《微积分》自学指导

施昭常　编

暨南大学出版社

《微积分》自学指导

施昭常　编

暨南大学出版社
1992·广州

粤新登字 13 号

《微积分》自学指导
施昭常　编
*
暨南大学出版社出版
（广州石牌）
广东省新华书店发行
广东省封开县人民印刷厂印刷
开本　787×1092　1/32　印张：9　字数：190 千字
1992 年 4 月第 1 版　1992 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—15000 册
ISBN 7—81029—153—X/O・7
定价：4.30 元

内 容 简 介

本书内容包括一元和多元微积分学。全书共九章。各章分内容要点、例题分析与习题选解、自测题及参考答案三部分。书后附综合自测题及参考答案。

本书通俗易懂，文字简练，适于自学。可作为报考会计、商学、统计等财经类专科自学考试学员学习《微积分》课程的辅导资料，也可作为财经类大专院校学生的学习指导书和教师的教学参考书。

前　言

从今年起，广东省财经类会计、商学、统计等专业（大专）的高等数学课均改用《微积分》教材。为了帮助在职自学者克服课本深、时间紧、资料少、找师难的困难，编者根据考试大纲，结合多年的教学和辅导实践，整理教案和有关资料，编写了这本辅导材料。本书力求通俗易懂，文字精练，便于自学。

全书共分九章，包括一元函数微积分学和多元函数微积分学。在每章的开头明确了学习要求，读者可按熟练掌握、一般理解和了解几个层次统筹安排时间。各章由内容要点、例题分析与习题选解、自测题及参考答案三部分组成。书后附综合自测题及参考答案一份。

内容要点部分列出了要求掌握的学习内容，指出重点和难点，并作详细的归纳整理，分条分款，以便记忆。自学者学习时要注意处理好知识广度和深度的关系。试题复盖面广，这是自学考试的一个特点。所以一定要把基本概念、基本公式和基本技能学习掌握好，同时要在突破重点和难点方面多化时间，以求事半功倍，提高效率。

例题分析与习题选解部分中的例题是精心挑选的典型例题，有些是一型一例，有些是一型两例。通过例题的分析、详解、小结使读者加深对基本概念的理解，学习到解题的思路，

提高悟性。选解的习题是与重点内容配套的，其中一些是难题。读者应在学习了基本内容和有关例题的基础上，自己动脑动手做题，做好后与解答相对照，解决没有老师改作业的问题。切勿把习题选解当作例题阅读。多做练习，发现问题及时纠正，不断提高熟练程度，这是学好数学课程的关键。许多习题提供了多种解法，注意对比。有些作了分析和小结，以达举一反三的效果。

自测题及参考答案部分选自历届全国和广东省经济类考试试题。读者通过检测，发现存在问题，及时采取措施加强薄弱环节补救。综合自测题是一份完整的试题，可从中体会大纲的具体要求，检测综合能力及解题速度。因为考过的试题在近年内一般不会以原形出现，所以读者切勿死记硬背结果。

因时间仓促，错误在所难免。望读者、专家多提宝贵意见。

施昭常

1992 年 2 月

目　　录

第一章 函 数

要求掌握函数的定义和性质，基本初等函数的图形和特征，复合函数的组合与分解，本章是学习微积分的预备知识，读者可复习初等数学中关于函数部分的内容。

（一）内容要点

本章内容包括集合、映射、函数定义、函数性质、函数图象、复合函数、初等函数等。重点是函数的概念和基本初等函数。难点是复合函数的分解。

一、函数概念

1. 集合

集合是指具有某个共同性质的元素的全体。集合以大写字母 A、B、C、……表示。

$A=\{x|x$ 具有的某个共同性质$\}$

不包含任何元素的集合称为空集，记作 Φ。要与以 0 为元素的集合相区别。由所研究的全体元素构成的集合称全集，记作 U（或 Ω）。

如果集合 B 的每一个元素都是 A 的元素，就称 B 是 A 的子集，记作 $B\subset A$（或 $A\supset B$）；若 $A\subset B$，$A\supset B$，称 A 与 B 相等，

记作 $A=B$；由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$；由 A 和 B 所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$。

2. 映射

映射是指两个集合之间的一种对应关系。

3. 函数的定义

函数是指两个实数集之间的一个映射。

在某个变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果对于 x 所考虑范围内的每一个数值，都有一个确定的数值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$ 。其中 x 称为自变量，y 称为因变量。

