凸函数–不等式–平均值

李文荣 徐本顺 编著

辽宁教育出版社

TUHANSHU
BUDENGSHI
PINGJUNZHI

凸函数—不等式—平均值
李文荣 徐本顺 编著

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 北镇县印刷厂印刷

字数：95,000 开本：787×1092 1/32 印张：4 3/8
印数：1—1,500
1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷

责任编辑：杨 力 责任校对：日 月
封面设计：杨 勇

ISBN 7-5382-1219-1/O·4

定价：2.05元

前　言

变量之间进行相互比较，对描述和分析变量的变化性状与相互制约关系是极为重要甚至是不可缺少的方法．正因为如此，不等式就成了基础数学乃至应用数学诸分支的一个重要工具，对不等式的研究和论述工作总是引人注目、经久不衰的．30年代问世的G·哈代、J·E·李特伍德、G·波利亚合著的《不等式》就是一本最系统、最详尽、影响最大的论述不等式的专著，至今仍保持着极高的引用率．然而，对于大多数非专门研究人员来说，读懂它却是困难的．

在奉献给读者的这本小册子里，首先对凸函数理论作了较系统的阐述，并以凸函数理论为出发点，以著名的Jensen不等式为基础导出一系列重要的不等式，如Hölder不等式、Cauchy不等式、Minkowski不等式、Hadamard不等式、Hardy不等式等，这些不等式在近代分析、线性代数、微分方程、概率统计、运筹学、管理科学等诸学科中都起着突出的作用．同时，我们还对与不等式有密切关系的平均值概念给出一般性的叙述，所述的种种平均值在数学和自然科学的许多领域中常常要用到．最后，我们还综述了近年来许多学者导出的与凸函数有关的一些有价值的不等式，这些不等式或许会引起读者的兴趣．

在本书中，我们不想回避必要的、系统的、严谨的数学

定义与逻辑论证，但注意力求简明扼要、脉络清楚。我们力图突出不等式这个中心内容，突出“凸函数—不等式—平均值”这条主要线索，而不去追求面面俱到。我们主要叙述凸函数及带凸函数的不等式，而对凹函数及带凹函数的不等式就不再赘述了，读者可在阅读时作为思考题；对于那些不能用凸函数方法证明的不等式我们一般就不去涉猎。总之，我们希望这本小册子能被大学师生、中学教师和科学工作者们所接受。

为了方便读者阅读，本书对若干概念和某些不等式给出了几何解释，对于某些重要不等式介绍了多种证法，并尽可能介绍一些重要不等式在数学各分支里的应用例题，囿于作者水平，书中疵漏在所难免，请各方面批评指正。

作　者

1990年1月

目　录

第一章 凸函数

凸函数是一类很重要的函数，它在基础数学及应用数学诸方面都有着广泛的应用。凸函数的方法也是第二章导出一系列重要不等式的主要方法和出发点。凸函数论的理论基础是由丹麦数学家J.L.W.V.Jensen（1859—1925）在本世纪初奠定的。在本章中，我们将从Jensen最弱的条件出发来给出凸函数的定义，然后再研究它的性质及各种判别法则，从而为以后利用凸函数推导形形色色的不等式做好准备工作。

§1 凸函数的概念

人们常常用凸与凹来反映曲线的弯曲方向的。例如，若把弧AB叫凸的（图1），那就要把弧BC叫凹的。这种从几何直观给出的关于曲线凸（凹）的概念反映在数学上就是表达该曲线的函数的凸（凹）性概念。

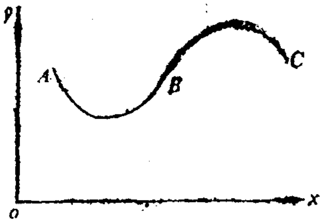

图 1

定义 1 设$\varphi(x)$是定义在区间$\mathscr{X}$[注]上的函数。如果对

〔注〕 用$\mathscr{X}$表示一个开的、闭的或半开半闭的区间。

$\mathscr{X}$上的任意两点x_1，x_2常有

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}, \tag{1.1}$$

则称$\varphi(x)$为$\mathscr{X}$上的凸函数.

如果成立不等式

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}, \tag{1.2}$$

则称$\varphi(x)$为$\mathscr{X}$上的凹函数.

