}^{\theta z}} c_N c_1^r d\left(-\frac{\eta}{l}\right) + \bar{f} \dots \dots \dots (38a)$$

式中，

$$\begin{aligned} \bar{f} = (q c_{翼尖} / C_{翼尖}^{\theta z}) \left\{ \int_0^1 \frac{\bar{C}}{C_{翼尖}^{\theta z}} c_N c_1^r d\left(-\frac{\eta}{l}\right) + \left( \frac{c_{翼尖} C_{翼尖}^{\theta\theta}}{C_{翼尖}^{\theta z}} \right) \right. \\ \times \int_0^1 C_N^{\theta\theta} c_{mAC} c_N^2 d\left(-\frac{\eta}{l}\right) - \left( \frac{g m_{翼尖}}{q c_{翼尖}} \right) N \int_0^1 \left[ C_N^{\theta z} \right. \\ \left. + \left( \frac{d_{翼尖}}{c_{翼尖}} \right) \left( \frac{c_{翼尖} C_{翼尖}^{\theta\theta}}{C_{翼尖}^{\theta z}} \right) C_N^{\theta\theta} d_N \right] m_N d\left(-\frac{\eta}{l}\right) \left. \right\} \dots \dots \dots (38b) \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{C}}{C_{翼尖}^{\theta z}} = C_N^{\theta z} = \left( \frac{c_{翼尖}}{C_{翼尖}^{\theta z}} \right) \left( \frac{c_{翼尖} C_{翼尖}^{\theta\theta}}{C_{翼尖}^{\theta z}} \right) C_N^{\theta\theta} e_N \dots \dots \dots (38c)$$

因为N经常以与 $g m_{翼尖} / q c_{翼尖}$ 之乘积形式出现，则在此问题中此两个参数不是互相独立的，而可以组合成一个参数  $N g m_{翼尖} / q c_{翼尖}$ 。

为了寻求全尺寸机翼的载荷分布  $c_N c_1^e$ ，必需制造这样的模型，它具有：

a) 与全尺寸机翼相同的气动力外形，即其平面形状、翼形和初始的“刚性”扭转应相同，以产生相同的气动力中心的分布、力矩系数分布和气动算子  $c_{翼尖} \alpha$ （当然，如M数及雷诺数等参数等也很重要）；

b) 相同的气动力刚度和弹性刚度之比  $q c_{翼尖} / C_{翼尖}^{\theta z}$ ；

c) 相同的弹性刚度分布  $C_N^{\theta z}, C_N^{\theta\theta}, e_N$ ；

d) 相同的惯性力和气动力之比  $N g m_{翼尖} / q c_{翼尖}$ ；

e) 相同的质量分布  $m_N$  和  $d_N$ ；

f) 相同的抗弯刚度和抗扭刚度之比  $c_{翼尖} C_{翼尖}^{\theta\theta} / C_{翼尖}^{\theta z}$ ；

g) 相同的弹性轴及重心位置  $e_{翼尖} / c_{翼尖}, d_{翼尖} / c_{翼尖}$ 。

这样，模型将具有与全尺寸机翼完全相同的载荷分布和弹性变形形状。

力和长度的比例因子仍然由对模型设计的限制确定。因为模型可能是为某一特定风洞设计的，因而它的尺寸，亦即其长度比例即由风洞工作段的尺寸确定。模型的动压力由风洞的能力或由模型的构造型式确定。在任何情况下，由于所有无因次参数都是互相独立的，所以

