

B71083
RMT
13

145667

1963年铁路科学技术论文报告会文集

第 13 辑

桥梁墩台基础 及水工水文



1963年铁路科学技术论文报告会文集

第 13 辑

桥梁墩台基础 及水工水文

桥梁隧道专业会议学术委员会选编

人 民 铁 道 出 版 社

1965年·北京

1963年铁路科学技术论文报告会文集

第 13 辑

桥梁墩台基础及水工水文

桥梁隧道专业会议学术委员会选编

人民铁道出版社出版、发行

(北京市霞公府甲24号)

北京市书刊出版业营业许可证出字第 010 号

人民铁道出版社印刷厂印

书号1985 开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ 印张 $6 \frac{1}{4}$ 插页 2 字数152千

1965年4月第1版

1965年4月第1版第1次印刷

印数 0001—1,320 册 定价(科六) 0.90 元

目 录

管柱振沉时土的阻力及其系数的测定.....	1
由静载试验决定桩的容许荷载.....	23
高桩承台直桩或纵横斜桩不对称布置及承受偏心力时之求算.....	30
桥墩稳定性计算.....	40
现行小桥涵流量计算方法的检验.....	57
论水文经验频率公式.....	74
黄土山区的洪水泥流及铁路桥涵的防淤措施.....	83

管柱振沉时土的阻力及其系数的测定

唐山铁道学院 吴炳焜

内 容 提 要

研究管柱振沉运动最重要的因素是土的阻力。作者根据实际管柱振沉资料总的情况，建议了一个粘滞性侧面阻力和非线性端阻的土阻力模型。应用这样的土阻力模型推导了管柱恒态振沉运动和管壁钢筋恒态振沉应力波的解。将这些解同其他的比较可证明其既较简单而又能很好地符合实测数据。

作者最后阐明如何应用所得的解由实测数据估算土阻力系数并举出了一个简短的算例。

研究管柱在土中的振动下沉（简称振沉）运动最困难的地方是土的阻力究竟应该如何表达，即如何将它抽象化才能既符合实际情况又便于理论分析。若将振沉时管柱和四周的土当作一个单自由度的强迫振动体系，它有许多普通在研究的振动体系所没有的特点，土阻力性质的复杂即其中之一。

一、振沉时土的阻力

令 G 和 M 为管柱净重（连振动锤重在內，但扣去浮力）， $G = Mg$ ， g 为重力加速度。又周期性振动力为 $Pe(t)$ ， $P = \frac{m\omega^2}{g}$ ， m 为偏心块（单频锤）或大偏心块（160型双频锤）静力矩， ω 为其角频率，而 $e(t) = \cos\omega t$ （单频锤）或 $\cos\omega t - \cos 2\omega t$ （160型双频锤）。施工时开动振动锤后管柱在扰动力 $G - Pe(t)$ 作用下即开始下沉。令 X 为管柱刚体运动位移，向下为正， t 为时间，而振沉时动态土的阻力先用 $F\left(\frac{dX}{dt}, X\right)$ 表示，可写出振沉运动方程如下：

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + F\left(\frac{dX}{dt}, X\right) = G - Pe(t) \quad (1)$$

(慣性力) (阻尼力+恢复力) (扰动力)

振动锤启动后管柱下沉运动必定要经过一段位移变化极其复杂的瞬态时期。瞬态过程很不好研究，但在这阶段內下沉既快管柱应力又小，在设计时是无须多加考虑的。我们以后着眼于瞬态过程完毕后的恒态运动，即管柱位移和土的阻力都已成为周期性者，其周期即振动力周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。式(1)中的位移 X 和时间 t 以后即由管柱进入恒态运动时算起，如图1所示。由于扰动力中有常量项 G ，且振动力可能向下大于向上者（双频），这里所指位移的周期性其意义比较普

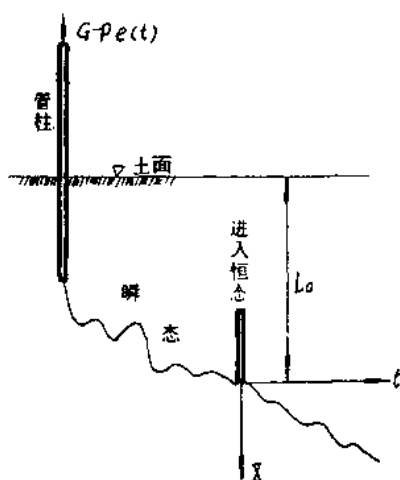


图1 管柱振沉位移

遍，即包括下沉和纯振动两部份在内。若一次恒态振沉中下沉量不大，对土的阻力讲可不必考虑由于入土深度、不同土层性质和阻力大小的变化，即 L_0 可当作常量，那么恒态周期性的土阻力可由下式表达：

$$F\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)_t, X(t)\right] = F\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)_{t+T}, X(t+T)\right]。$$

可将土的阻力 F 分为阻尼力 F_q 和恢复力 F_r 两部份， $F = F_q + F_r$ 。前者主要应指振沉时在管柱外侧土所发生的对运动的阻力，而后者为振沉过程中管柱下端遇到的土阻力，以后简称端阻。我们将从一般考虑而又结合管柱下沉时应力测量资料来决定两部份阻力表达形式。

在河底土中振沉的管柱外侧受到的土阻力，从性质讲算作粘滞性阻尼是恰当的。水面以下的沙土经振动后接近流体，而饱和粘性土本就湿软，它们在振沉的管柱外侧上产生的阻力和粘滞性介质者性质极相似，所以巴尔肯⁽¹⁾曾称之为振动粘滞性阻尼。我们知道粘滞性阻尼是近似地和速度成正比例变化的，即 $F_q \propto \frac{dX}{dt}$ 。若认为 F_q 又随管柱外侧表面积成正比例变化，那么粘滞性阻尼系数 q 应为单位速度单位表面积上的阻尼力。令 D 为管柱外径，则

$$F_q = \pi D L_0 q \frac{dX}{dt}。$$

至于干沙土中动态 F_q 是否也能用上式还须研究。但考虑到振动理论中常用将库伦干摩擦近似地化为粘滞性阻尼的分析方法，因而不论在什么土中将阻尼力当作粘滞性介质者似乎还是可以的。

