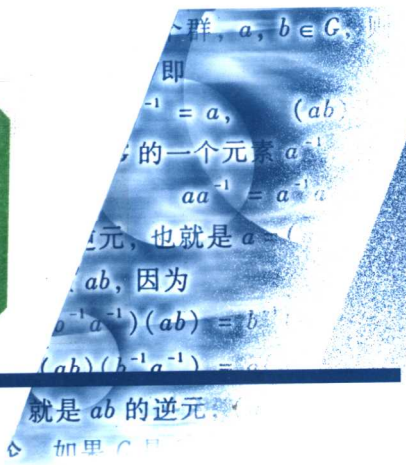
JINSHIDAISHUJICHU

近世代数基础

● 牛凤文 编



吉林大学
出版社

近世代数基础

牛凤文　编

吉林大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

近世代数基础/牛凤文编. —长春：吉林大学出版社，2002.8
ISBN-7-5601-2729-0

Ⅰ.近… Ⅱ.牛… Ⅲ.抽象代数—高等学校—教材 Ⅳ.0153

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 050494 号

近世代数基础

牛凤文 编

责任编辑、责任校对：赵洪波　　封面设计：孙 群

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行
（长春市解放大路 125 号）　　长春市永昌福利印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32　　2002 年 8 月第 1 版
印张：6.25　　2002 年 8 月第 1 次印刷
字数：146 千字　　印数：1—1 000 册

ISBN 7—5601—2729—0/O·278　　定价：9.50 元

前　言

近世代数课是数学专业本科生的基础课，讲述基本代数体系的结构. 本书分别介绍群、环、模的结构理论. 群的理论在历史上出现得最早，研究内容最丰富，研究方法最具典型性，同时也是代数学中应用最广泛的分支，本书略深入地讨论了群论的几个重要课题.

抽象代数的思想方法正向各个科学领域渗透并不断产生新的分支，本书不追求知识的完整性而力求把有关商、同态、扩张等重要的思想方法的内涵讲透.

定理和命题的选择不只注重其本身在理论体系中的重要性，也考虑到它的证明方法的示范性.

本书是在笔者多年于吉林大学讲授近世代数课所用的各种讲义的基础上，吸收自己的老师、同事们的教学改革成果，逐步修改完成的.

一般情况，在60个学时内可顺利完成全部教学内容. 如果时间不充裕，第三章§5和第七章§3的内容可酌情删减，而不影响整体连贯性.

作者真诚地期待同行和读者提出宝贵意见.

牛凤文

2002年4月

目　录

记　号

本书用大写英文字母 A, B, C, … 代表集合，用小写英文字母 a, b, c, … 代表元素.

$a \in A$ 表示 a 是集合 A 的一个元素，也说 A 含 a 或 a 属于 A，a 在 A 中.

$a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 的元素，a 不在 A 中，也说 a 不属于 A，A 不含 a.

$A \subseteq B$ 表示集合 A 是 B 的子集，A 的每个元素都是 B 的元素.

$A \subseteqq B$ 但 $A \neq B$，则说 A 是 B 的真子集.

用 $\varnothing$ 代表空集，空集是任意集合的子集.

用 $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ 分别代表正整数集、非负整数集（自然数集）、整数集、有理数集、实数集和复数集.

集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的**幂集合**. 集合 A 的若干子集组成的集合称为 A 的一个**子集族**. 有时把 A 隐去简称为集族.

设 A 是一个集合，I 是个集合，I 的每个元素 i 对应 A 的一个子集 A_i，则说集族

$$\{A_i \mid i \in I\} \tag{1}$$

是用 I 标号的，I 是该集族的**标号集**.

集族(1)中所有集合的交集记为 $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$，即

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in A_i, \text{对所有 } i \in I\}.$$

集族(1)中所有集合的并记为 $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$，即

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in A_i, \text{对某个 } i \in I\}.$$

也就是说，交集是由所有 A_i 的公共元素组成，而并集把各个 A_i 的元素放在一起.

用 $A \times B$ 代表集合 A、B 的笛卡尔积，即

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

这里，若 $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$，那么

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

当且仅当 $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

第一章　关系与运算

§1　映　射

设 A、B 是集合. 如果有一个对应规则 f, 使得集合 A 中的每个元素 a 都对应 B 中一个确定的元素 b, 则说这个对应 f 是从集合 A 到集合 B 的一个**映射**, 记成

$$f: A \to B,$$

$$f: a \to b.$$

也写成 $f(a) = b$.

