SHU DE ZHENGCHUXING

·敏 泉·

数的整除性

科学普及出版社

数的整除性

敏 泉

科学普及出版社

内 容 提 要

本书运用初等数论的一些基本概念和定理，讲述了怎样分析解答数论中一些有难度的问题。书中选取了大量的例题和习题，很多采自一些著名的数学竞赛试题，新颖而有代表性。全部习题都附有适当的提示和解答。对中学师生和数学爱好者，这是一本深浅适中的辅导读物。

数 的 整 除 性

敏 泉

责任编辑：吴之静

封面设计：窦桂芳

*

科学普及出版社出版（北京白石桥紫竹院公园内）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

中国科学院印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/32　印张：3 1/2　字数：78 千字

1981年 10 月第 1 版　1981 年 10 月第 1 次印刷

印数：1—41,500 册　定价：0.32 元

统一书号：13051・1164　本社书号：0194

写在前面

下列诸数

$$\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$$

统称为整数。这种数虽然看起来很简单，但却有着极其有趣而深刻的性质。在数学中有一门叫做"整数论"(或"数论")的分支专门研究它。这是一门历史悠久而至今还富有生命力的学科。早在公元前50年左右，在我国第一部数学名著《九章算术》的第一章中就开始讨论整数，介绍了辗转相除法；它与公元前三世纪欧几里得所著《几何原本》中介绍的辗转相除法是各自独立地总结出来的。五世纪时，在我国的《孙子算经》中更有闻名于世的中国剩余定理(即孙子定理)，也对整数做了研究。

由于整数比较具体，所以在学习现代数学时，它能提供朴素的背景。因此，对于爱好数学的青少年来说，能多了解一些整数的性质很有必要。此外，不少数论题目，其结论虽然十分明显，但论证却颇需技巧，因而也是培养、训练数学爱好者掌握逻辑推理与灵活思维的一个有效途径。这也许就是多年来在各国的数学竞赛中，初等数论的题目始终不衰的原因吧！

在这本小册子里，我们在中学数学的基础上，扼要地介绍了一些有关整数的简单的性质，并力图较系统地讲述数的整除性及其解题思路和方法。所选的习题有些是各国数学竞赛中的问题；我们还把某些性质和问题放在练习题中，读者如能动手做一做，必将大有收益。

目　　录

1. 初谈整除

读者在算术里早已知道两数相除的概念，以及除数和被除数的名称。所谓整除就是一个整数被另一个整数除尽，并且商也是整数。通常泛泛而说的整除性，其实还包含着两种涵义：一方面，研究两数作除法时的全面情况；另一方面，研究两数能否整除，以及探讨由此而引伸出来的有关问题。我们将会看到，这两方面是密切联系着的。

本书的内容，仅限于讨论整数的整除性问题。先从除法说起。

一个整数 b 除以整数 $a(>0)$，当然不一定恰好除尽，一般得一个商 q 和一个余数 r，亦即

$$b=aq+r。\tag{1}$$

按算术知识，可假设余数是非负的，且满足 $0\leqslant r<a$。式(1)称为余数公式，对其运算过程也叫带余除法。

例如：-74 被 15 除，78 被 5 除，可分别写出

$$-74=15\times(-5)+1,\ 78=5\times15+3。$$

定义 若整数 b 被整数 $a(>0)$ 除时，(1)式中余数 $r=0$，即有整数 q，使得

$$b=aq,\tag{2}$$

就说 b 能被 a 整除，简记作 $a|b$。此时，也说 a 能整除 b，或 a 整除 b。同时，称 a 为 b 的因数，b 为 a 的倍数。

在本书中，如无特殊声明，$a,b,c,\cdots$ 等均表示整数。

性质1 若 $a|b$，$b|c$，那么 $a|c$。

证 由假设可知，有整数 m，n，使得 $b=am$，$c=bn$。

故 $c = bn = amn$，mn 仍是整数，即得 $a|c$。

性质 2 若 $a|b$，$a|c$，那么对任何整数 k, l，有

$$a|(kb + lc)。$$

证 由假设可知，有整数 m，n，使得 $b = am$，$c = an$，故 $kb + lc = k(am) + l(an) = a(km + ln)$，$km + ln$ 是整数，即得 $a|(kb + lc)$。

【例 1】 整数 b 被 $a(>0)$ 除时，证明满足 $0 \leqslant r < a$ 的表示式(1)是唯一的。

证 设

$$b = aq + r,\ 0 \leqslant r < a,$$

如还有

$$b = aq' + r',\ 0 \leqslant r' < a。$$

将此两式相减得

$$0 = a(q - q') + r - r'。$$

由此 $a|(r - r')$，但 $0 \leqslant |r - r'| < a$，故得 $r - r' = 0$，即 $r = r'$，又 $a \neq 0$，$\therefore q = q'$。得证表示式(1)是唯一的。