至于端阻恢复力，问题就困难得多了。端阻是管柱下端沉入和拔出土面时受到的阻力，它的大小应该由下沉或上升距离多少来衡量。这距离既有下沉和上升的区别，它必须从某一中和位置分正负计算。恒态周期性运动的中和位置可认为是一周初始速度符合下沉情况（即它为平均下沉速度）时的起点位置。下端移动时距离即从该位置土面计算，向下为正，向上为负；相应的端阻也以压力为正，拉力为负。以后我们将前述各式中的 X 就当作从中和位置起算的位移，因 X 原点的移动不影响 $\frac{dX}{dt}$ 和 $\frac{d^2X}{dt^2}$ 。显然，端阻 $F_r = F_r(X)$ 。 $F_r(X)$ 的形式虽不好定，但可断言它不可能象普通弹簧恢复力似地为位移的对称的线性函数，理由如下：（a）若它为位移的线性函数，那么连同粘滞性阻尼代入运动方程（1）后它成为线性方程了。由这线性方程解得的恒态加速度将为和振动力相同的正、余弦函数。此外，管柱切面应力波形也将和振动力者一样（详见后述）。但实验中测得的加速度和应力曲线常有包含各种频率的次谐波者，这是线性振动体系所不可能发生的。（b）对称的线性恢复力在下端由中和位置下沉或上升同一距离时是同样大小的压力或拉力。但土会对上升的管柱发生和下沉时压力同样大小的拉力是完全不可想象的。实际上管柱上升距离大些下端很可能会和中和位置时土面脱开，升得高拉力恢复力就比例地增加情况恐怕很难出现。

我们建议端阻用位移 X 的非对称、非线性函数来表达。现在先将表达式提出来，以后再讨论。若端阻 F_r 以刃脚周线长计，它可用下列最简单的两项式表出：

$$F_r = \pi D (kX + rX^2)，$$

式中 k 是线性项， r 平方项的系数。

上面提出的土阻力表达式中包含着三个力学性质常数 q 、 k 和 r ，有必要说明一下对同一种土讲它们是否会随振动频率而变。当然，若频率变化范围大，如从几赫到几百、千赫，这

些系数肯定会有很大变化。但国内管柱振沉频率一般都是几个赫，在只几赫变动对我们认为 q 、 k 和 r 是可算作不随频率而变的。

将侧面阻尼和端阻恢复力代入式 (1)，用无量纲变量

$$\zeta = \omega t, x = \frac{G}{m} X = \frac{M\omega^2}{P} X = \frac{G\omega^2}{Pq} X,$$

和下列无量纲系数和参数

$$\mu = \frac{\pi D I_0}{M\omega} q, \beta = \frac{\pi D}{M\omega^2} k, \lambda = \frac{\pi D P}{M^2\omega^4} r, \gamma = \frac{G}{P},$$

简化方程形式，并以上加一小点表示 $\frac{d}{d\zeta}$ ，即得运动方程如下：

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + \beta x + \lambda x^2 = \gamma - e(\zeta) \quad (2)$$

上式每一项意义都和原来运动方程者一样，如端阻恢复力 $f_r(x)$ 为 $\beta x + \lambda x^2$ 等。

端阻恢复力 $f_r = \beta x + \lambda x^2$ 曲线示于图 2，它是通过原点 O 的抛物线。其最低点 A 的坐标

注明在图上。必须说明 f_r 的数学式虽为 $\beta x + \lambda x^2$ ，但我们只用其曲线能符合端阻性质要求的那一段而不是全部。视我们对恢复力中拉力部份估计如何，采用的曲线段也不相同。整条端阻曲线左边应为水平轴（即下端上升到某一高度后端阻为零），右接 $\beta x + \lambda x^2$ 曲线的 OR （全无拉力）， AOR 或 $SAOR$ 段。考虑到实验中测得管柱下端附近切面有相当大拉应力且加速度和应力都没有明显的间断，采用 $SAOR$ 段是恰当的。这样，

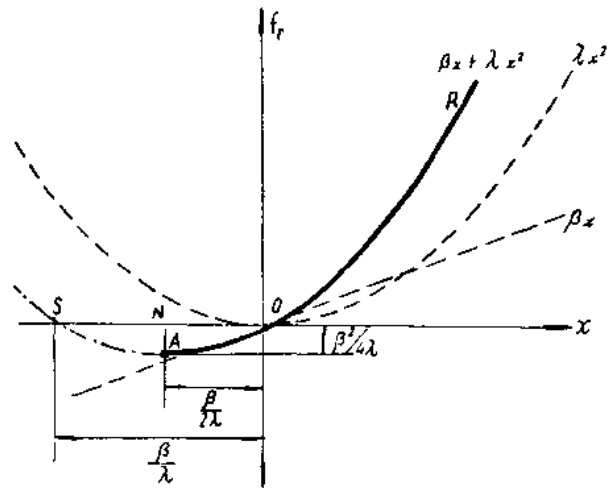


图 2 端阻恢复力 $\beta x + \lambda x^2$

样，下端上升到 $\frac{\beta}{2\lambda}$ 时拉力达最大值

$\frac{\beta^2}{4\lambda}$ ，再升则渐减直到 $x = -\frac{\beta}{\lambda}$ 时为零。可注意到升时拉力要比沉时压力小得多，如升到 $\frac{\beta}{2\lambda}$ 时拉力只下沉 $\frac{\beta}{2\lambda}$ 深时压力的三分之一。

若位移的纯振动部份只考虑其频率和振动力者相同的本谱，有许多求式 (2) 非线性方程近似解方法^[2, 3]。因方程中有阻尼项，振动力和位移纯振动部份之间必有周相差 φ ，为运算方便起见可将 φ 加在振动力中，即运动方程现可写为：

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + \beta x + \lambda x^2 = \gamma - e(\zeta - \varphi) \quad (3)$$

上式中 $e(\zeta - \varphi) = \cos(\zeta - \varphi)$ (单频振动力) 或 $\cos(\zeta - \varphi) - \cos 2(\zeta - \varphi)$ (160型双频锤振动力)。下面分平均下沉速度 v 是否为零来求一下近似解。

(甲) 平均下沉速度 $v=0$

$v=0$ 运动成纯振动。因式 (3) 的恢复力既不对称^[2]，扰动力又有常量项^[4]，仅取本谱的近似位移可假定为：

单频： $x = w - a \cos \zeta$ ，

双频： $x = w - a(\cos \zeta - \cos 2\zeta)$ 。

上式中 a 为振幅， w 可称为“偏心距”。可看出初始速度 $\dot{x}(0) = 0$ ，这是符合我们的要求的。

可用加勒金（或李兹）法求近似解。这方法是一种所谓近似平均法，即将位移代入式（3），相继乘以三个权函数^[3]，然后在一周内积分，这样使每周平均虚功为零而定出 a 、 w 和 φ 。三个权函数应分别照顾到常量，和振动力同步以及和振动力异步的三部份位移都达到每周平均虚功为零原则。单频权函数明显地为 1 、 $\cos\zeta$ 和 $\sin\zeta$ ；双频者相应为 1 、 $\cos\zeta - \cos 2\zeta$ 和 $\sin\zeta + \cos 2\zeta$ 。进行计算后我们得三方程如下：

$$\begin{aligned} & \beta w + \lambda(w^2 + \frac{1}{2}a^2) - \gamma = 0 \\ \text{单频:} & \quad (1 - \beta)a - 2\lambda wa + \cos\varphi = 0 \\ & \quad \mu a \cdot \sin\varphi = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} & \beta w + \lambda(w^2 + a^2) - \gamma = 0 \\ \text{双频:} & \quad (5 - 2\beta)a - \lambda a \left(4w + \frac{3}{2}a \right) + \cos\varphi + \cos 2\varphi = 0 \\ & \quad (\mu + \beta - 4)a + \lambda a \left(2w + \frac{1}{2}a \right) \cdot \sin\varphi - \cos 2\varphi = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