显然，若$\varphi(x)$为区间$\mathscr{X}$上的凸(凹)函数. 则$-\varphi(x)$就是区间$\mathscr{X}$上的凹(凸)函数. 正是根据这个简单的理由，我们以后只叙述关于凸函数的结论. 而关于凹函数的相应结论读者可以直接推出.

由定义1可以看到，关于区间$\mathscr{X}$上的凸函数$\varphi(x)$有着明显的几何意义：曲线$y=\varphi(x)$的任一条弦的中点必在该曲线之上方或在该曲线上(图2). 关于$\mathscr{X}$上的凹函数$\varphi(x)$也有同样的几何解释：曲线$y=\varphi(x)$的任一条弦的中点必在该曲线之下方或在该曲线上（图3）. 由此可见，函数凸（凹）性的定义确实

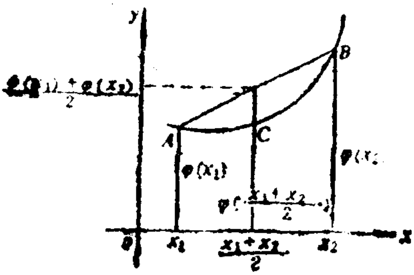

图 2

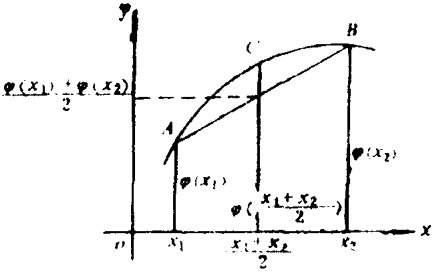

图 3

反映了人们关于曲线为凸（凹）的朴素的概念。

定义 2 若在定义1中成立不等式 $(x_1 \neq x_2)$

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2} \tag{1.3}$$

或
$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}, \tag{1.4}$$

则称 $\varphi(x)$ 是严格的凸函数或严格的凹函数。当然，对严格的凸（凹）函数 $\varphi(x)$ 来说，曲线 $y=\varphi(x)$ 的任一条弦的中点都只能在曲线的上（下）方。

例 1 线性函数 $\varphi(x)=ax+b$ 是 $(-\infty,\infty)$ 内的凸函数，因为

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+b$$

$$= \frac{ax_1+b}{2} + \frac{ax_2+b}{2}$$

$$= \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}.$$

当然，$\varphi(x)=ax+b$ 也可被看成凹函数。

例 2 二次幂函数 $\varphi(x)=ax^2\ (a>0)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的凸函数，而且还是严格的凸函数（图4），因为对不相等的 x_1, x_2，成立

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{a}{4}(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2)$$

$$= \frac{a}{4}[2x_1^2+2x_2^2-(x_1-x_2)^2] < \frac{ax_1^2+ax_2^2}{2}$$

$$= \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}.$$

例 3 指数函数$\varphi(x)=a^x\ (a>0,a\neq 1)$是$(-\infty,\infty)$上的严格凸函数（图 5）.

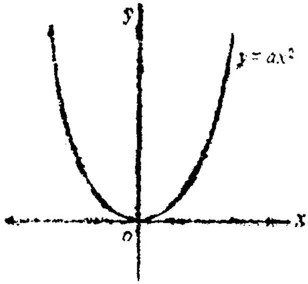

图 4

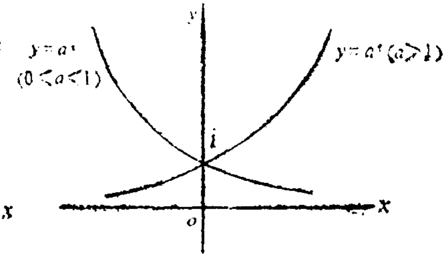

图 5

不难验证，恒正的函数$\varphi(x)=a^x\ (a>0,a\neq 1)$满足关系式

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\sqrt{\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)}\,. \qquad (1.5)$$

由指数函数$\varphi(x)$的单调性知，当$x_1\neq x_2$时，必有$\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$。再根据两不相等正数的几何平均值小于它们的算术平均值，就得到

$$\sqrt{\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)}<\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}, \qquad (1.6)$$

由（1.5）、（1.6）立得

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2},$$

因此，$\varphi(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$是严格的凸函数.