只能有两个独立限制。

### §6. 顫振模型的相似律

作为顫振模型理論的第一个实例，我們將考虑具有中等展弦比的均匀平直张臂机翼，其特性可用 Theodorsen 的典型截面方程式代表〔方程式 (9-13) — (9-19)〕\*。如果假设在垂直运动和俯仰运动中都为圆周频率为  $\omega$  的簡諧运动，則运动方程式的形式为：

$$-m\omega^2 h_0 + K_h h_0 - S_a \omega^2 \alpha_0 e^{i\phi} + \pi \rho b^2 (iU\omega \alpha_0 e^{i\phi} - \omega^2 h_0 + ba \omega^2 \alpha_0 e^{i\phi}) + 2\pi \rho U b C(k) [U \alpha_0 e^{i\phi} + i\omega h_0 + ib(\frac{1}{2} - a)\omega \alpha_0 e^{i\phi}] = 0 \dots\dots\dots (39a)$$

$$-S_a \omega^2 h_0 - I_a \omega^2 \alpha_0 e^{i\phi} + K_a \alpha_0 e^{i\phi} + \pi \rho b^3 [i(\frac{1}{2} - a)U \omega \alpha_0 e^{i\phi} - \omega^2 b(\frac{1}{2} + a^2) \alpha_0 e^{i\phi} + a \omega^2 h_0] - 2\pi \rho b^2 U (\frac{1}{2} + a) C(k) [U \alpha_0 e^{i\phi} + i\omega h_0 + ib(\frac{1}{2} - a)\omega \alpha_0 e^{i\phi}] = \dots\dots\dots (39b)$$

在两个运动方程式中出現的参数有13个，用基本量值——质量、长度和时间表示时，其因次为：

$$\begin{aligned} h_0, b &\sim L, & K_h &\sim ML^{-1}T^{-2}, & K_a &\sim MLT^{-2}, \\ \omega &\sim T^{-1}, & S_a &\sim M, & \rho &\sim ML^{-3}, \dots\dots\dots (40) \\ m &\sim ML^{-1}, & I_a &\sim ML, & U &\sim LT^{-2}, \\ \alpha_0, \phi, a &\sim \text{无因次量。} \end{aligned}$$

这里沒有折算频率  $k$ ，因为它可以用  $\omega$ 、 $b$  和  $U$  表示。相应的无因次参数組可以写成：

$$\frac{h_0}{b}, \frac{\omega b}{U} (=k), \frac{m}{\rho b^2}, \sqrt{\frac{K_h/m}{K_a/I_a}} (= \frac{\omega h}{\omega_a}), \frac{\omega}{\sqrt{K_a/I_a}} (= \frac{\omega}{\omega_a}), \frac{S_a}{mb} (=x_a), \sqrt{\frac{I_a}{mb^2}} (=r_a), \alpha_0, \phi, a, \dots\dots\dots (41)$$

和  $\Pi$  一定理所預計的一样，其数量为10个。用这些无因次参数表示的方程式(39)可写成：

$$-\frac{h_0}{b} + \left(\frac{\omega h}{\omega_a}\right)^2 \left(\frac{\omega_a}{\omega}\right)^2 \frac{h_0}{b} - x_a \alpha_0 e^{i\phi} + \frac{\pi \rho b^2}{m} \left(\frac{j}{k} \alpha_0 e^{i\phi} - \frac{h_0}{b} + a \alpha_0 e^{i\phi}\right) + \frac{2\pi \rho b^2}{m} \frac{1}{k} C(k) \left[\frac{1}{k} \alpha_0 e^{i\phi} + i \frac{h_0}{b} + i(\frac{1}{2} - a) \alpha_0 e^{i\phi}\right] = 0 \dots\dots\dots (42a)$$

$$-x_a \frac{h_0}{b} - r_a^2 \alpha_0 e^{i\phi} + r_a^2 \left(\frac{\omega \alpha}{\omega}\right)^2 \alpha_0 e^{i\phi} + \frac{\pi \rho b^2}{m} \left[\frac{i}{k} (\frac{1}{2} - a) \alpha_0 e^{i\phi} - (\frac{1}{2} + a^2) \alpha_0 e^{i\phi} + a \frac{h_0}{b}\right] - \frac{2\pi \rho b^2}{m} \frac{1}{k} (\frac{1}{2} + a) C(k) \left[\frac{1}{k} \alpha_0 e^{i\phi} + \dots\dots\dots (42b)$$

\*原方程式(9-13)和(9-19)为： $m\ddot{h} + S_a \ddot{a} + m\omega_n^2 h = Q_n \dots\dots\dots (9-12a)$