设 A 是个集合, 规定

$$i_A: A \to A,$$

$$i_A: a \to a.$$

这个映射称为**恒等映射**, 又因为人们习惯于把 A 到自身的映射称为 A 上**变换**, 故 i_A 也称为 A 上**恒等变换**.

定义 1　设 f 是集合 A 到集合 B 的映射, 称集合

$$\{y \in B \mid \text{有 } a \in A \text{ 使 } y = f(a)\}$$

为映射 f 的**象**, 记为 $\mathrm{Img}(f)$, 或 $f(A)$.

当 $\mathrm{Img}(f) = B$ 时, 说 f 是满的, 或说 f 是个**满射**.

当 A 中不同元素对应 B 中不同元素时, 即 $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, 则有 $f(a_1) \neq f(a_2)$, 我们说 f 是单的, 或者说 f 是**单射**.

如果 f 是单射又是满射, 则说 f 是个**双射**.

定义 2　设 A, B, C 是集合, 且 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 是映射. 规定, 任意 $a \in A$ 对应 C 中元 $g(f(a))$, 这是 A 到 C 的映射, 称为 f, g 的**复合映射**, 记为 $g \circ f$ 或 gf, 即

$$g \circ f: A \to C,$$
$$g \circ f: a \to g(f(a)).$$

我们知道，两个映射

$$f_1: A_1 \to B_1, \qquad f_2: A_2 \to B_2$$

相等的含意是 $A_1 = A_2$，$B_1 = B_2$ 且对任意 $a \in A_1$ 恒有 $f_1(a) = f_2(a)$，也就是 f_1 和 f_2 对于 A_1 的每个元素作用相同.

命题 1 设 A、B、C、D 是集合，那么对任意映射

$$f: A \to B, \qquad g: B \to C, \qquad h: C \to D$$

恒有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

证明 容易看出 $h \circ (g \circ f)$ 和 $(h \circ g) \circ f$ 都是 A 到 D 的映射，且对任意 $a \in A$，有

$$h \circ (f \circ g)(a) = h(g \circ f)(a) = h(g(f(a)))$$
$$= h \circ g(f(a)) = (h \circ g) \circ f(a).$$

命题 2 设 A、B 是集合，$f: A \to B$ 是映射，则

$$f \circ i_A = i_B \circ f = f.$$

命题 3 设 A、B 是集合，$f: A \to B$ 是双射，则有 $g: B \to A$ 使

$$g \circ f = i_A, \quad f \circ g = i_B.$$

证明 由于 f 是满射，对于任意 $b \in B$，必有 $a \in A$ 使 $f(a) = b$，而 f 又是单的，故在 A 中有唯一确定的 a 使 $f(a) = b$，规定

$$g: B \to A,$$
$$g: b \to a, \quad f(a) = b,$$

g 是 B 到 A 的映射.

对任意 $b \in B$，设 $f(a) = b$，则 $g(b) = a$，故

$$f \circ g(b) = f(g(b)) = f(a) = b = i_B(b),$$

从而 $f \circ g = i_B$.

对任意 $a \in A$，设 $f(a) = b$，亦有 $g(b) = a$，故

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = a = i_A(a),$$

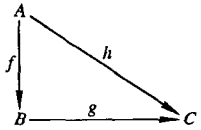
从而得 $g \circ f = i_A$.

对于复合映射使用图形语言有时是很方便的.

定义 3　设 A、B、C 是集合，若映射

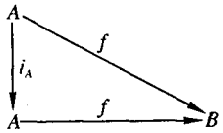
$$f: A \to B, \quad g: B \to C, \quad h: A \to C$$

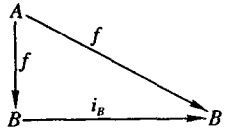
满足关系 $h = g \circ f$，则说**图形**



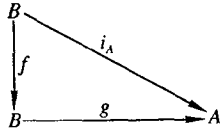
可换.

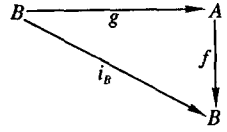
例如，命题 2 即图形



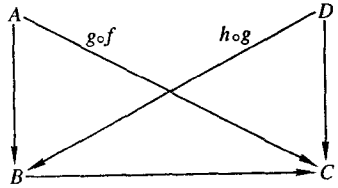


可换，而命题 3 就是图形





可换，命题 1 可以说是图形



可换.

习 题

1. 设 A, B, C 是集合

$$f: A \to B, \quad g: B \to C,$$

证明：

(1) 如果 f 和 g 都是满的，则 $g \circ f$ 亦然；

(2) 如果 f 和 g 都是单的，则 $g \circ f$ 亦然；

(3) 如果 $g \circ f$ 是满的，则 g 是满的；

(4) 如果 $g \circ f$ 是单的，则 f 是单的.