应该指出，用定义 1 的方式定义函数凸（凹）性是由Jensen最早采用的。在这个定义中并不假定所论的函数$\varphi(x)$具有连续性，可见凸（凹）函数也可能是不连续的，也

就是说，不连续的函数也可能具有凸（凹）性．例如，函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & (|x|<1)\\ 2, & (|x|=1)\end{cases}$$

在区间$\mathscr{X}=[-1,1]$上不连续，但不难验证$\varphi(x)$满足定义1的条件，事实上，对任意$x_1,x_2\in\mathscr{X}$，有$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}$，故$\varphi(x)$是$\mathscr{X}$上凸函数．

§2 凸函数的判别法

利用凸函数的定义判别某函数$\varphi(x)$是否为凸函数．常常并不方便，因此需要建立一系列便于应用的判别法．

下面叙述的各判别法所考察的函数$\varphi(x)$要附加各种各样的限制，如要求$\varphi(x)$或连续、或可导、或具有二阶导数等．当然，也有的判别法甚至不要求$\varphi(x)$是连续的．这样，各种判别法适用的范围就很不相同，因此，在判别某些函数是否具有凸（凹）性时，就要针对这些函数所具有的不同的性质去选用合适的判别法．

〔定理2.1〕如果函数$\varphi(x)$是区间$[a,b]$上的递增可积函数，则其变动上限定积分所定义的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x\varphi(t)dt \tag{2.1}$$

是$[a,b]$上的一个凸函数．

证 设$a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant b$，则

$$\Phi(x_1)-2\Phi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\Phi(x_2)$$

$$=\int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2}\varphi(t)\,dt-\int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}}\varphi(t)\,dt.$$

由于$\varphi(x)$是递增的，故

$$\int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2}\varphi(t)dt\geqslant\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot\frac{x_2-x_1}{2}$$

$$\geqslant\int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}}\varphi(t)dt,$$

从而得

$$\Phi(x_1)-2\Phi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\Phi(x_2)\geqslant 0.$$

这样，由§1的定义1可知，$\Phi(x)$是凸函数。

例1 考察幂函数$\Phi(x)=x^n$（n为自然数）.

（1）当n为偶数时，$\Phi(x)$在$(-\infty,\infty)$上是凸的，这是因为$\varphi(t)=nt^{n-1}$是递增的可积函数，根据定理2.1知，

$\Phi(x)=x^n=\int_0^x nt^{n-1}dt$是$(-\infty,\infty)$上的凸函数.

（2）当n为奇数时，$\Phi(x)$在$[0,+\infty)$上为凸的，$\Phi(x)$在$(-\infty,0]$上为凹的，这是因为一方面，$\varphi(t)=nt^{n-1}$是$[0,+\infty)$上的递增函数，故$\Phi(x)=x^n=\int_0^x nt^{n-1}dt$是$[0,+\infty)$上的凸函数；另一方面，因为$\varphi(t)=-nt^{n-1}$是$(-\infty,0]$上的递增函数，故$-\Phi(x)=-x^n=\int_0^x -nt^{n-1}dt$是$(-\infty,0]$上的凸函数，即$\Phi(x)$是$(-\infty,0]$上的凹函数.

下面再给出一个通常有用的判别法。

〔**定理2.2**〕 如果$\varphi''(x)$在区间$\mathscr{X}$上存在，则$\varphi(x)$在$\mathscr{X}$上为凸函数的充分必要条件为在$\mathscr{X}$上$\varphi''(x)\geqslant 0$。

证 （1）必要性。已知$\varphi(x)$为凸函数，当在（1.1）中取$\frac{x_1+x_2}{2}=t$，$\frac{x_1-x_2}{2}=h$，并设$x_1>x_2$，因而$h>0$，这样就有

$$\varphi(t)\leqslant\frac{\varphi(t+h)+\varphi(t-h)}{2},$$

也就是

$$\varphi(t+h)+\varphi(t-h)-2\varphi(t)\geqslant 0. \tag{2.2}$$

用反证法，假定$\varphi''(t)<0$，由

$$\varphi''(t)=\lim_{u\to 0}\frac{\varphi'(t+u)-\varphi'(t-u)}{2u}$$

可知，存在$\delta>0$，$h>0$，使

$$\varphi'(t+u)-\varphi'(t-u)<-\delta u \qquad (0<u\leqslant h).$$

另外，从

$$\frac{d}{du}[\varphi(t+u)+\varphi(t-u)-2\varphi(t)]$$
$$=\varphi'(t+u)-\varphi'(t-u)$$