【例 2】 设 a、b 都不是 3 的倍数，试证 $a + b$ 及 $a - b$ 有且仅有一个是 3 的倍数。

证 由假设可知，a 可写成 $3q_1 + 1$ 或 $3q_1 + 2$，同样，b 可写成 $3q_2 + 1$ 或 $3q_2 + 2$，这里的 q 都是整数。若 a、b 除以 3 后余数相同，那么 $a - b = 3(q_1 - q_2)$；若余数不同，那么 $a + b = 3(q_1 + q_2 + 1)$。由 q 的整值性和余数的唯一性，证明所说的结论正确。

习　题　1

下列字母均表示整数：

1. 若 $a|b$，试证 $a|bc$。

2. 设 $a|b$，试证 $ak|bk$。

3. 设 $a|b$ 且 $c|d$，试证 $ac|bd$。

4. 若 $a+b+\cdots+d=g+h+\cdots+j$，$n$ 能整除 $b,c,\cdots,d,g,h,\cdots,j$，则 n 也能整除 a。

5. 若 $(m-p)|(mn+pq)$，那么 $(m-p)|(mq+np)$。

6. 对任两整数 a,b，试证 $a+b$、$a-b$、ab 三者之中至少有一个是 3 的倍数。

2. 奇　与　偶

奇数与偶数也是大家熟悉的概念。 用整除的术语来说，能被 2 整除的整数 N 叫作偶数，不能被 2 整除的整数 N' 叫作奇数。由整除的定义可知，偶数 N 都可以表示成 $N = 2n$ 形状，奇数 N' 都可以表示成 $N' = 2n + 1$ 形状。下列诸性质是明显的:

性质 3

奇数与奇数的和是偶数，奇数与奇数的积是奇数，

奇数与偶数的和是奇数，奇数与偶数的积是偶数，

偶数与偶数的和是偶数，偶数与偶数的积是偶数。

如果，偶数用“0”来表示，奇数用“1”来表示。那么性质 3 的结论就可以列成下表:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

性质 4　在任意给定的三个整数 a、b、c 中必能从中选出两个，其和及差均为偶数。

证　把整数按奇数与偶数分成两类。a, b, c 三个数中至少有两个属于同一类(即同为奇数或同为偶数，请读者自证)，由性质 3 可知同属一类的两数之和是偶数，两数之差也是偶数。

从这两个简单的性质可以看出，我们实际上利用被 2 除的余数把全体整数划分成了两类，偶数能被 2 整除，即余数为 0，所以用 0 表示偶数类；奇数被 2 除时余数为 1，所以用 1 表

示奇数类。这种把全体整数进行划分成类的思想，乍看起来，平淡无奇，但是在解题时，若能对准问题的关键，有的放矢地加以灵活运用，却会得到奇妙的效果。

对于分类的思想，在第 12 节讲了同余之后，则可有更进一步的了解。

现在我们就如何运用上述基本性质，特别是分类思想，举一些例题。

【例 1】 相继两个自然数的乘积必是偶数。

解 设相继两个自然数为 $n, n+1$。易见两数中必有一为奇数，一为偶数，所以由性质 3 可知它们的乘积 $n(n+1)$ 是偶数。这也就是说，$2|n(n+1)$。

【例 2】 满足方程

$$x^2+y^2=z^2$$

的整数 x, y, z 中不能都是奇数。

证 用反证法。如若 x, y, z 都为奇数，那么由性质 3，可知 x^2, y^2, z^2 也都是奇数。又由性质 3 知 x^2+y^2 必是偶数，但 z^2 为奇数，故(3)式不真。由此矛盾，证得命题。

【例 3】 设 a_1, a_2, a_3 为任意给定的三个整数，把它们按任意顺序编排后记为 b_1, b_2, b_3。证明 $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ 是偶数。

证 由于三个整数 a_1, a_2, a_3 中按奇、偶分类至少有两个属于同一类，不妨设 a_1, a_2 属同一类。而 b_1, b_2 是 a_1, a_2, a_3 中的两个，除去可能有一个为 a_3 外，其中至少有一个 b 与 a_1 或 a_2 属同一类(其实，这时就是 a_1 或 a_2)。这样，由性质 3 可知，或者 a_1-b_1 为偶数，或者 a_2-b_2 为偶数，不论哪一种情况，乘积 $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ 总是偶数。

【例 4】 能否把平面上的凸 11 边形的每一顶点用 3 条对角线分别与另三个(不相邻的)顶点相连接？

证 用反证法来证明不可能作这样的连接。假若可以连接的话，设所用对角线的条数为 N。因每条对角线的两端有两个顶点，所以被 N 条对角线所连接着的顶点共出现 $2N$ 次。但另一方面，每一顶点恰要与另三个顶点相连接，即每一顶点恰好出现 3 次，共应出现 $3 \times 11 = 33$ 次，故有 $2N = 33$。此时右边为奇数 33，左边为偶数，矛盾。从而证得这样的连接法是不可能构作的。