2. 条件如上题，举例：

(1) $g \circ f$ 是满的，但 f 不是满的；

(2) $g \circ f$ 是单的，但 g 不是单的.

3. 设 $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: B \to C$, 且 $h \circ f = g \circ f$. 证明，若 f 是满射，则 $g = h$.

4. 设 $f: A \to B$, $g: A \to B$, $h: B \to C$, 且 $h \circ f = h \circ g$. 证明，若 h 是单射，则 $f = g$.

5. 如果映射 $f: A \to B$ 和 $g: B \to A$ 满足

$$g \circ f = i_A, \qquad f \circ g = i_B.$$

证明，f 和 g 都是双射.

6. 设 f 是正整数集 $\mathbf{N}^*$ 上的变换 $f(m) = m + 1$. 证明，有无穷多个 $\mathbf{N}^*$ 上变换 g 使 $g \circ f = i_{\mathbf{N}^*}$，但没有 $\mathbf{N}^*$ 上变换 h 能使 $f \circ h = i_{\mathbf{N}^*}$.

§2 等价关系与分类

分类是许多学科经常采用的研究方法，一种科学的分类，使同类研究对象的共同属性更为明了，各类间的差别更为明晰，研究工作可以事半功倍.

本节把这种分类方法概括化、抽象化.

定义 1　设 A 是个非空集合，$\mathscr{R}$ 是笛卡尔积 $A\times A$ 的一个子集，若 $(a,b)\in\mathscr{R}$，则说 a，b 有关系 $\mathscr{R}$，记为 $a\mathscr{R}b$；若 $(a,b)\notin\mathscr{R}$，则说 a、b 没有 $\mathscr{R}$ 关系. $A\times A$ 的子集 $\mathscr{R}$ 称为 A 上**关系** $\mathscr{R}$.

例如，$A=\{1,2,3\}$，$\mathscr{R}=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$，则 $1\mathscr{R}2$，$1\mathscr{R}3$，$2\mathscr{R}3$.

例 1　实平面 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 中，由

$$x^2+y^2=1,$$
$$(x-1)^2+y^2=1$$

确定的两个圆周上的所有点构成的子集为 $\mathscr{S}$，则 $1\mathscr{S}0$，$0\mathscr{S}1$，$(-1)\mathscr{S}0$，$2\mathscr{S}0$，$1\mathscr{S}1$，….

例 2　设 $f\colon A\to A$，且

$$\mathscr{R}=\{(a,b)\in A\times A\mid b=f(a),\ a\in A\}.$$

那么，对每个 $a\in A$ 必有 A 中元 $f(a)$ 与 a 有 $\mathscr{R}$ 关系，即 $a\mathscr{R}f(a)$；当 f 是满射时，对于每个 A 中元 b 一定有元 a 与 b 有关系，即若 $b=f(a)$ 则 $a\mathscr{R}b$，这样的 a 可能不只一个；当 f 是双射时，对于每个 $a\in A$，有而且只有一个 $c\in A$ 使 $c\mathscr{R}a$.

定义 2　设 $\mathscr{R}$ 是 A 上一个关系，若满足

1. 反身性，即对任意 $a\in A$ 都有 $a\mathscr{R}a$；

2. 对称性，即对任意 a，$b\in A$，只要 $a\mathscr{R}b$，则必有 $b\mathscr{R}a$；

3. 传递性，即对任意 a，b，$c\in A$，只要 $a\mathscr{R}b$，$b\mathscr{R}c$，则必有 $a\mathscr{R}c$；则说 $\mathscr{R}$ 是个**等价关系**.

例 3　在整数集 $\mathbf{Z}$ 上，令

$$\mathscr{R}=\{(a,b)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\mid a+b\text{ 为偶数}\}.$$

首先，对任意整数 a，$a+a$ 是个偶数，故 $a\mathscr{R}a$.

其次，对任意整数 a，b，若 $a\mathscr{R}b$，即 $a+b$ 为偶数，则 $b+a$ 为偶数，故 $b\mathscr{R}a$.

最后，对任意整数 a，b，c，若 $a\mathscr{R}b$，$b\mathscr{R}c$，即 $a+b$，$b+c$ 均为偶数，则 $a+c+2b$ 为偶数，从而 $a+c$ 为偶数，故有 $a\mathscr{R}c$.

于是，$\mathscr{R}$ 是一个等价关系.

在生活和学习中，我们熟悉的等价关系是很多的.