知，$\varphi(t+u)+\varphi(t-u)-2\varphi(t)$是$u$的减函数，但这函数当$u=0$时等于0，因此

$$\varphi(t+u)+\varphi(t-u)-2\varphi(t)<0,$$

这与结论（2.2）矛盾，因而$\varphi''(t)\geqslant 0$。

（2）充分性。两次应用Lagrange中值定理得

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x+\theta h) \qquad (0<\theta<1),$$

及 $$\varphi'(x+\theta h)=\varphi'(x)+\theta h\varphi''(x+\theta'\theta h) \quad (0<\theta'<1),$$

因而得

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\theta h^2\varphi''(x+\theta'\theta h),$$

再由$\varphi''(x)\geqslant 0$，则得

$$\varphi(x+h)\geqslant\varphi(x)+h\varphi'(x), \tag{2.3}$$

在（2.3）中取$x+h=x_1$，$x=\frac{x_1+x_2}{2}$及$x+h=x_2$，$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，各得

$$\varphi(x_1)\geqslant\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\varphi'(x),$$

$$\varphi(x_2)\geqslant\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\varphi'(x),$$

两式相加得

$$\varphi(x_1)-2\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\varphi(x_2)\geqslant 0,$$

故$\varphi(x)$是凸函数，证讫。

〔**推论**〕若在$\mathscr{X}$上$f(x)>0$且存在$f''(x)$，则$\ln f(x)$为凸函数的充分必要条件是在$\mathscr{X}$上$f(x)\cdot f''(x)-[f'(x)]^2\geqslant 0$。

证 令$g(x)=\ln f(x)$，则有

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)},\quad g''(x)=\frac{f(x)\cdot f''(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}.$$

由此及定理2.2即证得本推论结论。

例 2 函数$\varphi(x)=x\ln x$在$(0,+\infty)$内是凸函数，因为 $\varphi''(x)=\frac{1}{x}>0$。

例 3 函数 $\varphi(x)=-x^{\frac{1}{3}}$是凸函数，因为$\varphi''(x)=$

$\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}>0$；$\psi(x)=x^{\frac{2}{3}}$是凹函数，因为$-\varphi(x)$是凸的，事实上$(-x^{\frac{2}{3}})''=\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}>0$。

例 4 函数$\varphi(x)=\ln x$是$(0,+\infty)$内的凹函数，因为$-\varphi(x)=\ln\frac{1}{x}$是凸的，事实上$(\ln\frac{1}{x})''=\frac{1}{x^2}>0$。

〔**定理2.3**〕 如果在区间$\mathscr{X}$上存在$\varphi''(x)$，且$\varphi''(x)>0$，则$\varphi(x)$在$\mathscr{X}$上是严格凸函数。

证明可仿照定理2.2的充分性证明给出。

定理2.2所述的判别法有着明显的几何意义．我们容易看到凸函数$y=\varphi(x)$的图象上从A点移到B点的时候，切线总是在曲线的下面，而且切线斜率$\mathrm{tg}\theta$也是递增的$(\mathrm{tg}'\theta\geqslant\mathrm{tg}\theta)$，而$\mathrm{tg}\theta=\varphi'(x)$，故$\varphi'(x)$在$\mathscr{X}$上递增（图6），这也就是$\varphi''(x)\geqslant0$。

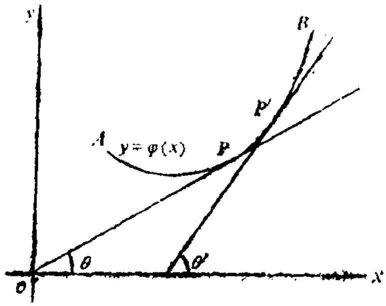

图 6

类似地，$\varphi''(x)\leqslant0$就是函数$\varphi(x)$为凹的充分必要条件．这样，函数$\varphi(x)$的凸（凹）性与其二阶导数$\varphi''(x)$的符号有着非常密切的关系。

用定理2.2判定的凸函数是一类特别重要的凸函数，常称为具有二阶导数的凸函数类．对于具有二阶导数的函数来说，用定理2.2和定理2.3来判别它是否具有凸（凹）性是非常方便的．但是，对于不具有二阶导数的函数来说，定理2

就失去了判断的效用了．定理2.1对所要判别的函数没有“可微性”这个附加条件，应该说定理 2.1 的运用范围要广得多，然而用起来又不甚方便。

其实，对于不具有二阶导数而具有所谓的广义二阶导数的函数，也有类似于定理 2.2 的充分条件．现在，让我们先从广义导数的概念谈起。

定义 3　设函数$\varphi(x)$在区间$\mathscr{X}$上定义，如果极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{2h} \tag{2.4}$$

