高中几何解题指南

郝雨淋 主编

高中几何解题指南

主编　翟连林　贾士代

编者　贾　磊　李登印　杨志刚　傅恩儒

　　　王保国　张　戈　许炽雄　王传勋

农村读物出版社

1989年·北京

内容简介

本书紧扣新颁布的高中数学教学大纲和全国通用高中数学课本，以教材内容为序，包括立体几何中的直线和平面，多面体和旋转体；平面解析几何中的直线，圆锥曲线，参数方程、极坐标.通过对历年全国高考、各地高考模拟和高中竞赛题的优秀数学试题以及典型的传统题的分析、解答、评注，阐明基础知识和基本技能的综合与灵活运用，揭示解题规律，开拓思路.

本书可作为高中学生、自学青年配合教材同步或全面用书，也可供高中数学教师和师范院校师生参考.

高中几何解题指南

主编 翟连林 贾士代

责任编辑 王炜琨

农村读物出版社 出版

世界知识印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

787×1092 毫米 1/32 11 印张 247 千字

1989 年 2 月第 1 版 1989 年 2 月北京第 1 次印刷

印数：1—17100 册 定价：3.40 元

ISBN7-5048-0517-3/G·171

前　言

为了帮助自学青年和高中学生扎扎实实地学好数学，开拓思路，发展思维，提高解题的应变能力，我们编写了《高中代数解题指南》和《高中几何解题指南》两本书.

这套书紧扣新颁布的高中数学教学大纲和全国通用高中数学课本，以教材内容为序，通过对历年来全国高考、各地高考模拟和高中竞赛的优秀数学试题以及对典型的传统题的分析、解答、评注，阐明基础知识和基本技能的综合与灵活运用，总结解题思路、方法，揭示解题规律.

为了使这套"解题指南"名符其实，我们特别从下列两个方面做了努力：

1.精选例题

在选题时，我们把注意力集中在最能体现概念、公式、法则的活用和解题的方法与技巧上，尽量使题目的解法耐人寻味，有较大的魅力，以利增进学生的浓厚兴趣.在题目编排的顺序上，以题组为主，由易到难,构成阶梯，便于读者循序渐进，逐级提高.

2.总结规律

为了使学生养成良好的学习习惯，注意解题后的反思，我们在每一节中都设有"解题小结"专栏，着重归结解题思路、方法与技巧.这样，利于读者抓住数学的实质，早日从机械模仿、照搬例题的低层次上升到举一反三、触类旁通的较高层次.

这套书可作为高中学生、自学青年配合教材的同步读物

和高中三年级学生全面复习的综合读物，也可供高中数学教师和师范院校师生参考.

由于我们的水平有限，书中错误难免，敬请广大读者斧正.

编　者

1988 年 8 月

目　录

第一篇　立体几何

第一章　直线和平面

第一节　平　　面

基 础 知 识

1.平面的基本性质

(1) 如果一条直线上有两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内；

(2) 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条经过这点的公共直线；

(3) 不共线的三点确定一个平面；

(4) 一条直线和线外一点确定一个平面；

(5) 两条相交直线确定一个平面；

(6) 两条平行直线确定一个平面.

2.直观图的斜二测画法规则

(1) 在已知的平面图形中，画互相垂直的两轴 Ox、Oy，画直观图时，作对应的两轴 $O'x'$、$O'y'$，使 $\angle x'O'y'=45°$ (或 $135°$)；

(2) 在直观图中，把已知的平面图形中平行于 Ox 轴或 Oy 轴的线段分别画成平行于 $O'x'$轴或 $O'y'$轴的线段,且使平行于 $O'x'$轴的线段的长等于原线段的长,平行于 $O'y'$轴的线

段的长是原线段长的一半.

典型例题

例 1 已知：四条直线 l_1、l_2、l_3、l_4 两两相交,且不共点.求证：它们必在同一平面内.

〔**证明**〕 l_1 与 l_2 相交$\Rightarrow l_1$、l_2 确定一个平面，记作 α.

设 $l_3 \cap l_1 = A$，$l_3 \cap l_2 = B$，

则　$A \in \alpha$、$B \in \alpha \Rightarrow l_3 \subset \alpha$.

同理，　$l_4 \subset \alpha$.

故 l_1、l_2、l_3、l_4 在同一平面内.

〔**评注**〕 证线共面(即几条直线在同一平面内)的基本方法是：先由两条相交直线或两条平行直线确定一个平面，然后证其他直线都在这个平面内.