式（4）和（5）在研究运动形态时（即 μ 、 β 和 λ 已知）可用来解出 a 、 w 和 φ ；反之若有 a 、 w 和 φ 实测数据可推算出那次振沉的 μ 、 β 和 λ 值。

（乙）平均下沉速度 $v \neq 0$

若恒态运动时管柱在下沉，位移可假定为：

单频： $x = v\zeta - a \cos\zeta$ ，

双频： $x = v\zeta - a(\cos\zeta - \cos 2\zeta)$ 。

上式只要 x 为周期性函数总是对的^[5]，且 $v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}(\zeta) d\zeta$ ，即 v 为平均下沉速度。现在初始速度 $\dot{x}(0) = v$ ，合理的条件。仍用加勒金法可得三个方程如下：

$$\begin{aligned} & (\mu + \pi\beta)v + \lambda \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{4}{3}\pi^2 v^2 \right) - \gamma = 0 \\ \text{单频:} & \quad (1 - \beta)a + 2\lambda v(2v - \pi a) + \cos\varphi = 0 \\ & \quad \mu a - 2\beta v + \lambda v(a - 4\pi v) + \sin\varphi = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} & (\mu + \pi\beta)v + \lambda \left(a^2 + \frac{4}{3}\pi^2 v^2 \right) - \gamma = 0 \\ \text{双频:} & \quad (5 - 2\beta)a - \lambda \left(\frac{3}{2}a^2 + 4\pi va - 3v^2 \right) + \cos\varphi + \cos 2\varphi = 0 \\ & \quad (\mu + \beta - 4)a - 2\beta v + \lambda \left[\frac{1}{2}a^2 + 2\pi va - (4\pi - 1)v^2 \right] + \sin\varphi - \cos 2\varphi = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

式（6）和（7），同式（4）和（5）一样，可用来解 v 、 a 和 φ 或 k 求 μ 、 β 和 λ 。

必须说明端阻用 $\beta a + \lambda x^2$ 表示时从运动方程式（3）所得的解是有限制的。 $v=0$ 情况很容易写出可使用式（4）和（5）的条件为：

$$\text{单频 (式 4):} \quad a - w \leq \frac{\beta}{\lambda},$$

$$\text{双频 (式 5):} \quad 1.125a - w \leq \frac{\beta}{\lambda}。$$

至于 $v \neq 0$ 情况的最大上升高度 x_0 单频即初始位移 $x(0) = a$ 而双频者须进行计算。双频的 x_0 为 $v\zeta - a(\cos\zeta - \cos 2\zeta)$ 的最小值，可先从 $\dot{x} = v + a(\sin\zeta - 2\sin 2\zeta) = 0$ ，即 $\sin\zeta - 2\sin 2\zeta =$

$\frac{\eta}{\alpha}$ ，求出 ζ_0 值，则 $\alpha_0 = n\zeta_0 - \alpha(\cos \zeta_0 - \cos 2\zeta_0)$ 。现列 $\eta \neq 0$ 时条件如下：

单频 (式 6) : $\alpha \leq \frac{\beta}{\lambda}$,

双频 (式 7) : $\alpha_0 \leq \frac{\beta}{\lambda}$ 。

二、振沉应力

现在转入讨论振沉时管柱切面应力 σ 。因切面应力和应变 ϵ 只差一个常量乘数， $\sigma = E\epsilon$ ， E 为管柱材料弹性模量，我们推导方程时将应变 ϵ 为变量。有了切面应变再将其化为钢筋混凝土管柱中钢筋应力 σ ，是很简单的事。下面先列举以后推导应变方程的基本假设：

(a) 振沉时土的阻力完全由刚体运动形态决定，它不受管柱材料弹性变形影响。和刚体运动位移相比弹性位移是极微小的，假定它不影响土的阻力是合理的。

(b) 只考虑管柱的纵向弹性振动应变而略去横向变形及其影响。换句话说，我们将应用细杆纵向振动分析法。当然，管柱从外形看决不是细杆，但因它是薄壁大空管，横向变形对纵向应变的影响很小。即使加了勒夫 (Love) 横向变形修正项因管柱的旋转半径几乎和它的半径相等，纵向应变也没什么显著不同。

(c) 不考虑管柱材料 钢筋混凝土 的内耗。现有关于钢筋混凝土内耗的资料不够，很难在具体计算中考虑进去。

要研究振沉时管壁的弹性应变除刚体运动位移外还须加弹性变形位移，前者仅为时间的函数而后者为时间和切面位置的函数。管柱切面位置可由其离下端高度 Z 衡量，即标明切面位置的变量 Z 以下端为原点，向上为正。若 $R(Z, t)$ 为任一切面离开中和位置的总位移，向上为正，那么它是弹性位移 $W(Z, t)$ 和刚体运动位移 $X(t)$ 两者之和，即

$$R(Z, t) = W(Z, t) - X(t)。$$

上式 X 前须加负号是因以前采用的刚体运动位移以向下为正，这样便于研究平均下沉速度 v 等；现在取 Z 以及位移 W 和 R 等向上为正则可使管柱切面拉和压应变 (或应力) 分别为正和负以符合一般标记法。

若离下端 Z 处切面的总位移为 R ，那么作用在从该处切下来的一小段高 dZ 管柱上的力示于图3。 S 为向下的阻尼力，在管柱入土部份 ($Z < L_0$) 上 $S = \pi Dq \frac{\partial R}{\partial t} dZ = -\pi Dq \frac{dX}{dt} dZ$ 而在土面以上 ($Z > L_0$) 则 $S = 0$ 。这种不连续的分布情况最好用阶梯函数 U 来表示， $U(Z - L_0) = \begin{cases} 0, & Z < L_0 \\ 1, & Z > L_0 \end{cases}$ 所以 $U(Z) - U(Z - L_0)$ 函数值从下端到土面等于 1，土面以上为零。用这函数可写出：

$$S = -\pi Dq \frac{dX}{dt} [U(Z) - U(Z - L_0)] dZ。$$

列出力的平衡方程，令 $c^2 = \frac{E}{\rho}$ ， c 为纵波在钢筋混凝土中速度，得

$$c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - g + \frac{\pi Dq}{\rho F} \frac{dX}{dt} [U(Z) - U(Z - L_0)] = 0。$$

对上式每项进行 $\frac{\partial}{\partial Z}$ ，因 $\frac{\partial R}{\partial Z} = \frac{\partial W}{\partial Z} = \epsilon$ ，得应变方程