用 $M_{n\times n}(\mathbf{R})$ 代表所有 n 阶实方阵的集合，$M_{n\times n}(\mathbf{R})\times M_{n\times n}(\mathbf{R})$ 的子集 $\mathscr{R}_1$，$\mathscr{R}_2$，$\mathscr{R}_3$，$\mathscr{R}_4$，$\mathscr{R}_5$ 定义如下：

$(A, B)\in\mathscr{R}_1$ 当且仅当有 n 阶可逆阵 P，Q 使 $A=PBQ$；

$(A, B)\in\mathscr{R}_2$ 当且仅当有 n 阶可逆阵 P 使得 $A=P^{-1}BP$；

$(A, B)\in\mathscr{R}_3$ 当且仅当有 n 阶可逆阵 Q 使得 $A=Q'BQ$；

$(A, B)\in\mathscr{R}_4$ 当且仅当它们的迹数相等；

$(A, B)\in\mathscr{R}_5$ 当且仅当 $|A|=|B|$.

则它们都是等价关系.

又如，用 F 代表实平面上所有三角形的集合，且子集

$$\mathscr{R}=\{(\Delta_1, \Delta_2)\in F\times F \mid \Delta_1 \text{ 相似于 } \Delta_2\},$$

则 $\mathscr{R}$ 是个等价关系.

在我们提过的关系中，有些不是等价关系. 例如 $A=\{1, 2, 3\}$，$\mathscr{R}=\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$，则 $\mathscr{R}$ 不满足反身性和对称性. 例 1 确定的关系 $\mathscr{S}$ 也不是等价关系.

设 A 是个集合，给定 $A\times A$ 的一个子集也就确定了 A 中元 a，b 满足的一个条件 $\mathscr{P}$，即 $\mathscr{R}$ 总可写成

$$\mathscr{R}=\{(a, b)\in A\times A \mid a, b \text{ 满足 } \mathscr{P}\}$$

所以我们讨论子集 $\mathscr{R}$ 和讨论与 $\mathscr{R}$ 对应的性质 $\mathscr{P}$ 是一回事. 从而可将等价关系的定义换一种说法.

定义 3 设 A 是个非空集合，$\mathscr{P}$ 是一种性质，对于 A 的任意有序元对 a，b 而言，都可明确地说它们满足性质 $\mathscr{P}$ 或者不满足性质 $\mathscr{P}$. 若 a，b 满足 $\mathscr{P}$，则说 a，b 有 $\mathscr{P}$ 关系；如果 a，b 不满足性质 $\mathscr{P}$，则说 a，b 没有 $\mathscr{P}$ 关系.

当 a，b 有 $\mathscr{P}$ 关系时，记为 $a\mathscr{P}b$. 若 $\mathscr{P}$ 性质确定的 $\mathscr{P}$ 关系

有：

1. 对任意 $a \in A$ 都有 $a \mathscr{P} a$；

2. 对任意 $a, b \in A$，只要 $a \mathscr{P} b$ 则 $b \mathscr{P} a$；

3. 对任意 $a, b, c \in A$，只要 $a \mathscr{P} b$ 且 $b \mathscr{P} c$ 则必 $a \mathscr{P} c$.

则说 $\mathscr{P}$ 是 A 上的一个等价关系.

在讨论一个确定问题时，为了方便，有时把性质 $\mathscr{P}$ 虚化，用 $\sim$ 代替.

例 4　设 V 是 n 维实线性空间，A 是 V 的幂集，对任意 $U, W \in A$，如果 U 的每个向量均可由 W 中有限个向量线性表示出来，且 W 的每个向量均可由 U 中有限个向量线性表示出来，则说 $U \sim W$. 容易证明，$\sim$ 是 A 上的一个等价关系.

例 5　记区间 $[0, 1]$ 上的所有连续函数构成的集合为 A，规定，对任意 $f(x), g(x) \in A$，$f(x) \sim g(x)$，当而且仅当

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x,$$

则 $\sim$ 是 A 上一个等价关系.

同样，在区间 $[0, 1]$ 上所有可微函数构成的集合 A 中，规定，对任意 $f(x), g(x) \in A$，$f(x) \sim g(x)$ 当而且仅当 $f'(x) = g'(x)$，也就是 $f(x) - g(x)$ 为常数，则 $\sim$ 是 A 上一个等价关系.

等价关系与分类问题密切相关.

定义 4　设 $\sim$ 是集合 A 上一个等价关系，对于每个 $x \in A$，称子集

$$S_x = \{y \in A \mid y \sim x\}$$

为由 x 确定的**等价类**.