例 2 四条线段顺次首尾相接，所得的四边形一定是平面图形吗？为什么？

〔**答**〕 不一定.如图 1-1.四条线段 AB、BC、CD、DA 顺次首尾连接，BDC 在平面 β 内，$A \notin \beta$，从而，四边形 $ABCD$ 不是平面图形，而是空间四边形.

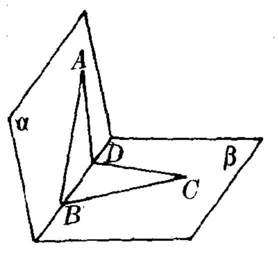

图 1-1

〔**评注**〕 在空间,直线形封闭图形中，只有三角形一定是平面图形，$n(n \geqslant 4)$边形不一定是平面图形.

例 3 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O_1 是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，对角线 A_1C 与 AB_1D_1 交于点 M(如图 1-2).求证：A、M、O_1 三点共线，且$\dfrac{O_1M}{MA}=\dfrac{1}{2}$.

〔证明〕 $\left.\begin{array}{l} A\in 平面A_1AC、O_1\in 平面A_1AC \\ A\in 平面AD_1B_1、O_1\in 平面AD_1B \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ 平面$A_1AC\cap$平面$AD_1B_1=O_1A$

$\left.\begin{array}{l} M\in A_1C \\ A_1C\subset 平面A_1C_1C \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow M\in 平面A_1AC \\ \Rightarrow M\in 平面AD_1B_1 \end{array}\right\}\Rightarrow M\in 平面A_1AC\cap 平面AD_1B_1$

$\Rightarrow M\in O_1A$

$\Rightarrow A、M、O_1$三点共线.

$\left.\begin{array}{l} A_1C_1 /\!/ AC\Rightarrow \dfrac{O_1M}{MA}=\dfrac{A_1O_1}{AC} \\ \dfrac{A_1O_1}{AC}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \dfrac{O_1M}{MA}=\dfrac{1}{2}$.

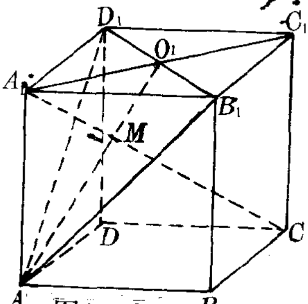

图1－2

例 4 已知: ABC 与 $A_1B_1C_1$ 分别在两个相交的平面 β 和 α 内，且 $AA_1\cap BB_1\cap CC_1=O$，$AB\cap A_1B_1=M$，$BC\cap B_1C_1=N$，$AC\cap A_1C_1=P$(如图 1–3).求证：M、N、P 三点共线.

[证明]

$\left.\begin{array}{l} M\in AB \\ AB\subset\beta \end{array}\right\}\Rightarrow M\in\beta$

$\left.\begin{array}{l} M\in A_1B_1 \\ A_1B_1\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow M\in\alpha$

$\Rightarrow M\in\alpha\cap\beta$

同理 $N\in\alpha\cap\beta$，$P\in\alpha\cap\beta$

$\Rightarrow M、N、P$三点共线.

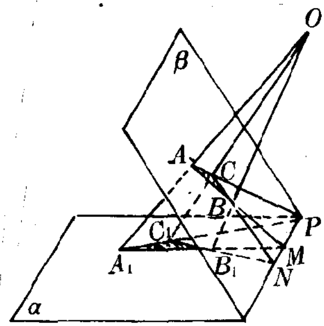

图1－3

[评注] 由例 3 和例 4 知，证三点共线，可考虑证这三点在某两个平面的交线上.

例 5 已知 $\alpha \cap \beta = l$，$A \in \alpha$，$B \in \beta$，$A \notin l$，$B \notin l$，试在 l 上求一点 X，使 $AX+BX$ 为最小.

[作法] 如图 1–4，在 α 内，过 A 作 $AC \perp l$ 于 C，在 β 内，过 C 作 $A_1C \perp l$，且使 $A_1C = AC$，连结 A_1B 交 l 于 X，则 X 即为所求.

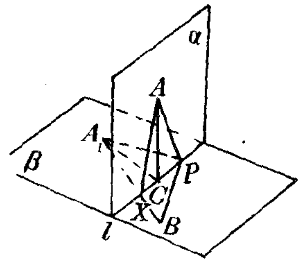

图 1–4

[证明] 设 P 是 l 上任一点，连结 AP、BP、A_1P.

$$\left.\begin{array}{l} AC = A_1C \\ \angle ACX = \angle A_1CX \\ CX = CX \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ACX \cong \quad A_1CX$$

$$\Rightarrow AX = A_1X.$$

同理 $\left.\begin{array}{l} ACP \cong \quad A_1CP \Rightarrow AP = A_1P \\ A_1PB \Rightarrow A_1P + PB \geqslant A_1B \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow AP + PB \geqslant A_1X + XB \\ A_1X = AX \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AP + PB \geqslant AX + XB,$$

即 $AX + BX$ 为最小.