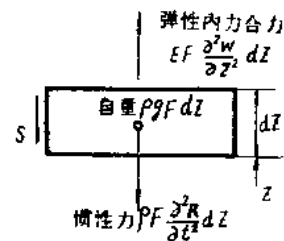


图 3 小段管柱上作用的力

$$c^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\pi D q}{\rho F} \frac{dN}{dt} [U(Z) - U(Z - l_0)] = 0.$$

仍将方程化为无量纲者。除前用的 $\zeta = \omega t$ 和 $x = \frac{M\omega^2}{P}$ 外用下列无量纲的变量和参数:

$$z = \frac{\omega}{c} Z, \quad l = \frac{\omega}{c} l, \quad l_0 = \frac{\omega}{c} l_0, \quad p = \frac{P}{F F}.$$

上列 l 为管柱长度。注意 $\frac{\partial}{\partial z} U(z) = 0$ 而 $\frac{\partial}{\partial z} U(z - l_0) = \delta(z - l_0)$, 冲量函数 $\delta(z - l_0) = 0$ 当 $z \neq l_0$ 而 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - l_0) dz = 1$ 当 $z = l_0$ 。用右上方加一撇表示 $\frac{\partial}{\partial z}$, 最后得出应变方程如下:

$$\varepsilon''(z, \zeta) - \dot{\varepsilon}(z, \zeta) = \frac{\mu}{l_0} p \dot{x}(\zeta) \delta(z - l_0).$$

现在须决定应变 ε 的初始和边界条件。一般地讲管柱在刚进入恒态运动时应力很小, 且初始条件稍有不同对恒态应力影响不大, 可近似地取 $\varepsilon(z, 0) = 0$ 和 $\dot{\varepsilon}(z, 0) = 0$ 。至于边界条件上端显然即振动力应变。因振动力和下端的恢复力有周相差 φ , 可仍将 φ 加在振动力内, 那么端阻和以前相同了。因 x 以向下为正, 端阻应变前须加负号。略经运算后得上、下端边界条件为 $\varepsilon(l, \zeta) = p e(\zeta - \varphi)$ 和 $\varepsilon(0, \zeta) = -p(\beta x + \lambda x^2)$ 。现在可列出全部应变方程如下:

$$\begin{aligned} \varepsilon''(z, \zeta) - \dot{\varepsilon}(z, \zeta) &= \frac{\mu}{l_0} p \dot{x}(\zeta) \delta(z - l_0); \\ \varepsilon(z, 0) &= 0, \quad \dot{\varepsilon}(z, 0) = 0; \\ \varepsilon(l, \zeta) &= p e(\zeta - \varphi), \quad \varepsilon(0, \zeta) = -p(\beta x + \lambda x^2). \end{aligned} \quad (8)$$

必须说明式(8)中的 x 和 \dot{x} 是 ζ 的已知函数, 即它们可用刚体运动位移和速度的近似解。

式(8)是个线性方程, 我们拟先对它进行拉普拉斯变换将自变量 ζ 换成 s , 然后将所得方程当作以 z 为自变量的常微分方程来解边值问题^[6]。解边值问题结果等于一个以 ζ 为自变量的常微分方程的拉普拉斯变换式了。因为解边值问题后可得和普通线性系统意义相同的变换式, 我们一开始就可照线性系统分析法^[7, 8]要求进行运算。为此, 先将方程(8)中作用着的随时间变的应变都以冲量应变 $\delta(\zeta)$ 替代, 然后进行拉普拉斯变换, 解以 z 为自变量的常微分方程。这样得出的变换应变 $\dot{\varepsilon}(s)$ 即“变换的冲量反应”, 也即系统函数或转换函数 $H(s)$ 。略去中间步骤可写出系统函数如下:

$$H(s) = H_p(s) + H_q(s) + H_r(s),$$

即它是由管柱上端, 侧面和下端分别有冲量应变作用着的时的系统函数 $H_p(s)$, $H_q(s)$ 和 $H_r(s)$ 三者合起来的,

$$\begin{aligned} H_p(s) &= \frac{\sin hsz}{\sin hsl}, \\ H_q(s) &= \begin{cases} -\frac{\sin hsz \sin hs(l-l_0)}{s \sin hsl}, & z \leq l_0 \\ -\frac{\sin hs(l-z) \sin hsl_0}{s \sin hsl}, & z \geq l_0 \end{cases}, \\ H_r(s) &= \frac{\sin hs(l-z)}{\sin hsl}. \end{aligned}$$

有了系统函数后求边界和界中作用着并非 $\delta(\zeta)$ 而为若干简单的随时间变化的应变时的管柱切面恒态应变就很简单了。在我们这样的线性系统上若作用着常量应变, 则恒态切面应变也是常量, 且为:

恒态常量切面应变 = 作用着的常量应变 · $H(o)$ ，式中 $H(o) = [H(s)]_{s=0}$ 。若作用着角频率为 $n\omega$ 的正弦或余弦函数的应变，恒态切面应变仍相应地为该角频率的正、余弦函数，且

恒态切面正、余弦应变 = 作用着的正、余弦应变 · $H(ni)$ ，

式中 $H(ni) = [H(s)]_{s=ni}$ ，而 $i = \sqrt{-1}$ 。

令 ε_p 、 ε_q 和 ε_r 分别表示振动力，阻尼力和端阻三者的应变所引起的管柱恒态切面应变，下面列举求这三部份应变所需的 $H(o)$ 和 $H(ni)$ 。振动力应变 $pe(\zeta - \varphi)$ 为余弦函数，它只要乘以 $H_p(ni)$ 即为 ε_p ，这里单频只用到 $n=1$ 的而双频要用 $n=1$ 和 $n=2$ 两者；

$$H_p(ni) = \left[\frac{\sinh sz}{\sinh sl} \right]_{s=ni} = \frac{\sin nz}{\sin nl} \quad (n=1 \text{ 或 } 2)。$$

ε_q 因 \dot{x} 式中当 $v \neq 0$ 时有常量和正弦函数两项所以 $H(o)$ 和 $H(ni)$ 都要用到，现列如下：

$$H_q(o) = \begin{cases} -z \left(1 - \frac{l_0}{l} \right), & z \leq l_0 \\ -l_0 \left(1 - \frac{z}{l} \right), & z \geq l_0 \end{cases} ,$$

$$H_q(ni) = \begin{cases} \frac{\sin nz \sin n(l-l_0)}{n \sin nl}, & z \leq l_0 \\ \frac{\sin n(l-z) \sin nl_0}{n \sin nl}, & z \geq l_0 \end{cases} \quad (n=1 \text{ 或 } 2)。$$