其实，一般地可以证明：设 n，m 为奇数，平面上的凸 n 边形不能用对角线把每一顶点与另外 m 个顶点连接。

【例 5】 能否把 79 只电话用电线把 79 只中的每只恰与另外 19 只电话连接成直通电话。

证 用反证法来证明命题的结论是否定的。若不然，设连接所用电线的总条数为 n。因每条电线的两端连接着两只电话，所以被连接的电话共有 $2n$ 只。另一方面，由所设 79 只电话每只恰与另外 19 只相连接，所以相连接的总共应有 19×79 只。故得 $2n = 19 \times 79$。此时左边为偶数，右边为奇数，矛盾。这就证明了不能作这样的连接。

读者可以看出，例 5 和例 4 的本质是一样的。

【例 6】 证明任意改变某一自然数的各位数码的顺序后所得到的数，与原数之和不能等于 999。

证 原数应是三位数，记为 $\overline{abc}$。设此数改变顺序后记为 $\overline{a'b'c'}$，若它们的和 $\overline{abc} + \overline{a'b'c'} = 999$，那么必有

$$a + a' = 9,\ b + b' = 9,\ c + c' = 9。$$

但 a'，b'，c' 只不过是 a，b，c 的一个不同顺序的排列，所以 $a + b + c = a' + b' + c'$。故有

$$3 \times 9 = a + a' + b + b' + c + c' = 2(a + b + c)。$$

但此时左边为奇数，右边为偶数，矛盾。得证命题成立。

【例 7】 在 40 个人中每晚派出三人值班。证明排不出

这样的值班表，使得任两个人都同时值班一次且也只同时值班一次。试找出数 n，使每次派 n 人值班时，能排出这样的表。

证 考察某人参加的所有值班班次。若排得出所要求的值班表，那么在该人参加的全部班次中，其余 39 人每人都出现且仅出现一次。而这些班次中的每一班除去此人外，另二人是其余 39 人中的，这就是说，要把其余 39 人一个不漏地分成二人一班的若干班，由于 39 是奇数，显然这是办不到的。

当 $n=2, 4, 14$ 时可排出这样的值班表。

习 题 2

1. 试用奇数与偶数的表示式证明性质 3。

2. 证明：在一段时间内，一群人相互握手，各人握手次数为奇数，则参加握手的人次必为偶数。

3. 试说明三个整数 a、b、c 中至少有两个同为奇数或同为偶数。

4. 设 a 为奇数，$a \geqslant 3$，试证 $8 \mid (a^2-1)$。

5. 试证 $a-1$ 与 a^3-1 的奇偶性相同。$a \pm b$ 与 $a^3 \pm b^3$ 的奇偶性相同。

6. 试把例 3 推广到一般情形，并证明之。

7. 试把例 5 推广到一般情形，并证明之。

8. 设 29 个省、市的乒乓球队参加友谊邀请赛，能否安排出这样的比赛场次，使每个队恰好参加奇数次比赛？

9. 设有 1979 位代表参加的一个大型学术会议，在会议中组织了许多小型讨论会，若每次讨论会参加的人数都是偶数个，能否作出这样的安排，使每个代表恰好参加奇数次小型讨论会？

10. 证明在空间中不存在这样的凸多面体，它有奇数个面，每个面又都是奇数边形。

11. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是整系数多项式，若 $f(0)$，$f(1)$ 都是奇数，那么 $f(x)=0$ 无整数根。

3. 再谈整除

本节，我们将用实例进一步介绍解整除问题的一些基本方法。这里只涉及读者熟悉的二项定理，因式分解，余数公式及数学归纳法等最简单的数学工具。其中常用的公式有

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k$$
$$+ \cdots + b^n; \qquad (1)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}); \qquad (2)$$

当 n 为奇数时，

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})。 \qquad (3)$$

【例 1】 若 $5|(a+b)$，则 $25|(a^5+b^5)$。

证 注意到二项展开式，有

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$= a^5 + b^5 + 5ab(a^3+b^3) + 10a^2b^2(a+b)。$$

由于已知 $5|(a+b)$，又 a^3+b^3 有因式 $a+b$，所以，25 能整除 $(a+b)^5$，$5ab(a^3+b^3)$ 及 $10a^2b^2(a+b)$。因此按习题 1 第 4 题可知：25 能整除 a^5+b^5。

