样条函数：基本理论

（二册）

Larry L.Schumaker 著

赵根榕 等 译

西北大学数学系计算数学教研室

一九八二年一月

第三章

多项式

多年来，多项式空间 P_m 在逼近论和数值分析中起着重要的作用。在1.2节里，我们列出许多 P_m 的性质，这些性质有利于此空间的应用。这一章中，我们将更详细地发展这些性质中的某一些。我们只钻研一元多项式——关于多元的，见第13.3节。我们的目的不是对多项式作广泛的论述，而是提供背景材料并说明后面要用到的许多技巧。

3.1. 基本性质

整个这一章，我们的兴趣都在实系数 m 阶实值多项式空间

$$P_m=\{p(x)=\sum_{i=1}^{m} c_i x^{i-1},$$

$$c_1,\cdots\cdots,c_m,\ x \text{是实的}\}. \quad (3.1)$$

我们由证明，P_m 是具有方便基底的有限维线性空间开始。

定理 3.1. P_m 是 $C^\infty(R)$ 的线性子空间。进而，给定任意实数 a，函数 $1, x-a, \cdots\cdots, (x-a)^{m-1}$ 形成 P_m 的一个基底。

证明。从定义显然，每一个 $p \in P_m$ 在 R 上是无限可微的。因为对所有的 $p, \varphi \in P_m$ 和 $\alpha, \beta \in R$，$\alpha p+\beta\varphi \in P_m$，所以得到 P_m 是 $C^\infty(R)$ 的线性子空间。由于函数 $1, \cdots\cdots, (x-a)^{m-1}$ 中的每一个显然在 P_m 中，故要证它们形成基底，我们只需证明它们是线性无关的。假设 $p(x)=\sum_{i=1}^{m} c_i(x-a)^{i-1}\equiv 0$，则对任意的 b，p 在 b 的所有导数都是零，即

必

$$
\begin{pmatrix} p(b) \\ Dp(b) \\ \vdots \\ D^{m-1}p(b) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & b-a & (b-a)^2 & \cdots\cdots & (b-a)^{m-1} \\
0 & 1 & 2(b-a) & \cdots\cdots & (m-1)(b-a)^{m-2} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & (m-1)!
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

这是齐次m阶方程组，它显然是非奇的，因而$C_1 = C_2 = \cdots\cdots = C_m = 0$。 □

定理3.1的实际意义是一经选好P_m的基底，每一个多项式就都将有对应于它的一组唯一的系数。这就形式地建立了事实：多项式能够贮存在数字计算机内。下面周知的算法指出，多项式容易求值，而P_m满足计算机适用性的两个性质（1.4）和（1.5）。

算法3.2　计算$p(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i(x-a)^{i-1}$的Horner格式。

1、$u \leftarrow x-a$；

2、$p \leftarrow C_m$；

3、For $i \leftarrow m-1$ step -1 until 1 do

$$p \leftarrow u * p + c_i$$

讨论．p的最后值是$p(x)$这一事实来自$p(x)$能写成套的形式：

$$p(x)=c_1+u\{c_2+u[c_3+\cdots\cdots+u(c_m)]\cdots\cdots\}.$$

显然这个标法正好需要$m-1$次乘法，m次加法和／或减法． □

从定义可得到，多项式的导数和不定积分仍是多项式．特别是，若

$p(x)=\sum_{i=1}^{m} c_i(x-a)^{i-1}$，则

$$Dp(x)=\sum_{i=1}^{m-1} i\,c_{i+1}(x-a)^{i-1}$$

而

$$D_a^{-1}p(x)=\int_a^x p(t)dt=\sum_{i=2}^{m+1}\frac{c_{i-1}}{(i-1)}(x-a)^{i-1}.$$

Dp和$D_a^{-1}p$的系数从p的系数容易标得．我们一经有了系数，就能用Horner格式，求出Dp与$D_a^{-1}p$在任意给定的x上的值．p的导数也能够直接用综合除法计标——见注3．1．

叙述两个重要的Марков不等式，以结束本节．

定理3．3　设$q \in \mathbb{P}_m$，则

$$\|Dq\|_{L_\infty[a,b]} \le \frac{2(m+1)^2}{(b-a)}\|q\|_{L_\infty[a,b]} \qquad (3.2)$$