至于 ε_r 则作用着的端阻应变 $-p(\beta x + \lambda x^2)$ 并非 ζ 的简单函数须另加考虑了。但 x 既然要用刚体运动中只含本谱的近似式，而且实测应力资料表明本谱毕竟还是最重要的，我们认为 $\beta x + \lambda x^2$ 也可将其化为和振动力项数相等的富利叶级数而略去其高频的次谱项。这样， ε_r 也可用 $H_r(o)$ 和 $H_r(ni)$ 求出了，且

$$H_r(o) = 1 - \frac{z}{l} = 1 - \frac{Z}{L} ,$$

$$H_r(ni) = \frac{\sin n(l-z)}{\sin nl} \quad (n=1 \text{ 或 } 2)。$$

由于整个解的近似性质，我们想将形式比较复杂的 $H(ni)$ 也加以简化。简化的途径是正弦近似地用其宗量替代。经研究这样做最大误差约 10% 多，应该说是可容许的。将前得各 $H(ni)$ 式中正弦都用其宗量替代则 $n=1$ 和 $n=2$ 者结果相同，且它们又和其相应的 $H(o)$ 相同，即

$$H_p(ni) = \frac{z}{l} = \frac{Z}{L} ,$$

$$H_q(ni) = H_q(o) = \begin{cases} -z \left(1 - \frac{l_0}{l} \right), & z \leq l_0 \\ -l_0 \left(1 - \frac{z}{l} \right), & z \geq l_0 \end{cases} ,$$

$$H_r(ni) = H_r(o) = 1 - \frac{Z}{L} 。$$

令 $f_q(T)$ 和 $f_r(T)$ 表示化为和振动力项数相同的富利叶级数的 \dot{x} 和 $\beta x + \lambda x^2$, 那么用近似的 H 后管柱恒态切面应变 $\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_q + \varepsilon_r$ 的公式可写出如下:

$$\varepsilon = p \left[\frac{Z}{L} e(\zeta - \varphi) - \eta \mu f_q(T) - \left(1 - \frac{Z}{L} \right) f_r(T) \right]$$

$$\eta = \begin{cases} \left(\frac{1}{L_0} - \frac{1}{L} \right) Z, & Z \leq L_0 \\ 1 - \frac{Z}{L}, & Z \geq L_0 \end{cases} \quad (9)$$

因 $p = \frac{P}{E F}$, 式(9)又可写成 $\varepsilon F F = P \left[\frac{Z}{L} e(\zeta - \varphi) - \eta \mu f_q(T) - \left(1 - \frac{Z}{L} \right) f_r(T) \right]$ 。

令 σ_s 为钢筋恒态应力, C 为换算切面积, 即 $C = \frac{F + (N-1)F_s}{N}$, F_s 为钢筋断面积, N 为钢对混凝土的弹性模量比值, 则 $\varepsilon E F = \sigma F = \sigma_s C$ 。令 $p_s = \frac{P}{C}$, 最后得钢筋混凝土管柱中钢筋恒态振沉应力一般公式如下:

$$\sigma_s = p_s \left[\frac{Z}{L} e(\zeta - \varphi) - \eta \mu f_q(T) - \left(1 - \frac{Z}{L} \right) f_r(T) \right]$$

$$\eta = \begin{cases} \left(\frac{1}{L_0} - \frac{1}{L} \right) Z, & Z \leq L_0 \\ 1 - \frac{Z}{L}, & Z \geq L_0 \end{cases} \quad (10)$$

要得到实际钢筋应力须具体地算出 $f_q(T)$ 和 $f_r(T)$ 代入式(10)后将互有周相差的三部份应力加合起来才行。这应力的变化有时还是比较复杂的, 下面再说明。这里先看一下 H 如上述近似化后振动力、阻尼和端阻三者所引起的应力, 即式(10)右边的第一、二和三项, 分开来独立计算时它们是如何循管柱长度变化的。

容易看出一、三两项是 Z 的线性函数, 而第二项为分段线性者, 如图4所示。其中后者值得研讨一下。从纵向变化看, 阻尼引起的管柱应力总以土面处那个切面者最大, 即式(10) η 的最大值为 $Z = L_0$ 时的 $1 - \frac{L_0}{L}$ 。再进一步研究 $\frac{L_0}{L}$ 多大时阻尼应力最大须注意 μ 是随 L_0 增加而比例地增加的, 即最大阻尼应力 $\propto L_0 \left(1 - \frac{L_0}{L} \right)$ 。可看出

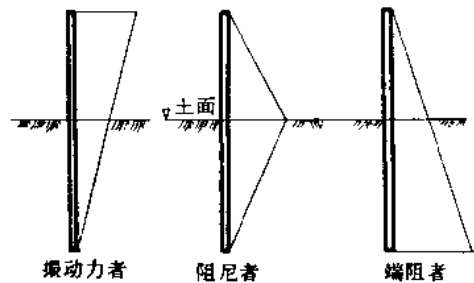


图4 各部份应力循管柱长度的变化

当 $\frac{L_0}{L} = \frac{1}{2}$ 这部份应力最大, 即若土的动态阻力系数不变, 管柱入土深度为其总长的一半时侧面阻尼所引起的土面处最大应力比其他任何入土深度者要大。

下面分单、双频说明振沉时管柱中钢筋恒态应力变化情况。

(甲) 单频振动力

$e(\zeta - \varphi) = \cos(\zeta - \varphi)$ 。至于 $f_q(T)$ 和 $f_r(T)$ 须照 $v=0$ 和 $v \neq 0$ 分别计算, 后一情况应将含有 ζ , ζ^2 和 $\zeta \cos \zeta$ 各项在 0 到 2π 之间展开成一项的富利叶级数。只考虑本谱的恒态应力当然仍为余弦函数, 其算式列下:

$$\sigma_s = p_s [-A_k + \sqrt{A_c^2 + A_s^2} \cos(\xi - \psi)];$$

$$\tan \psi = A_s / A_c;$$

$$A_k = \left(1 - \frac{Z}{L}\right) \left[\beta w + \lambda \left(w^2 + \frac{1}{2} a^2\right)\right],$$

$$A_c = \frac{Z}{L} \cos \varphi + \left(1 - \frac{Z}{L}\right) (\beta + 2\lambda w) a, \quad v=0$$

$$A_s = \frac{Z}{L} \sin \varphi - \eta \mu a \tag{11}$$

$$A_k = \eta \mu v + \left(1 - \frac{Z}{L}\right) \left[\pi \beta v + \lambda \left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{4}{3} \pi^2 v^2\right)\right],$$

$$A_c = \frac{Z}{L} \cos \varphi + \left(1 - \frac{Z}{L}\right) (\beta a - 4\lambda v^2 + 2\pi \lambda v a), \quad v \neq 0$$

$$A_s = \frac{Z}{L} \sin \varphi - \eta \mu a + \left(1 - \frac{Z}{L}\right) (2\beta + 4\pi \lambda v - \lambda a) v$$

若 σ_- 和 σ_+ 为最大压应力(数值)和最大拉应力,则

$$\begin{cases} \sigma_- \\ \sigma_+ \end{cases} = p_s (\sqrt{A_c^2 + A_s^2} \pm A_k) \tag{12}$$

$v=0$ 时由式(4)第一个方程得 $\beta w + \lambda(w^2 + \frac{1}{2}a^2) = \gamma$, 式(11)中的 $A_k = (1 - \frac{Z}{L})\gamma$,