$S_a \ddot{h} + I_a \ddot{a} + I_a \omega_x^2 a = Q_a \dots\dots\dots (9-13b)$

$\frac{h_0}{b} \left\{ \frac{m}{\pi \rho b^2} \left(1 - \frac{\omega_a^2}{\omega^2}\right) + L_h \right\} + \bar{\alpha}_0 \left\{ x_a \frac{m}{\pi \rho b^2} + (L_a - L_h(\frac{1}{2} + a)) \right\} = 0 \dots\dots\dots (9-19a)$

$\frac{h_0}{b} \left\{ x_a \frac{m}{\pi \rho b^2} + (\frac{1}{2} - L_h(\frac{1}{2} + a)) \right\} + \bar{\alpha}_0 \left\{ r_a^2 \frac{m}{\pi \rho b^2} \left(1 - \frac{\omega_a^2}{\omega^2}\right) + M_a \right.$

$\left. - (L_a + \frac{1}{2})(\frac{1}{2} + a) + L_h(\frac{1}{2} + a)^2 \right\} = 0 \dots\dots\dots (9-19b)$

$$+ i \frac{h_0}{b} + i \left( \frac{1}{2} - a \right) \alpha_0 e^{i\phi} = 0 \dots\dots\dots (42b)$$

因为方程式对  $h_0/b$  和  $\alpha_0$  为齐次方程式，如果用  $\alpha_0$  除方程式各项组成的参数为振幅比  $h_0/b\alpha_0$ ，则无因次比值的数量可减少到 9 个。当然，在方程式内没有包括空气粘性  $\mu$  的影响，也没有包括音速  $a_\infty$  和比热比  $\gamma$  的影响。如果将这些参数包括在，则原内有变量的数目变成 16，而无因次变量的数目变成 13。附加的变量为  $\rho U b / \mu$ 、M 数、 $U/a_\infty$  和  $\gamma$ 。

现在，机翼运动方程式的形式与基本单位大小无关，而所有具有相同的无因次性质的其他机翼在相同的无因次飞行条件下将给出相同的无因次结果。这样，任一这样的机翼都可以看成原来机翼的颤振模型。

**不可压缩流的情况** 首先我们将研究风洞模型的比较简单的情况，其中假设没有压缩性

(由此，没有 M 数和  $\gamma$ ) 的影响。所寻求为值的量  $\frac{\omega_F b}{U_F}$ ， $\frac{\omega_F}{\omega_\alpha}$ ， $\frac{h_0}{b\alpha_0}$  和  $\phi$ ，其中脚注 F 表示颤振时的值。为了获得这些量值，模型必须具有正确的频率比  $\omega_h/\omega_\alpha$ ，截面重心和弹性轴之间的距离弹性轴的位置  $a$ 、惯性半径  $r_a$ 、相对密度  $m/\rho b^2$ 、外形和雷诺数。

模型设计时的独立限制数不会超过 3 个，因为所有无因次参数均为独立的，而此问题中仅有 3 个基本量值，其比例可以改变。模型和机翼的长度比例因子  $L_m/L_w$  由风洞内容许的模型翼展和真实翼展之比确定。此长度比例因子通过无因次参数  $x_a$ ， $a$ ， $r_a$  确定模型中重心和弹性轴的因次弦向位置，同时还确定模型的惯性半径。在所研究的不可压缩流的试验中，风洞的使用速度范围或模型的构造型式确定了必须发生颤振的空气速度范围的上限。如果（例如）所希望的模型颤振速度在 70 哩/小时附近，而全尺寸机翼的估计颤振速度为 350 哩/小时，则必须的速度比例因子  $U_m/U_w$  为  $1/5$ 。根据此速度比例因子及前面已确定的长度比例因子，可以确定第二基本量值（时间）的比例因子：

$$\frac{T_m}{T_w} = \frac{U_w}{U_m} \cdot \frac{L_m}{L_w} \dots\dots\dots (43)$$

最后一个基本量值（质量）的比例因子一般由风洞内所采用的空气密度决定。这样，由于模型和机翼的相对密度  $m/\rho b^2$  必须相同，则

$$\frac{m_m}{m_w} = \frac{(\rho b^2)_m}{(\rho b^2)_w} = \frac{\rho_m b_m^2}{\rho_w b_w^2} \dots\dots\dots (44)$$