进而，对所有的$1 \le p \le q \le \infty$，

$$\|q\|_{L_q[a,b]} \le$$

$$\le \left[\frac{2(p+1)}{(b-a)}(m+1)^2\right]^{1/p-1/q}\|q\|_{L_p[a,b]}$$

(3·3)

讨论·见Timan〔1963〕第218和236页·

3·2　零点和行列式

空间P_m的最重要的性质之一是下面的P_m中非凡多项式所能够具有的零点的个数的界·

定理3·4　给定p，设$Z^*(p)$表示p在实线上的零点个数·象（2·61）那样计标重数·则

$$Z^*(p) \le m-1 \quad\cdot\qquad \text{对所有的非凡 } p \in P_m \tag{3·4}$$

证明·对$m=1$结果是明显的·因为非零常数从来不会变成零·我们现在用归纳法进行·假设断言对$m-1$成立·若$p \in P_m$且$Z^*(p) \ge m$·则根据Rolle定理2·19，多项式$Dp \in P_{m-1}$至少有$m-1$个零点·根据归纳法的假设·只当Dp恒等于零·这才有可能·但这时p是常数·而且由于它至少在一个点上为零·所以它自身一定是零。 □

我们现在能建立P_m是ET空间·

定理3·5　函数组$u_1=1$，$u_2(x)=x$，……，$u_m(x)=x^{m-1}$形成R上的ET组·换句话说，Vandermonde行列式

$$V(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_m)=D\begin{pmatrix} t_1, \ldots\ldots, t_m \\ \\ \end{pmatrix}$$

对所有的 $t_1 \le t_2 \le \cdots\cdots \le t_m$ 是正的。

证明。根据定理 2.33，$\{u_1, \cdots\cdots, u_m\}$ 或 $\{u_1, \cdots\cdots, u_{m-1}, \hat{i} - u_m\}$ 一定形成 ET 组。即 $V(t_1, \cdots\cdots, t_m)$ 一定有一个严格符号。因此，要完成证明，只须证明 V 实际上对 t 的某一选择是正的。但经检验，

$$V(0, 0, \cdots\cdots, 0) = \prod_{i=1}^{m-1} i! > 0. \quad \square$$

Vandermonde 行列式的正性，还有其他几个证法。事实上，它们的值的显式公式能推导出来（参照（2.66）—（2.67））。

定理 3.5 一个直接推理是这样的事实：Hermite 内插问题 2.7 能用多项式来解。特别地，我们有下面的

定理 3.6 Hermite 内插。设 $\tau_1 < \tau_2 < \cdots\cdots < \tau_d$，正整数 $l_1, l_2, \cdots\cdots, l_d$ 具有 $\sum_{i=1}^{d} l_i = m$。则对任意给定的实数数集 $\{z_{ij}\}_{j=1, i=1}^{l_i \quad d}$，存在着唯一的 $p \in P_m$ 使

$$D^{j-1} p(\tau_i) = z_{ij}, \qquad j = 1, 2, \cdots\cdots, l_i$$
$$i = 1, 2, \cdots\cdots, d.$$

证明。如写 $p(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x^{i-1}$，则所求系数能由线性组 $MC = \hat{z}$ 求得，它的行列式是 $V(t_1, \cdots\cdots, t_m)$ 其中

$$t_1 \le \cdots\cdots \le t_m = \overbrace{\tau_1, \cdots\cdots, \tau_1}^{l_1}, \cdots\cdots,$$

$$\overbrace{\tau_d,\ldots\ldots,\tau_d}^{l_d}$$

（参照问题2·7的讨论）。关于数值求解p的其它方法，见古典的数值分析书籍。用均差可以给出f和p的差的精确表达式。我们有

$$[t_1,\ldots\ldots,t_m,x]f=\frac{D\begin{pmatrix}t_1,\ldots\ldots,t_m,x\\ 1,\ldots\ldots,t^{m-1},f\end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix}t_1,\ldots\ldots,t_m,x\\ 1,\ldots\ldots,t^{m}\end{pmatrix}}$$

展开分子和分母，有

$$f(x)-p(x)=(x-t_1)\cdots\cdots(x-t_m)[t_1,\ldots\ldots,t_m,x]f \tag{3·5}$$

□

在定理3·5中，我们曾经证明函数$u_1=1,\ldots\ldots,u_m=x^{m-1}$形成R上的ET系。由于对所有的$m$这都是成立的，故实际上证明了它们形成了ECT组。下面的定理指出，如果限制在区间$(0,\infty)$上，则这组函数形成OCET组：