因而各切面的最大应力差 $\sigma_- - \sigma_+$ 是不受土阻力大小和振沉参数的影响的。各切面相角 ψ 不相等,它由上端的 $\psi = \varphi$,即振动力者,渐变到下端的 $\psi = 0$,即端阻者。这里因 $v=0$ 位移成纯振动,端阻相角和位移者相符。

$v \neq 0$ 时用式(6)得式(11)中的 $A_k = \left[\eta - \left(1 - \frac{Z}{L}\right)\right]\mu v + \left(1 - \frac{Z}{L}\right)\gamma$, 现在仅土面以上各切面($\eta = 1 - \frac{Z}{L}$)的最大应力差不受土阻力和振沉参数的影响了。至于相角 ψ 除上端当然仍为 $\psi = \varphi$ 外,下端应力者为 $\psi = \frac{(2\beta + 4\pi \lambda v - \lambda a)v}{\beta a - 4\lambda v^2 + 2\pi \lambda v a}$,这也即端阻和位移振动部份之间的周相差。

$v \neq 0$ 而 $a=0$ 相当于管柱无振动地以匀速下沉,这时切面钢筋应力另有些特点。 $a=0$ 则由式(6)得 $\cos \varphi = -4\lambda v^2$, $\sin \varphi = (2\beta + 4\pi \lambda v)v$; 代入式(11)得 $A_c = -4\lambda v^2 = \cos \varphi$, $A_s = (2\beta + 4\pi \lambda v)v = \sin \varphi$, 所以各切面最大应力之和 $2p_s \sqrt{A_c^2 + A_s^2}$ 和相角 $\psi = \varphi$ 都是相等的。

(乙) 160型双频锤振动力

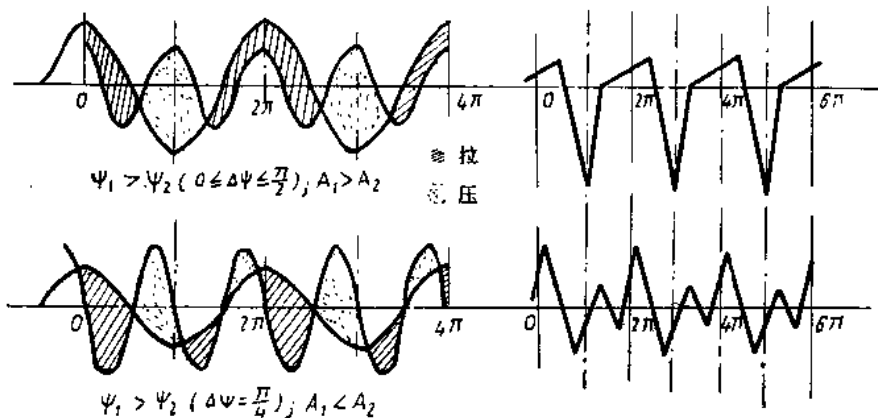


图5 双频振动力(160型锤)钢筋恒态应力波两例

$c(\zeta - \varphi) = \cos(\zeta - \varphi) - \cos 2(\zeta - \varphi)$ 。 $f_q(T)$ 和 $f_r(T)$ 分 $v=0$ 和 $v \neq 0$ 者计算，后者应将含有 ζ ， ζ^2 和 $\zeta(\cos \zeta - \cos 2\zeta)$ 各项在 0 到 2π 之间展开成两项的富利叶级数。只取和振动力频率相同的本谱时钢筋恒态应力算式为：

$$\begin{aligned} \sigma_s &= p_s [-A_k + A_1 \cos(\zeta - \psi_1) - A_2 \cos 2(\zeta - \psi_2)] ; \\ A_1 &= \sqrt{A_{c1}^2 + A_{s1}^2} , \quad A_2 = \sqrt{A_{c2}^2 + A_{s2}^2} ; \\ \tan \psi_1 &= \frac{A_{s1}}{A_{c1}} , \quad \tan \psi_2 = \frac{-A_{c2} \pm \sqrt{A_{c2}^2 + A_{s2}^2}}{A_{s2}} ; \\ A_k &= \left(1 - \frac{Z}{L} \right) [\beta w + \lambda(w^2 + a^2)] , \\ A_{c1} &= \frac{Z}{L} \cos \varphi + \left(1 - \frac{Z}{L} \right) (\beta + 2\lambda w + \lambda a) a , \\ A_{s1} &= \frac{Z}{L} \sin \varphi - \eta \mu a , \quad v=0 \\ A_{c2} &= -\frac{Z}{L} \cos 2\varphi + \left(1 - \frac{Z}{L} \right) \left(\beta + 2\lambda w + \frac{1}{2} \lambda a \right) a , \\ A_{s2} &= -\frac{Z}{L} \sin 2\varphi - 2\eta \mu a ; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} A_k &= \eta \mu v + \left(1 - \frac{Z}{L} \right) \left[\pi \beta v + \lambda \left(a^2 + \frac{4}{3} \pi^2 v^2 \right) \right] , \\ A_{c1} &= \frac{Z}{L} \cos \varphi + \left(1 - \frac{Z}{L} \right) [\beta a + \lambda(a^2 + 2\pi v a - 4v^2)] , \\ A_{s1} &= \frac{Z}{L} \sin \varphi - \eta \mu a + \left(1 - \frac{Z}{L} \right) \left[2\beta - \lambda \left(2 \frac{1}{3} a - 4\pi v \right) \right] v , \quad v \neq 0 \\ A_{c2} &= \frac{Z}{L} \cos 2\varphi + \left(1 - \frac{Z}{L} \right) \left[\beta a + \lambda \left(\frac{1}{2} a^2 + 2\pi v a + v^2 \right) \right] , \\ A_{s2} &= \frac{Z}{L} \sin 2\varphi - 2\eta \mu a + \left(1 - \frac{Z}{L} \right) \left[\lambda \left(2 \frac{1}{6} a - 2\pi v \right) - \beta \right] v . \end{aligned}$$

上式中 $\tan \psi_2$ 是由 $\tan 2\psi_2 = \frac{A_{s2}}{A_{c2}}$ 求出的。

检查一下式 (12) 则 $Z=L$ 时 $A_k=0$ ， $A_1=A_2=1$ ， 又 $\psi_1=\psi_2=\varphi$ ， 应力即振动力者， 这是对的。要研究其他切面应力波形看看该式 $A_1 \cos(\zeta - \psi_1) - A_2 \cos 2(\zeta - \psi_2)$ 曲线的形状就行了。一般地讲 A_1 和 A_2 以及 ψ_1 和 ψ_2 都不相等， 应力波形千变万化， 既无法也不必要一一来描绘。如图 5 仅示两种很不同的类型。到 $Z=0$ 的下端 $v=0$ 时应力波形（即端阻者）几乎和振动力者一样了， 但 $v \neq 0$ 则仍可有各色各样的波形。