例如，在例 3 给出的 $\mathbf{Z}$ 上等价关系，即 $a \sim b$，当且仅当 $a + b$ 为偶数，那么

$$S_1 = \{\cdots, -1, 1, 3, \cdots\},$$

$$S_2 = \{\cdots, -2, 0, 2, 4, \cdots\},$$

且 $S_1 = S_3 = S_5$，$S_0 = S_{-2} = S_2$.

命题 1 设 A 是个非空集合，$\sim$ 是 A 上的一个等价关系，用 S_x 代表 x 在 $\sim$ 之下确定的等价类，那么：

1. 对任意 $x \in A$，等价类 S_x 非空；

2. 对任意 $x, y \in A$，若 $S_x \neq S_y$，必 $S_x \cap S_y = \varnothing$；

3. A 恰为所有不相同的等价类的并集.

证明 对任意 $x \in A$，由于 $\sim$ 是等价关系，有反身性，即 $x \sim x$，故 $x \in S_x$，$S_x \neq \varnothing$.

如果 $x, y \in A$，且 $S_x \cap S_y \neq \varnothing$，可设 $z \in S_x \cap S_y$，则 $z \sim x$，$z \sim y$，从而 $x \sim y$，进而 $x \in S_y$，再用传递性得 $S_x \subseteq S_y$，对称地可得 $S_y \subseteq S_x$，最后得 $S_x = S_y$. 这说明 S_x 和 S_y 或相同或不相交.

由于每个 $x \in A$ 均有 $x \in S_x$，故 $A = \bigcup\limits_{x \in A} S_x$. 把其中相同的等价类剔除，则 A 即为两两不交的等价类的并集.

一个集合 Δ，有以 I 为标号集的子集族

$$\{T_i \subseteq \Delta \mid i \in I\},$$

满足：

1. 对任意 $i \in I$，$T_i \neq \varnothing$；

2. 对任意 $i, j \in I$，当 $i \neq j$ 时，$T_i \cap T_j = \varnothing$；

3. $\Delta = \bigcup\limits_{i \in I} T_i$；

则说这个子集族给出集合 Δ 的一个**分类**.

命题 2 若集合 Δ 由子集族

$$\{T_i \subseteq \Delta \mid i \in I\}$$

决定一个分类. 规定，任意 a，$b \in \Delta$，$a \sim b$ 当而且仅当 a，b 属于同一个 T_i，则 $\sim$ 是 Δ 上一个等价关系.

证明 该分类是确定的，从而对任意 a，$b \in \Delta$ 而言，a，b 或者在同一个子集内或者分属不同子集，即 $a \sim b$ 或 a，b 没有 $\sim$ 关系是明确的. $\sim$ 是 Δ 上一个关系.

对任意 $a\in A$，必有 $i\in I$ 使 $a\in T_i$，从而可以说 a，a 在 T_i 中，即 $a\sim a$，$\sim$具有反身性.

对任意 a，$b\in A$，若 $a\sim b$，即有 $i\in I$ 使

$$a\in T_i,\qquad b\in T_i,$$

当然有 $b\sim a$，即 $\sim$有对称性.

设 $a\sim b$，$b\sim c$，即有 i，$j\in I$ 使

$$a,b\in T_i,\qquad b,c\in T_j,$$

由于在分类中 b 属于唯一确定的 T_i，可知必有 $i=j$，a，$c\in T_i$，$a\sim c$. $\sim$具传递性.

这样就把分类与等价关系对应起来了.

例 6　看例 5 的第二个例子，由 $f'(x)=g'(x)$ 确定 $f(x)\sim g(x)$，从而得 A 的一个分类. 对任意可微函数 $f(x)$，

$$S_{f(x)}=\{g(x)\in A\mid g'(x)=f'(x)\},$$

且

$$A=\bigcup_{f(x)\in A}S_{f(x)}.$$

这种表达中的等价类有些是重复的.

例 7　看例 2 之等价关系，它把整数集分成两个等价类，即 $\mathbf{Z}$ 是奇数集与偶数集之并

$$\mathbf{Z}=S_1\cup S_2.$$

这种写法中无重复项.

定义 5　设 $\sim$ 是集合 A 上的一个等价关系，T 是 A 的一个子集，如果 T 中不同的元素的等价类一定不同，且 $A=\bigcup\limits_{t\in T}S_t$，则 T 是关系 $\sim$ 之下的**完全集**.

若 T 是等价关系 $\sim$ 之下的一个完全集，则称集合

$$\overline{A}=\{S_t\mid t\in T\}$$

为等价关系 $\sim$ 的**商集**，有时记 $\overline{A}=A/\sim$.

对于一个等价关系 $\sim$ 可能有很多不同的完全集，例 3 中