定理3·7　设$u_i=x^{i-1}$，$i=1,2,\ldots\ldots,m$，则对所有的$1\le p\le m$，

$$D\begin{pmatrix}t_1,\ldots\ldots,t_p\\ u_{i_1},\ldots\ldots,u_{i_p}\end{pmatrix}>0$$

$$0<t_1\le t_2\le\cdots\cdots\le t_p \tag{3·6}$$

对所有的

$$1\le i_1<i_2<\cdots\cdots<i_p\le m$$

证明。设G是整数列 $t_1,\cdots\cdots,t_p$ 中空缺的个数。对G和 p 用归纳法。若 $G=0$，则经视察有

$$D\begin{pmatrix} 0,\cdots\cdots,0 \\ \\ u_1,\cdots\cdots,u_i \end{pmatrix}=\prod_{j=1}^{i-1} j! \text{。} \qquad (3.7)$$

但这时对所有的 $1<i<i+p<m$ 和所有的 $0<t_1\le t_2\le\cdots\cdots\le t_p$。

$$D\begin{pmatrix} t_1,\cdots\cdots,t_p \\ \\ u_{i+1},\cdots\cdots,u_{i+p} \end{pmatrix}=$$

$$=D\begin{pmatrix} 0,\cdots\cdots,0 \\ \\ u_1,\cdots\cdots,u_i \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} t_1,\cdots\cdots,t_p \\ \\ u_{i+1},\cdots\cdots,u_{i+p} \end{pmatrix} \Big/ \prod_{j=1}^{i-1} j!$$

$$=D\begin{pmatrix} 0,\cdots\cdots,0,t_1,\cdots\cdots,t_p \\ \\ u_1,\cdots\cdots,u_i,u_{i+1},\cdots\cdots,u_{i+p} \end{pmatrix} \Big/ \prod_{j=1}^{i-1} j!$$

$$=V(0,\cdots\cdots,0,t_1,\cdots\cdots,t_p) \Big/ \prod_{j=1}^{i-1} j! > 0$$

这就证明了对 $G=0$ 和所有的 p 结果成立。

现假定（3.6）对 $p-1$ 和最多有 $G-1$ 个空缺的 t 已经建立。考虑具有G个空缺的 t 的序列。临时证明的剩下部分中我们将（3.6）式中的行列式D的记号缩写为 $D\begin{pmatrix} 1,\cdots\cdots,p \\ t_1,\cdots\cdots,t_p \end{pmatrix}$。于是根据行列式的基本等式（见注3.2

$$D\begin{pmatrix}1,\cdots\cdots,p-1\\ \\ t_2,\cdots\cdots,t_{p-1},v\end{pmatrix}D\begin{pmatrix}1,\cdots\cdots,p\\ \\ t_2,\cdots\cdots,t_{p-1},v\end{pmatrix}$$

$$=D\begin{pmatrix}1,\cdots\cdots,p-1\\ \\ t_2,\cdots\cdots,t_p\end{pmatrix}D\begin{pmatrix}1,\cdots\cdots,p\\ \\ t_1,\cdots\cdots,t_{p-1},v\end{pmatrix}$$

$$-D\begin{pmatrix}1,\cdots\cdots,p-1\\ \\ t_1,\cdots\cdots,t_{p-1}\end{pmatrix}\qquad D\begin{pmatrix}1,\cdots\cdots,p\\ \\ t_2,\cdots\cdots,t_p,v\end{pmatrix}$$

这里v是集$\{1,2,\cdots\cdots,m\}$ $\{t_1,\cdots\cdots,t_p\}$中的任意整数。(3.7)中的行列式是左端的第二个。其它每个行列式或者是$p-1$阶的，或者是由至多有$q-1$个空缺的t的序列形成的，因而都是非零的。我们有结论：D也是非零的。

为了决定$D\begin{pmatrix}1,\cdots\cdots,p\\ \\ t_1,\cdots\cdots,t_p\end{pmatrix}$的符号，假设$v$在整数$t_j$和$t_{j+1}$之间。然后，考虑将$t_2,\cdots\cdots,t_{p-1},v$变成自然顺序所需要的交换次数，我们就看出：左端的第一个行列式有符号$(-1)^{p-j-1}$。类似的考虑证明：右端的第二个行列式有相同的符号。但最后的行列式有相反的符号。由于右端第一个和第二个行列式是正的，故对于有q个空缺的序列推出(3.7)。 □