实验中测量 160 型双频锤振动力作用下管柱中钢筋应力时， 确曾发现上述千变万化的应力波形， 但也常见波形和振动力者相似或基本上相似而稍有差别者。有必要来讨论一下这种所谓“相似”情况。先说振动力 $\cos \zeta - \cos 2\zeta$ （只讲波形可不必加 φ 角）的波形。它是两边有对称等高的拉峰各一， 峰间角度 209° ， 而在正中有一大压峰。根据这样的振动力波形来认辨钢筋应力波常见者有下列几种：

(1) 相同， $\psi_1=\psi_2$ 和 $A_1=A_2$

若 $\psi_1=\psi_2$ 则研究波形时不必加相角， 又 $A_1=A_2=A$ ， 应力波形由 $A(\cos \zeta - \cos 2\zeta)$ 给出， 这显然完全和振动力者相同。

(2) 相似, $\psi_1 = \psi_2$

这时从 $A_1 \cos \zeta - A_2 \cos 2\zeta$ 看应力波形, 它明显地仍在 $\zeta = \pi$ 的正中有一大压峰。拉峰位置可由 $\frac{d}{d\zeta} (A_1 \cos \zeta - A_2 \cos 2\zeta) = A_1 \sin \zeta - 2A_2 \sin 2\zeta = 0$ 求出。由该式得 $\cos \zeta = \frac{A_1}{4A_2}$ 。当 $A_1 = A_2$, 即相同情况, 拉峰位置在 $\zeta = 75^\circ 30'$ 和 $284^\circ 30'$, 峰间角度 209° 。今 $A_1 \neq A_2$ 则拉峰仍为对称地两边各一, 即应力波形是和振动力者相似的, 但峰间角度不等于 209° 了。 $A_1 > A_2$ 时左边拉峰的 $\zeta < 75^\circ 30'$, 峰间角度大于 209° 而 $A_1 < A_2$ 时 $\zeta > 75^\circ 30'$, 峰间角度就小于 209° 了。

因相同不过是相似时 $A_1 = A_2$ 的特例, 以后可将 $\psi_1 = \psi_2$ 情况一概称之为相似者。图6示三种相似的应力波形。可看出 $A_1 > A_2$ 峰间角度大, 而相邻的很低小的拉峰紧靠拢着; 反之, $A_1 < A_2$ 时峰间角度小, 拉峰占的地位很多且较高大, 即相对地和压峰差得少了。从实测的应力波很容易认辨出这三种相似状态。

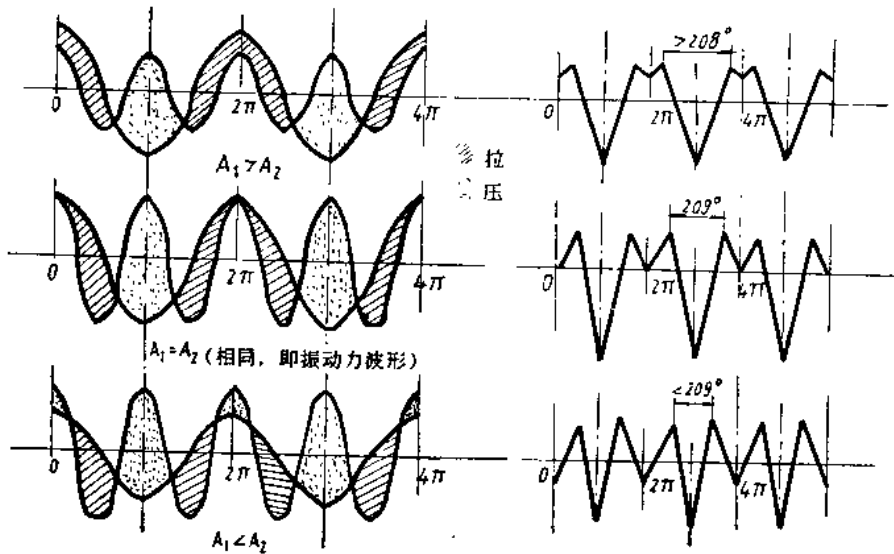


图6 双频振动力 (160型锤) $\psi_1 = \psi_2$ 相似情况钢筋恒态应力波

顺便还可将相似时最大压和拉应力算式写一下。最大压应力一看就知道, 只有最大拉应力须稍作计算。前已说明拉峰位置由 $\cos \zeta = \frac{A_1}{4A_2}$ 决定, 故 $\cos 2\zeta = 2\cos^2 \zeta - 1 = \frac{A_1^2}{8A_2^2} - 1$ 。

代入 $\sigma_s = p_s (-A_k + A_1 \cos \zeta - A_2 \cos 2\zeta)$ 应力公式得 $\sigma_+ = p_s \left[-A_k + \frac{A_1^2}{4A_2} - A_2 \left(\frac{A_1^2}{8A_2^2} - 1 \right) \right]$
 $= p_s \left(-A_k + \frac{A_1^2}{8A_2} + A_2 \right)$ 。现列两最大应力公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_- &= p_s (A_k + A_1 + A_2) \\ \sigma_+ &= p_s \left(-A_k + \frac{A_1^2}{8A_2} + A_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(3) 近似, $\psi_1 \approx \psi_2$

若 $\psi_1 \neq \psi_2$ 但两者相差不多, 那么看图6应力波形时想象两组成部份的波若位置相互稍移动, 相邻两拉峰就不会等高了, 压峰也将稍离开正中位置。拉峰不等高在图形上最容易认辨出来, 所以我们常看到实测应力波拉峰有左低右高或左高右低者。

(4) 膺似, $\psi_1 = \psi_2 + \pi$

若 $\psi_1 = \psi + \pi$, $\psi_2 = \pi$ 则 $A_1 \cos (\zeta - \psi_1) - A_2 \cos 2(\zeta - \psi_2) = A_1 \cos (\zeta - \psi - \pi) - A_2 \cos 2(\zeta$

$-\psi) = -A_1 \cos(\zeta - \psi) + A_2 \cos 2(\zeta - \psi)$ 。这等于将图 6 的左边图中低频波往左移 π ，或不移动则将它上下倒转过来，结果原曲线可保留不变，但原为拉应力区现变压应力者而原为压现变拉。这样，该图右边应力波须上下颠倒过来了。膺似也就是这种颠倒相似，它在实测应力波中也发现过。膺似情况最大应力仍可用式(13)计算，不过上式为拉而下式为压应力而已。

三、土阻力表达方式讨论

前面根据土阻力为粘滞性阻尼和非对称、非线性且连续地作用的端阻恢复力，研究了只考虑本谐的恒态位移和钢筋应力。可检查一下这样所得应力公式能否同实验中实测应力资料符合。