这里说的函数是指一元单值实变函数。自变量只有一个；对于 x 的每一个取值，y 只有一个数值与之对应；x，y 都只能取实数值。

4. 函数“二要素”

自变量 x 的变化范围称为函数的定义域；因变量的变化范围称为函数的值域；因变量与自变量的对应法则称函数关系。

一个函数由自变量、因变量、定义域、值域、函数关系五个因素构成。其中函数定义域和函数关系是最重要的，称为函数的二个要素。二要素完全一样的两个函数就是相同的函数，二要素中只要有一个要素不完全一样，就称二个函数是不相同的函数。

5. 函数的图象

对函数 $y=f(x)$ ，把 x 作直角坐标系下的横坐标，对应的函数值 $f(x)$ 作纵坐标，$(x, f(x))$ 对应平面上的一个点，

$(x, f(x))$ 的全体构成函数 $y=f(x)$ 的图象。一元函数在自变量的一个区间内是一条曲线或曲线段，所以把函数 $y=f(x)$ 与曲线 $y=f(x)$ 不加以区别。

二、函数的性质

1. 单调性

x_1 和 x_2 是函数定义域内任意两点 $(x_1<x_2)$，若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 单调增加；若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 单调减少。单调是单调增加和单调减少的总称。

不限定在定义域，可以讨论函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 的单调性。若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调增加，称 (a, b) 为 $f(x)$ 的单调增加区间；若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调减少，称 (a, b) 为 $f(x)$ 的单调减少区间。

2. 有界性

若存在两个固定实数 A 和 B，对定义域内任一点 x，有 $A<f(x)<B$，称 $f(x)$ 有界。

3. 奇偶性

$y=f(x)$ 是定义在全体实数上的函数，如果对于定义域内任一点 x，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于定义域内任一点 x，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于坐标原点。

4. 周期性

$y=f(x)$ 是定义在全体实数上的函数，若存在常数 T，使得对任意 x，有 $f(x+T)=f(x)$，称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周

期函数。

5. 可逆性

若函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=g(x)$ 自变量与因变量的对应关系恰好相反，称其中一个为另一个的反函数，说函数 $y=f(x)$ 是可逆的。

$y=f(x)$ 存在反函数的条件是自变量 x 与因变量 y 是一一对应的。不同的 x 对应着不同的 y。若 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 互为反函数，则它们的图象以直线 $y=x$ 为对称，函数 $f(x)$ 的定义域为函数 $g(x)$ 的值域，函数 $f(x)$ 的值域为函数 $g(x)$ 的定义域。

三、初等函数

1. 基本初等函数

①常量函数 $y=c$：定义域（$-\infty$，$+\infty$），图形是平行于 x 轴截距为 c 的直线。

②幂函数 $y=x^a$（a 为实数）：要求熟识 $y=x$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$，$y=x^2$，$y=x^3$ 的图形。不管 a 为何值，幂函数 $y=x^a$ 的图象都经过点（1，1）。

③指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）：定义域为（$-\infty$，$+\infty$），图象在 x 轴上方（$a^x>0$）都经过点（0，1）。当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $a<1$ 时，函数单调减少。

最常用的指数函数是 $y=e^x$，$e\approx2.718$ 为自然对数的底。要求熟识 $y=e^x$ 和 $y=e^{-x}=\left(\dfrac{1}{e}\right)^x$ 的图象。

④对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$：定义域（0，$+\infty$）。$a=10$ 时，$\log_{10}x=\lg x$ 称常用对数函数；$a=e$ 时，

$\log_e x = \ln x$ 称自然对数，它是指数函数 $y = e^x$ 的反函数。所有对数函数的图象均过点（1，0）。

⑤三角函数 $y = \sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\mathrm{ctg} x$, $\sec x$, $\csc x$ ：要求熟识正弦、余弦、正切、余切函数的图象及性质。知道在弧度制中 $x=0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ 弧度等特殊角的三角函数值。

⑥反三角函数 $y = \arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg} x$, $\mathrm{arcctg} x$ ：要有反三角函数的概念，知道定义域和值域（主值），特殊函数值。

2. **复合函数**

若函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ ，则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数。x 叫自变量，u 叫中间变量。