如允许t取非正值，则定理3.7不成立。例如，行列式

$D\binom{t}{x_1}=t$能够是负零或正，依t而定。

3.3 变缩性质

在这一节里，我们对多项式的形状如何跟它的系数集的符号结构

生关系作一些观察，这种现象的最简单表示形式是明显事实：所有系数都为正的多项式在 $(0,\infty)$ 上处处为正的。我们的第一个定理就是这个观察的推广。

<u>定理3.8</u>. <u>Descartes符号规则</u>. 设 $Z^*_{(0,\infty)}$ 是 $(0,\infty)$ 上具有重数的零点个数，且 S^- 是强变号数〔见(2.45)〕。则对所有不全为零的 $c_1, \ldots\ldots, c_m$,

$$Z^*_{(0,\infty)}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i t^{i-1}\right) \le S^-(c_1, c_2, \ldots\ldots, c_m) \tag{3.8}$$

<u>证明</u>. 因由定理3.7，$1, x, \ldots\ldots, x^{m-1}$ 形成 $(0,\infty)$ 上的OCWT组，故断言(3.8)立即可从定理2.34得到。 $\square$

定理3.8给出多项式在区间 $(0,\infty)$ 上所能有的零点的个数的界。下面的结果谈的是任意区间 (a,b) 的情形。

<u>定理3.9</u>. <u>Budan-Fourier</u>. 设 p 是 P_m 里的一个非凡多项式。则

$$\begin{aligned} Z^*_{(a,b)}(p) \le\; & S^-[p(a), Dp(a), \ldots\ldots, D^{m-1}p(a)] \\ & - S^-[p(b), Dp(b), \ldots\ldots, D^{m-1}p(b)] \end{aligned} \tag{3.9}$$

如果我们假设 p 是<u>恰当阶的</u>（即它的 $m-1$ 阶导数是非零常数），则能够把这叙述成稍强的形式：

$$\begin{aligned} Z^*_{(a,b)}(p) \le\; & m-1-S^+[p(a), -Dp(a), \ldots\ldots, \\ & (-1)^{m-1}D^{m-1}p(a)] \\ & - S^+[p(b), Dp(b), \ldots\ldots, D^{m-1}p(b)] \end{aligned} \tag{3.10}$$

证明。我们先证明较强的形式。$m=1$ 是平凡的。现对 m 进行归纳。假设 $m>1$，而且（3.9）已对 $m-1$ 阶多项式成立了。临时引进记号

$$A_j=S^+\left((-1)^j D^j p(a), \ldots\ldots, (-1)^{m-1} D^{m-1} p(a)\right),$$

$$B_j=S^+\left(D^j p(b), \ldots\ldots, D^{m-1} p(b)\right).$$

对 $j=0, 1, \ldots\ldots, m-1$。设 $\alpha=A_0-A_1$ 且 $\beta=B_0-B_1$。

显然，α 和 β 只能取值 0 或 1。我们主张：如 a 是 p 的左 Rolle 点（参照定义 2.18），则 $\alpha=1$ 是仅有可能的。如果 $p(a)=0$，则 a 自然是 Rolle 点。假定 $p(a)>0$，则 A_0 一定有式样

$$(+1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{\gamma}, (-1)^{\gamma+1}, \ldots\ldots)$$

对某 $0\leq\gamma$。

这意涵着 $D^{\gamma+1}p(a)>0$。因而

$$Dp(t)=\int_a^t \cdots\cdots \int_a^{\varepsilon_{\gamma-1}} D^{\gamma+1}p>0,$$

d

对 $a<t<a+\varepsilon$。

如果 $\varepsilon>0$ 充分小。这就证明在这种情况下 a 是左 Rolle 点。如果 $p(a)<0$，则证明是类似的。可以给出同样议论以证明：仅当 b 是 p 的右 Rolle 点时，$\beta=1$ 才是可能的。

我们现在主张

$$Z^*(p)\leq Z^*(Dp)+1-\alpha-\beta. \qquad (3.11)$$

为证此，考虑两种情况。

1．$Z^*(p)=0$．这时（3.11）确实成立，否则，α和β两个都为1．但若它们两个都为1，则根据扩充Rolle定理2.15，Dp在Rolle点a和b之间有一个零点．