【例 2】 试证：和数 $222^{555}+333^{444}$ 能被 7 整除。

证 由余数公式，有

$$222 = 7\times 31 + 5, \qquad 333 = 7\times 47 + 4$$

由二项公式(1)可得

$$222^{555} + 333^{444} = (7\times 31+5)^{555} + (7\times 47+4)^{444}$$

$$=7N+5^{555}+4^{444},$$

其中N是某整数。又由(3)可得

$$5^{555}+4^{444}=(5^5)^{111}+(4^4)^{111}=(5^5+4^4)M,$$

其中M是某整数。而

$$5^5+4^4=3381=7\times 483。$$

故按性质1得证

$$7|(222^{555}+333^{444})。$$

【例3】 试证：对任何正整数n，$3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$能被17整除。

证 利用公式(2)，

$$\begin{aligned}3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}&=15\times 5^{2n}+2\times 5^{2n}-2\times 5^{2n}+2^{3n+1}\\&=17\times 5^{2n}-2(5^{2n}-2^{3n})\\&=17\times 5^{2n}-2(25^n-8^n)\\&=17\times 5^{2n}-2(25-8)(25^{n-1}\\&\quad+\cdots+8^{n-1})\\&=17[5^{2n}-2(25^{n-1}+\cdots+8^{n-1})]。\end{aligned}$$

证毕。

【例4】 试证：$N=42^n[2^n(42^n-1)-1]+1$能被3403整除，其中n是正整数。

证 注意到$3403=41\times 83$，依公式(2)，

$$\begin{aligned}N&=(42\times 2)^n(42^n-1)-(42^n-1)\\&=(42^n-1)(84^n-1)\\&=(42-1)M_1\times(84-1)M_2\\&=3403M_1M_2,\end{aligned}$$

其中M_1,M_2均为正整数。命题证毕。

【例5】 试证：和数$2222^{5555}+5555^{2222}$能被7整除。

证 注意到

$$2222=7\times 317+3,\quad 5555=7\times 793+4$$

和公式(1)、(2)，有

$$2222^{5555}+4^{5555}=(2222+4)M=7\times318M,$$

$$5555^{2222}-4^{2222}=(5555-4)N=7\times793N。$$

所以

$$2222^{5555}+5555^{2222}=(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222})=7\times(318M+793N)-4^{2222}\times(4^{3333}-1)$$

而

$$4^{2222}(4^{3333}-1)=4^{2222}[(4^3)^{1111}-1]=(4^3-1)L=7\times9L$$

代入得：

$$2222^{5555}+5555^{2222}=7\times(318M+793N-9L)$$

得证命题成立。

从上面五个例子可以看出，解这种类型的问题，所用到的数学工具不多，但要求对基本公式能运用自如，特别要学会如在例 3 、例 5 演算中，先加一项 2×5^{2n}, 4^{2222} 等，接着就减该项等技巧，这些都是解题时常用的手法。

【例 6】 试证对任何正整数 n, $A_n=5^n+2\times3^{n-1}+1$ 能被 8 整除。

证 用数学归纳法。当 $n=1$ 时，$A_1=5+2+1$，命题成立。假设当 $n=k$ 时命题成立。当 $n=k+1$ 时，

$$A_{k+1}=5^{k+1}+2\times3^k+1=5\times5^k+6\times3^{k-1}+1$$
$$=5(5^k+2\times3^{k-1}+1)-4(3^{k-1}+1)。$$

由于 3^{k-1} 为奇数，故 $3^{k-1}+1$ 为偶数，所以 $4(3^{k-1}+1)$ 是 8 的倍数，结合归纳假设知上式右边能被 8 整除，即 $8\mid A_{k+1}$，证得命题对任何自然数 n 成立。

需要指出的是，有许多能用二项定理或因式分解的整除问题，常可用数学归纳法来给出证明，如这里的例子就是。

习 题 3

1. 设两数 x、y 之和为 7 的倍数，试证：$49|x^7+y^7$。

2. 试证：$N=2^{10}-2^8+2^6-2^4+2^2-1$ 能被 9 整除。

3. 试证：$6^{2n}-1$ 能被 35 整除，其中 n 为正整数。

4. 试证：$1978^{1978}+1980^{1979}-1981$ 能被 1979 整除。

5. 设 n 为正偶数，那么 13^n+6 能被 7 整除。

6. 设 p、n 为自然数，证明 $p^n+(p-1)(p-2)n-1$ 能被 $(p-1)^2$ 整除。

7. 证明：多项式 $a^{n+1}-(a-1)n-a$ 能被 $(a-1)^2$ 整除，其中 n 为自然数。

8. 试用数学归纳法证例 3 中的命题。

9. 设 n 为自然数，试证：

(i) $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ 能被 11 整除；

(ii) 设 l 为固定的正整数，若 $d|(a+b+c)$，$d|(a^l-b^l)$ 且 $d|(b^l-1)$，那么对任何自然数 n，$d|(a^{ln+1}+b^{ln+1}+c)$。(提示：对 n 用数学归纳法。注意例7是它的一个特殊情况，试由此题再给出几个具体的数值例子)。