存在的话，就称这极限值为 $\varphi(x)$ 在点x 的广义导数，记作 $\varphi^{(')}(x)$。

容易知道，如果普通导数 $\varphi'(x)$ 存在，则广义导数 $\varphi^{(')}(x)$一定存在，且 $\varphi^{(')}(x)=\varphi'(x)$，这是因为当$h\to 0$

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}+\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{-h}\right]$$

时，等式的右边趋于$\varphi'(x)$，左边趋于$\varphi^{(')}(x)$．反过来，当 $\varphi'(x)$不存在时，而$\varphi^{(')}(x)$却可能存在，例如，函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & (x\neq 0)\\ 0, & (x=0)\end{cases}$$

虽然 $f'(0)$ 不存在（因为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ 不存在），但是广义导数$\varphi^{(')}(0)$却存在．事实上

$$\varphi^{(')}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)-\varphi(-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{2h}=0.$$

因此，“函数广义可导”这个条件比“函数可导”的条件要弱些。

定义 4 设函数$\varphi(x)$在区间$\mathscr{X}$内定义，如果二阶差分式的极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-2\varphi(x)+\varphi(x-h)}{h^2} \tag{2.5}$$

存在，则称这个极限值为$\varphi(x)$在点x的二阶广义导数，记为$\varphi''(x)$。

同一阶广义导数的情况一样，如果$\varphi''(x)$存在，则$\varphi^{('')}(x)$也一定存在，且$\varphi^{('')}(x)=\varphi''(x)$。事实上，若令

$$\Psi(h)=\varphi(x+h)+\varphi(x-h),$$

对于等式

$$\frac{\varphi(x+h)-2\varphi(x)+\varphi(x-h)}{h^2}=\frac{\Psi(h)-\Psi(0)}{h^2}$$

的右边用Cauchy中值定理得

$$\frac{\Psi(h)-\Psi(0)}{h^2}=\frac{\Psi'(\theta h)}{2\theta h}\qquad(0<\theta<1),$$

从而

$$\frac{\varphi(x+h)-2\varphi(x)+\varphi(x-h)}{h^2}=\frac{\varphi'(x+\theta h)-\varphi'(x-\theta h)}{2\theta h},$$

但当$h\to 0$时上面等式的左边趋于$\varphi^{('')}(x)$，而右边趋于$\varphi''(x)$，这就是说$\varphi''(x)$存在且等于$\varphi^{('')}(x)$.反过来，当$\varphi''(x)$不存在时，$\varphi^{('')}(x)$却可能存在，如函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & (x\neq 0)\\ 0, & (x=0)\end{cases}$$

$\varphi''(0)$不存在，这是因为

$$\varphi'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & (x\neq 0)\\ 0, & (x=0)\end{cases}$$

且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}-\cos\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2\sin\dfrac{1}{\Delta x}-\dfrac{1}{\Delta x}\right.$

$\left.\cos\dfrac{1}{\Delta x}\right)$不存在；然而

$$\varphi^{(\prime\prime)}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)-2\varphi(0)+\varphi(-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^2}=0.$$

这也说明“函数二阶广义可导”这个条件比“函数二阶可导”这个条件要弱些。

根据函数二阶广义导数的定义 3 和关于凸函数的定义 1 可以证明下面的判别法。

〔**定理2.4**〕 如果函数 $\varphi(x)$在区间$\mathscr{X}$上连续且存在广义二阶导数，如果$\varphi^{(\prime\prime)}(x)\geqslant 0$，那么$\varphi(x)$在$\mathscr{X}$上是凸函数.

证 取任意正数ε，构造辅助函数

$$F(x)=\varphi(x)-\left[\varphi(a)+\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}(x-a)\right]+\varepsilon(x-a)(x-b), \tag{2.6}$$

其中a、b是$\mathscr{X}$中任两点，且$a<b$. 显然，$F(x)$在$[a,b]$上连续，且$F(a)=F(b)=0$。此外

$$F^{(\prime\prime)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[\varphi(x+h)-2\varphi(x)+\varphi(x-h)]}{h^2}+2\varepsilon,$$

即 $$F^{(\prime\prime)}(x)=\varphi^{(\prime\prime)}(x)+2\varepsilon\geqslant 2\varepsilon. \tag{2.7}$$