2．$Z^*(p)>0$．假设p有零点$Z_1\le Z_2\le\cdots\le Z_k$，这时$Dp$至少在$(Z_1,Z_k)$中有$k-1$个零点．此外，若$\alpha=1$，则$Dp$在$(a,Z_1)$中有零点，但若$\beta=1$，则$Dp$在$(Z_k,b)$上有另外一个零点．因此，对$\alpha$和$\beta$的值的任何组合，（3.11）都成立．

现将（3.11）和归纳法的假设结合起来，求得

$$Z^*(p)\le Z^*(Dp)+1-\alpha-\beta\le m-2+1-\alpha-\beta-A_1-B_1$$
$$\le m-1-A_0-B_0．$$

这是（3.10）．用强变号表示的界（3.9）从恒等式（2.18）得到．　□

下面的例子指出，定理3.9第二部分中，p是恰当阶的这一假设是不能免除掉的．

<u>例3.10</u>　设$p=t$．

<u>讨论</u>．如果我们认为p是$m=3$阶的多项式，则（3.10）断言

$$Z^*_{(-1,1)}(p)\le 2-S^+(-1,-1,0)-$$
$$-S^+(+1,+1,0)=0．$$

自然，由于p在0有零点，这是不正确的．　□

Budan-Fourier定理能用以给出多项式的Descartes符号规则的简短证明．的确，假设我们在（3.9）中选择$a=0$，而b非常大．这时因$C_i=D^{i-1}p(0)/(i-1)!$，$i=1,2,\cdots\cdots,m$，故

$$S^-[p(0),Dp(0),\cdots\cdots,D^{m-1}p(0)]=S^-(C_1,\cdots\cdots,C_m),$$

另一方面，若b充分大，则$p(b)$，$Dp(b)$，……，$D^{m-1}p(b)$具有相同符号，而（3.9）中的第二项为零。因此，（3.9）化为Descartes符号规则的陈述（3.8）。

3.4 多项式的逼近威力

在这一节里，我们证实我们的主张：多项式能良好地逼近光滑函数。在这方面有非常广泛的材料，这里仅介绍了少数的核心结果。我们由这个领域中的原始结果之一来开头，它证明于1885年。

定理3.11．Weierstrass逼近定理．设$\varepsilon>0$，则对任意的$f\in C[a,b]$，存在多项式p（依赖f和ε），使得

$$\|f-p\|_\infty<\varepsilon.$$

讨论．我们将在下面的定理3.13中证明之．关于定理的直接证明，见逼近论的任何一本书．□

Weierstrass定理指出，闭区间上的每一个连续函数能够由多项式一致逼近，并达到任意预定的精确度。然而，应强调，定理并没有涉及多项式的阶。的确，若函数f是相当广泛的，则一般取次数非常高的多项式才能良好地逼近它。将函数的光滑性跟它能如何好地用已知阶的多项式加以逼近的问题，曾经作了大量的深入工作。特别有兴趣的是，当多项式的阶增大时，误差趋近零的速度。下面的定理用函数的光滑模给出了这种联系的精确信息。

定理3.12．Jackson定理．设$1\le p<\infty$且$1\le\sigma\le m$，则有常数C_1（仅依赖p和$[a,b]$），使得对每个$f\in L_p[a,b]$，都存在多项式$p_f\in P_m$，且有

$$\|f-p_f\|_p\le C_1\,\omega_\sigma\left(f;\frac{(b-a)}{2m}\right)_p. \qquad (3.12)$$

若$f\in C[a,b]$，对$p=\infty$，结果同样成立。

证明。我们只对$1\le p<\infty$证明结果，因为$p=\infty$的情况是类似的。我们首先假设$I=[a,b]=[-1,1]$一般的结果以后将用变量变换来求。我们将构造和f显式相联系的多项式p_f作为走向构造的第一步，设T是将$f\in\tau_p^\sigma[I]$延拓到$\tau_p^\sigma[-4,4]$的算子。根据定理2.7，T有性质

$$W_\sigma(Tf;t)_{\tau_p[-4,4]}\le C_q W_\sigma(f;t)_{\tau_p[-1,1]}.$$

用Legendre多项式，能构造多项式$V_m\in P_m$其中$V_m(x)>0$且

$$\int_{-1/\sigma}^{1/\sigma} V_m(t)dt=1. \tag{3.13}$$

$$\int_{-3}^{3} |t|^\sigma V_m(t)dt\le C_8 m^{-\sigma} \tag{3.14}$$

其中C_8只依赖σ。我们将这个构造概述于注3.3。

借助于多项式V_m，我们现在定义将$\tau_p[I]$映入P_m的线性算子τ_m以

$$\tau_m f(x)=\int_{-2}^{2} Tf(y)\psi_m(y-x)dy.$$

这里

$$\psi_m(u)=-\sum_{k=1}^{\sigma}(-1)^k\binom{\sigma}{k}k^{-1}V_m\left(\frac{u}{k}\right).$$