[评注] 本解法的特点是把空间中的最小值问题转化为平面上的最小值问题，它体现了解证立体几何题的一条重要思路——把立体几何题转化为平面几何题.

例 6 按斜二测画法作四边形 $ABCD$(如图 1–5)的直观图.

【作法】(1) 在四边形 $ABCD$ 中，作 $DO\perp AB$ 于 O，取直线 OB 为 x 轴，OD 为 y 轴(如图 1-5)，作 $CE\perp AB$ 于 E.

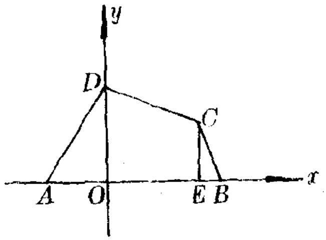

图 1-5

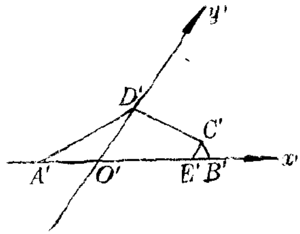

图 1-6

(2) 如图 1-6，作 $O'x'$轴、$O'y'$轴，使$\angle x'O'y'=45°$. 在 $O'x'$上，取 $A'O'=AO$，$O'E'=OE$，$E'B'=EB$，在 $O'y'$ 轴上，取$O'D'=\frac{1}{2}OD$，作 $E'C'\parallel O'y'$，且$E'C'=\frac{1}{2}EC$; 连结 $D'A'$、$C'B'$.擦去辅助线，所得四边形 $A'B'C'D'$即为所求.

例 7 如图 1-7， $A'O'C'$是 AOC 的水平放置的直观图，$A'D'$是边 $O'C'$上的中线.按图判断原 AOC 的四条对应线段 AO、OC、CA、AD 中最长的是______，最短的是_______.

【思路】 由直观图画出原 AOC；再判断.

【解】 由直观图 1-7，画出 AOC 及其中线 AD(如图 1-8).观察图易得 AC 最长，OC 最短.

【评注】 本题的特点是由直观图联想原平面图，它是由平面图画直观图的逆问题，其思维方法是逆向思维，逆向思维是一种重要的学习方法.

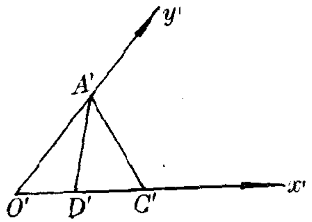

图 1-7

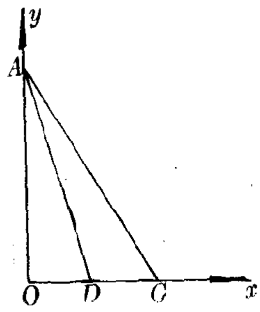

图 1-8

方 法 小 结

本节学习的解题方法主要有:

1. 证线共面法

证几条直线在同一平面内，可先由确定平面的公理或推论确定一个平面，然后再证这几条线都在这个平面内.

2.证点共线法

证三点共线，可证这三点在两个相交平面的交线上.

3.转化为平面几何法

解证立体几何题的主要思路是，把立体几何题转化为平面几何题，用平面几何知识去解.转化的途径是确定平面，因此，有关确定平面的公理、定理是立体几何的基础，必须牢记.

4.逆向思维法

逆向思维是与习惯性思维方向相反的思维，它在立体几何中有广泛的应用.对每一个问题，从相反方向思考，可发现新问题、产生新定理.对知识（定义、定理、法则等），不仅要学会正向应用，而且还要学会反向应用，这样才能得心

应手、左右逢源.

习 题 精 荟

1. 已知 α、β 是相交的两个平面，$\alpha\cap\beta=l$，$M\in\alpha$，$N\in\alpha$，$P\in\beta$，且 $M\notin l$，$N\notin l$，$P\notin l$，又直线 $MN\cap l=Q$，过 M、N、P 三点的平面为 γ，则 $\beta\cap\gamma=$(　　).

(A) PQ；(B) PM；(C) PN；(D) MN.

2. (1) 共点的三条直线最多可确定__________个平面；

(2) 不共面的四点可确定__________个平面.