因为  $m$  定义为一机翼展长的机翼质量，则质量比例因子可写成（由方程式(44)）：

$$\frac{M_m}{M_w} = \left( \frac{L_m}{L_w} \right)^3 \frac{\rho_m}{\rho_w} \dots\dots\dots (45)$$

式中长度比例因子和空气密度比为已知。量值  $\rho_m$  为风洞工作的内空气密度，而  $\rho_w$  为机翼飞行高度上的空气密度。

必须着重指出的是，风洞内模型试验时的雷诺数通常较机翼在飞行高度上的雷诺数小很多，而且这种情况很难改变。对模型试验中已经考虑的三个限制——模型尺寸限制、气流速度及空气密度、再加上已知的风洞工作段内的空气粘性，完全确定了模型的雷诺数。幸运的

是，雷諾数的变化对振动空气作用力的影响较小。一般雷諾数大約在 $4 \times 10^5$ 以上时，顫振特性的数值，特别是顫振速度和頻率对雷諾数的改变不太敏感。通常选择試驗条件时应使雷諾数尽可能大，但是很少能接近全尺寸的数值。

当3个基本比例值已确定时，就有可能确定模型的所有因次性质。例如，选择这样的飞机，其重量为10000磅，翼展为50呎和估計顫振速度为500哩/小时。如果在工作段內可以置放大翼展为5呎的模型，則

$$\frac{L_m}{L_w} = \frac{1}{10} \dots\dots\dots(46)$$

如果設計模型时将試驗速度限制在70哩/小时以下，則合适的速度比为

$$\frac{U_m}{U_w} = \frac{1}{8} \dots\dots\dots(47)$$

由方程式(43)将有

$$\frac{T_m}{T_w} = \frac{8}{10} \dots\dots\dots(48)$$

这样，模型的时间比例差不多与飞机相同，相应的自振頻率差不多也相同。如果风洞內空气密度为海平面值，而在全尺寸飞机飞行的高度上

$$\frac{\rho_w}{\rho_m} = 0.5 \dots\dots\dots(49)$$

則方程式(45)便可確定第三个和最后的基本量比例因子：

$$\frac{M_m}{M_w} = \frac{1}{500} \dots\dots\dots(50)$$

这样，模型重量（重力常数不变）等于10000/500，或者20磅。同样

$$\frac{m_m}{m_w} = \frac{M_m}{M_w} \cdot \frac{L_w}{L_m} = \frac{1}{50} \dots\dots\dots(51)$$

$$\frac{I_{\alpha m}}{I_{\alpha w}} = \frac{M_m}{M_w} \cdot \frac{L_m}{L_w} = \frac{1}{5000} \dots\dots\dots(52)$$

为了確定在典型截面处能給出正确的有效 $K_h$ 值的模型抗弯刚度，应記住在此实例中沿翼展方向机翼的性质不变，

$$\frac{(EI)_m}{(EI)_w} = \frac{M_m}{M_w} \left( \frac{L_m}{L_w} \right)^3 \left( \frac{T_w}{T_m} \right)^2 = \frac{1}{320000} \dots\dots(53)$$

如在第4节中所指出，沒有包括在运动方程式內的其他性质，应按包括在方程式內的性质計算，而不直接用比例因子計算。

当已知模型的顫振試驗結果时，則方程式(47)和(48)可用来計算全尺寸顫振速度和頻率的因次量。

可压缩流的情况 如果不能假設流体为不可压缩的，亦即不能假設音速和机翼附近的气流速度比較为很大时，則必須考虑另外两个参数： $M$ 数和 $\gamma$ 。为了制造高速升力面的真实模型，