我们的第一个目的是建立 $\|f-T_m f\|_p$ 的界。对所有的 $1\le k\le\sigma$ 和 $-1\le x\le 1$，有

$$\frac{(-2-x)}{k}\le\frac{-1}{\sigma}\le\frac{1}{\sigma}\le\frac{(2-x)}{k}$$

因而，我们所写

$$\int_{-2}^{2} Tf(y)\,\frac{V_m\left[\frac{(y-x)}{k}\right]dy}{k}=$$

$$=\int_{(-2-x)/k}^{(2-x)/k} Tf(x+ky)V_m(y)\,dy$$

$$=\int_{-1/\sigma}^{1/\sigma} Tf(x+ky)V_m(y)\,dy+R_k(x)$$

这里

$$R_k(x)=\int_{J_{x,k}} Tf(x+ky)V_m(y)\,dy$$

且

$$J_{x,k}=\left[\frac{(-2-x)}{k},\frac{(2-x)}{k}\right]\setminus\left[-\frac{1}{\sigma},\frac{1}{\sigma}\right]。$$

随之得到

$$\tau_m f(x)=\int_{-1/\sigma}^{1/\sigma}[f(x)+(-1)^{\sigma+1}\Delta_y^{\sigma}Tf(x)]V_m(y)dy$$

$$+\sum_{k=1}^{\sigma}(-1)^{k+1}\binom{\sigma}{k}R_k(x) \qquad (3.15)$$

设$\tau_m^{(1)}f$和$\tau_m^{(2)}f$分别是这个等式的第一和第二项。

我们讨论第二项。设

$$J=\{y:\frac{1}{\sigma}\le |y| \le 3\}\subseteq[-3,3]。$$

由于对所有的$y\in J$，$\sigma|y|\ge 1$，故利用(3.14)和Minkowski不等式(见注2.2)，我们得到

$$\|R_k\|_{\tau_p(I)}=\left\|\int_{J_{x,k}}Tf(x+ky)V_m(y)dy\right\|_{\tau_p(I)}$$

$$\le \|Tf\|_{\tau_p(-4,4)}\int_J V_m(y)dy \le$$

$\|T\|\le 1$

$$\le \|T\|\,\|f\|_{\tau_p(I)}\int_{-3}^{3}(\sigma|y|)^{\sigma}V_m(y)dy$$

$$\le \|T\|\sigma^{\sigma}C_s m^{-\sigma}\|f\|_{\tau_p(I)}。$$

C_f

这就证明了

$$\|\tau^{(2)}f\|_{\tau_p(I)}\le 2^{\sigma}C_s m^{-\sigma}\|f\|_{\tau_p(I)} \qquad (3.16)$$

我们现转来讨论（3·15）中的第一项。暂时假设 $f\in T_p^{\sigma}(I)$。则根据定理 2·7，

$$\|D^{\sigma}Tf\|_{T_p(-2,2)} \le$$

$$\|D^{\sigma}Tf\|_{T_p(-4,4)} \le$$

$$C'\|D^{\sigma}Tf\|_{T_p(I)} .$$

由（3·13），

$$f(x)=\int_{-1/\sigma}^{1/\sigma} f(y)V_m(y)\,dy$$

并利用（2·109）估计 σ 阶间距差分，我们得到

$$\|f-\tau_m^{(1)}\|_{T_p(I)} \le$$

$$\int_{-1/\sigma}^{1/\sigma}\|\Delta_y^{\sigma}Tf\|_{T_p(I)}\,V_m(y)\,dy$$

$$\le \|D^{\sigma}Tf\|_{T_p(-2,2)}\int_{-3}^{3}|y|^{\sigma}V_m(y)\,dy$$

$$\le C_6 m^{-\sigma}\|D^{\sigma}f\|_{T_p(I)} \qquad (3·17)$$

联合估计式（3·16）和（3·17），有

$$\|f-\tau_m\bar{f}\|_{T_p(I)} \le$$