3. 求证：若空间四边形 $ABCD$ 的内接平面四边形 $EFGH$(E、F、G、H 分别在边 AB、BC、CD、DA 上)的一组对边 EH、FG 的延长线交于点 M，则 M 必在对角线 BD 的延长线上.

4. 求证：如果一条直线与 $n(n\in N，n\geqslant 2)$条平行线都相交，那么这 $n+1$ 条直线共面.

5. 在空间四边形 $ABCD$ 中，已知 Q、X、P、Y 分别在 AD、AB、BC、DC 上，且$\dfrac{AX}{XB}=\dfrac{DY}{YC}$，$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{AQ}{QD}$. 求证：直线 QX、DB、YP 相交于一点.

6. 线段 AB 与平面 α 不平行，P 为 α 外一点，且 AP、BP 的延长线与 α 分别交于 A_1、B_1. 求证：不论点 P 的位置如何，直线 A_1B_1 恒过一个定点.

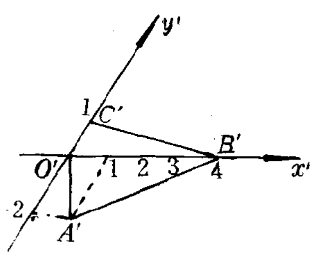

图 1–9

7. 已知四边形 $ABCO$ 的直观图 $A'B'C'O'$，如图 1–9 所示.求四边形 $ABCO$ 的各边长.

习题答案或揭示

1. (A).

2. (1) 3; (2) 4.

3. 证 $M \in$ 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$.

4. 先证：若一条直线与两条平行线相交，则这三条直线共面.

5. 用梅涅劳斯(Menelaus)定理证 QX 和 DB 的交点 R_1 与 YP 和 DB 的交点 R_2 重合.

6. 定点是 $AB \cap \alpha = Q$.

7. $|CO| = 2$, $|AO| = \sqrt{17}$, $|AB| = 5$, $|CB| = 2\sqrt{5}$.

第二节　空间两条直线

基 础 知 识

1. 两条直线的位置关系

(1) 在同一平面内$\begin{cases}\text{相交(只有一个公共点)},\\ \text{平行(没有公共点)};\end{cases}$

(2) 不在同一平面内——异面.

2. 关于平行直线定理

(1) 平行于同一直线的两条直线平行(三线平行公理).

(2) 若两个角的两边分别平行且方向相同，则这两个角相等(等角定理).

3. 异面直线

(1) 异面直线的定义

不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

(2) 异面直线所成角

过空间任一点，分别作两条异面直线的平行线，则所作两直线夹的锐角或直角叫做这两条异面直线所成的角.

(3) 异面直线的距离

异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段长叫做两条异面直线的距离.

典 型 例 题

1. 异面直线的概念与判断

例 1　已知直线 a、b 是异面直线，$c \parallel a$，$b \cap c = \varPhi$.求证：b 与 c 是异面直线.

[证明] 假设 b、c 不是异面直线，则它们在同一平面内.

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}&b\cap c=\Phi\\&b\text{、}c\text{共面}\end{aligned}\right\}\Rightarrow b\parallel c\\&c\parallel a\end{aligned}\right\}\Rightarrow a\parallel b\\&a\text{、}b\text{异面}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\text{矛盾}.$$

于是，b 与 c 是异面直线.

[评注] 证异面直线一般用反证法和空间两条直线的位置关系.

例 2 求作三条直线 a、b、c，使它们每两条都是异面直线.

[解] 如图 1–10，作三个两两相交的平面 α、β、γ.

在 γ 内作直线 c，设 $A\in\alpha\cap\gamma$，$A\notin c$，在 α 内过 A 作直线 a，则 a 与 c 是异面直线.

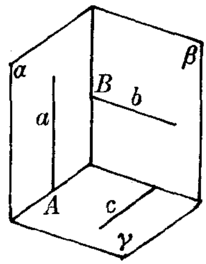

图 1–10

设 $B\in\alpha\cap\beta$，且 $B\notin a$，在 β 内过 B 作直线 b，使 $b\cap c\cap(\beta\cap\gamma)=\Phi$，则 a 与 b 是异面直线，b 与 c 是异面直线.于是，a、b、c 即为所求.

[评注] 本作法用到异面直线的一个判定定理：平面内一点与平面外一点的连线，和平面内不经过该点的直线是异面直线.

2. 异面直线所成角与距离

例 3 已知 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体，求异面直线 A_1C 与 AB_1 所成角的大小.

[思路] 利用异面直线所成角的定义，过 A_1 作与 B_1A 平行的直线.

[解] 如图 1–11.延长 BA 至 E，使 $AE=AB$，连结