实测应力资料表明应力波的频率确实多数和振动力者相同，而波形相似，尤其是双频应力资料其波形完全可由式(12)描绘，占多数的相似波更和第二节中指出情况吻合。图 7 示两张典型的记录照片。此外，实测应力突变者很少，下端附近切面拉应力相当大，这些都和我们假定端阻可有相当大拉力恢复力并为连续地作用而非上升到某一高度突减为零者符合。

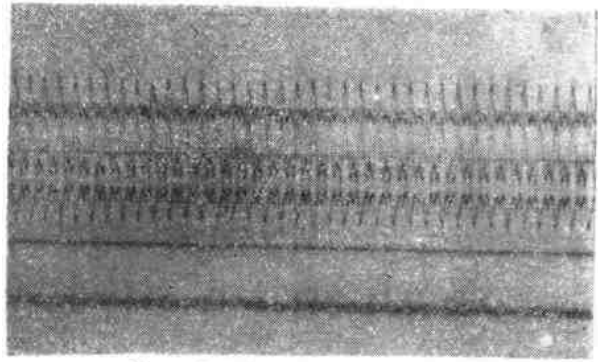


图 7 典型的双频应力波记录照片

实测单频应力曾发现过有主要由本谐和振幅与本谐者可比拟的两倍频率次谐组成者。这和我们假定的土阻力中端阻 $\beta x + \lambda x^2$ 也相适应，因端阻非线性项为位移的二次方，最可能的主要次谐当为频率两倍于本谐者。

不论单、双频，实测应力中也有少数明显地含有一种频率极高而振幅很小的次谐。由于我们采用了非线性土阻力表达式，这些都是可以进一步研究的。

从上述可知我们建议的土阻力表达式和所用分析法同实测应力资料对比是大致可认为满意的；而且只考虑本谐的近似解所不能照顾到的情况也有办法进一步研究。

当然，振沉时土阻力表达方式除了我们所建议者外还有许多模型值得注意，其中如刚塑性和弹塑性者苏联有许多人在进行研究^[9~11]。弹塑性阻力计算太繁很难应用，这里不提了。下面简短地研讨一下刚塑性土阻力的振沉运动和振沉应力以便和我们所建议者进行比较。为说明简单起见写公式只限于单频振动力者。

所谓刚塑性土阻力是指恒态运动时阻尼为库伦摩擦，即阻尼力为常量但方向和速度者相反，而端阻也为常量，它只作用于下端沉入一周开始时原土面后。若 $Q_0 =$ 单位侧面积摩擦力， $R_0 =$ 刃脚单位周线长端阻，位移 X 原点在管柱速度为零而恰要上升时位置，其他符号和前用者相同，那么写出单频振动力管柱恒态运动时任一一周的位移方程为：

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = G - P \cos(\omega t - \varphi) + \begin{cases} \pi D L_0 Q_0 & (\text{向上运动时}) \\ -\pi D L_0 G_0 & (\text{向下运动, 触及原土面以前}) \\ -\pi D L_0 G_0 - \pi D R_0 & (\text{向下运动, 沉入原土面后}) \end{cases}$$

将方程化为无量纲者，即用：

$$\zeta = \omega t, \quad x = \frac{G \omega^2}{P g} X, \quad \gamma = \frac{G}{P}, \quad Q = \frac{\pi D L_0 Q_0}{P}, \quad R = \frac{\pi D R_0}{P},$$

此外，以 ζ_1 表示管柱上升到顶， ζ_2 下降后触及原土面时间，见图8，则运动方程为：

$$\ddot{x} = \gamma - \cos(\zeta - \varphi) + \left. \begin{cases} Q (0 \leq \zeta \leq \zeta_1) \\ -Q (\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2) \\ -Q - R (\zeta_2 \leq \zeta \leq 2\pi) \end{cases} \right\} \quad (14)$$

上式给出的加速度 \ddot{x} 显然不是正余弦曲线。图8最上面振动力曲线的划线和加点部份给出式(14)的有突变的加速度 \ddot{x} 。视 γ 、 Q 和 R 以及 φ ， ζ_1 和 ζ_2 相对大小不同 \ddot{x} 曲线形状千变万化，当然总的特征仍在有突变。只有在一个极特殊的例子，即管柱不断下沉而从不上升时则 Q 方向不变且 R 连续地作用着，加速度曲线才会成正、余弦函数者。

将式(14)逐段积分后得：

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2} Q \zeta^2 (0 \leq \zeta \leq \zeta_1) \\ \frac{1}{2} \gamma \zeta^2 + \cos(\zeta - \varphi) - \zeta \sin \varphi - \cos \varphi - \frac{1}{2} Q \zeta^2 + 2Q \zeta_1 \zeta + Q \zeta_1^2 (\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2) \\ - \frac{1}{2} (Q + R) \zeta^2 + (2Q \zeta_1 + R \zeta_2) \zeta - Q \zeta_1^2 - \frac{1}{2} R \zeta_2^2 (\zeta_2 \leq \zeta \leq 2\pi) \end{cases} \quad (15)$$

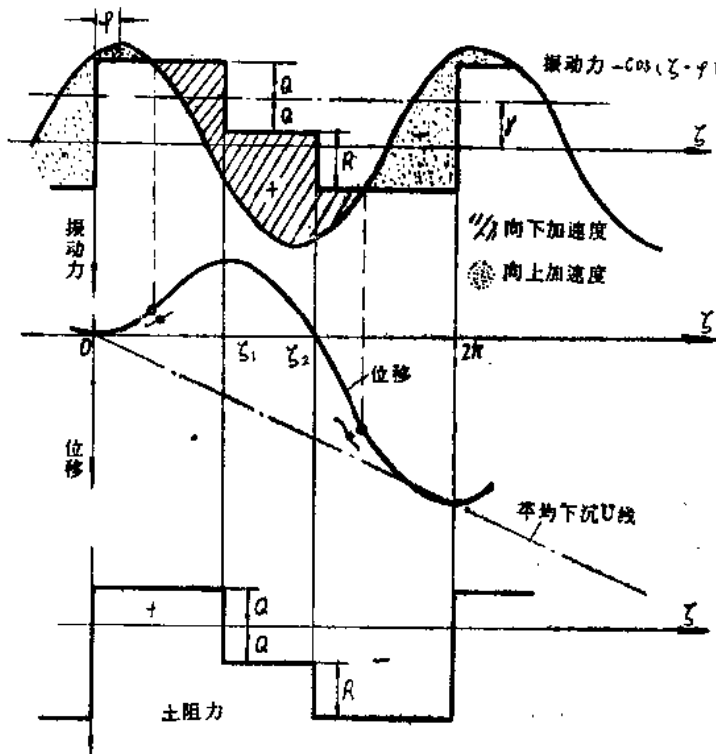


图8 刚塑性土阻力单频振沉位移

上式给出的位移是假定运动无停顿的，其曲线示于图8。从式(15)可得出三个规定 φ ， ζ_1 和 ζ_2 数值的条件方程 $\dot{x}(0) = 0$ ， $x(\zeta_2) = 0$ 和 $\dot{x}(2\pi) = 0$ ，即：