这些无因次量值和不可压缩流中的所有无因次量值，在模型試驗中和全尺寸飞行中必須具有同样的值。为了使两种情况下  $\gamma$  值相同，模型試驗必須在一般的空气中进行，而不是在其它气体（例如氟氦烷—12）中进行。然而，如果仅希望将顛振試驗点和理論計算的結果进行比较，則沒有理由說不能在這些气体（如氟氦烷—12）中进行試驗。两种气体中  $\gamma$  改变的影响将是次要的。这可以用不考虑  $\gamma$  的綫性化超音速空气定气流中的空气作用力来说明。

和在不可压缩流中的情况一样，对模型的独立限制不会多于 3 个，因为所有无因次参数都是独立的，而仅有三个比例因子  $M$ 、 $L$ 、 $T$  需要确定。同样，模型尺寸是明显地受所用試驗設备的限制，無論試驗方法中采用的是火箭、自由墜落或是风洞。这样，长度比例因子可以很快地确定，至少可以确定在某一很小的范围。第二个严格的限制为希望达到的  $M$  数范围，由此范围一般也确定了模型的飞行速度和空气密度。

在火箭試驗或自由墜落試驗中，飞行速度直接与  $M$  数的关系为飞行高度的函数（或者，更正确地講，为温度的函数，而温度本身又为高度的函数）。这样，在任何高度上，一給定的所希望的  $M$  数可确定模型的速度，而按此速度和前而已确定的长度比例因子，可找出時間比例因子。高度的选择可以确定空气密度，同时也确定质量比例因子，因为无因次参数  $m/\rho b^2$  必須保持不变（方程式 45）。

在风洞試驗中，风洞的設計特性一般可确定相应于希望的数值的空气速度和密度。此关系对每一风洞有显著的不同。例如，对吹气暫冲式风洞，工作段的空气密度比吸气式暫冲式风洞高，因为其驻点压力要高很多。工作段的音速，同时对一給定  $M$  数时的速度为驻点温度或稳定温度的函数，当然，此温度对不同的风洞也不相同。

在可压缩流的情况中，通常不可能获得全尺寸的雷諾数，而不幸的是，对于非稳定可压缩流可进行試驗的雷諾数范围尚不清楚。

### § 7. 自由顛振模型

作为顛振模型理論的第二个实例，我們考虑用完整飞机的顛振模型模拟自由直綫水平飞行的较困难的情况。当顛振形态包括了显著的“刚体自由度”，当顛振和刚性飞机的稳定性频率很相近的时候，这种缺乏对“刚体自由度”的約束的情况在很多情况下是需要的。

一架在俯仰、橫滾和垂直平移方向不受約束的飞机的运动方程在原書第 3 章內导出，它是由主形态表示的。如果座标軸的方向与飞机的主軸方向重合，則这些方程式可以推广到包括所有 6 个刚体自由度和振动主形态的情况。这样，在更一般的情况中，原書的方程式 (3—204)\* 成为：

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{\xi}_1 &= \Xi_1, \\ \vdots \\ M_6 \ddot{\xi}_6 &= \Xi_6, \\ M_7 \ddot{\xi}_7 + M_7 \omega_7^2 \xi_7 &= \Xi_7, \\ \vdots \\ M_\infty \ddot{\xi}_\infty + M_\infty \omega_\infty^2 \xi_\infty &= \Xi_\infty, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

式中  $\xi_1 \dots \xi_6$  为刚体形态的扰动振幅； $M_1 \dots M_6$  为飞机的总质量和主慣性矩，而主变形态  $\phi$  和频率  $\omega$  为原書方程式 (3—172)\*\* 的解。

\* 原書第三章的方程式 (3—204) 为： $M_1 \ddot{\xi}_1 = \Xi_1, M_2 \ddot{\xi}_2 = \Xi_2, M_3 \ddot{\xi}_3 = \Xi_3,$

$M_4 \ddot{\xi}_4 + M_4 \omega_4^2 \xi_4 = \Xi_4, (i=4, 5, \dots, \infty)$ ——譯者

\*\* 原書第三章的方程式 (3—172) 为： $\int_{\sigma} \int_{\sigma} G(x, y, \xi, \eta) w(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta = w(x, y)$ ——譯者