"函数的函数"称为复合函数。两个函数的复合，实际上是中间变量介入自变量到因变量之间的变化过程。函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = f(x)$ 的复合，当然要求函数 $u = \varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域内。

复合函数的分解是本章的难点，务必多做练习以求熟练掌握。

3. **初等函数**

基本初等函数经有限次四则运算以及复合而得的函数称为初等函数。它是微积分研究的主要对象。

有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个以上的式子表示，这类函数称为"分段函数"。分段函数定义域是各段的和，分段函数仍是单值函数，即对于定义域内任一点 x，只能在 x 所在的段内找相应的表达式计算函数值，计算出来的函数值 $f(x)$ 是唯一的。在许多经济问题中会遇到分段函数。注意分段函

数不是初等函数，而在各分段上则可以是初等函数。

（二）例题分析与习题选解

例1 已知 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{0,5,6,8\}$，$D=\{0\}$

(1) $A\subset B$，$A\supset B$，$C\subset D$，$D\subset C$，哪个正确？

(2) 求 $D\cup\Phi$，$D\cap\Phi$，$D\cup U$，$D\cap U$。

(3) 求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\cup B\cup C$，$A\cap B\cap C$。

解 (1) $D\subset C$ 是正确的，其余均不正确。

(2) $D\cup\Phi=D=\{0\}$

$D\cap\Phi=\Phi$，$D\cup U=U$

$D\cap U=D=\{0\}$

(3) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A\cap B=\Phi$

$A\cup B\cup C=\{0,1,2,3,4,5,6,\}$

$A\cap B\cap C=\Phi$

例2 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一个函数，并说明理由。

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$， $g(x)=1$

(2) $f(x)=\ln x^2$， $g(x)=2\ln x$

(3) $f(x)=x$， $g(x)=\sqrt{x^2}$

(4) $f(x)=\sqrt{x^2}$， $g(x)=|x|$

(5) $f(x)=\arcsin x$， $g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$

分析 要用函数“二要素”判别二个函数是否相同。只

有“二要素”完全相同，才能说它们是相同的函数；只要有一个要素不完全相同，即认为它们表示不同的函数。

解　(1) 不相同。因为它们的定义域不同。$f(x)$ 定义域为 $x\neq 0$，$g(x)$ 的定义域为全体实数。

(2) 不相同。因为它们的定义域不同。$f(x)$ 的定义域是 $x\neq 0$，$g(x)$ 的定义域是 $x>0$。

(3) 不相同。因为它们的对应关系不同。令 $x_0=-1$，$f(x_0)=f(-1)=-1$，$g(x_0)=g(-1)=1$。

(4) 相同。$f(x)$，$g(x)$ 定义域是全体实数。对应关系也完全相同。

(5) 相同。$f(x)$，$g(x)$ 定义域为 $[-1,1]$，在定义域内对应关系也完全相同。因为这容易从恒等式 $\arcsin x+\arccos x\equiv\frac{\pi}{2}$ 推导出。

例 3　函数 $f(x)$ 满足什么条件时，下列式子才有意义？

(1) $y=\frac{1}{f(x)}$　　　(2) $y=\sqrt[n]{f(x)}$　(n 为偶数)

(3) $y=\log_a f(x)$　　　(4) $y=\arcsin f(x)$

分析　求函数的定义域，首先要记住有些基本初等函数的定义域并非全体实数。例如 $y=\frac{1}{x}(x\neq 0)$；$y=\sqrt{x}\ (x\geqslant 0)$；$y=\lg x(x>0)$；$y=\operatorname{tg}x(x\neq n\pi+\frac{\pi}{2})$，$y=\operatorname{ctg}x(x\neq n\pi)$，$y=\arcsin x$，$y=\arccos x(-1\leqslant x\leqslant 1)$。

对复合函数 $y=g[f(x)]$，则要求 $f(x)$ 的值域必须落在 $g(u)$ 的定义域内。

根据以上两点解不等式组以确定 x 的取值范围。

解　(1) $f(x)\neq 0$　　　(2) $f(x)\geqslant 0$

(3) $f(x)>0$　　　(4) $|f(x)|\leqslant 1$

例 4（习题 28）　确定下列函数定义域：

(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$

(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

(6) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$

(8) $y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$

解

(2) 解不等式组 $\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -2,\end{cases}$

定义域是 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(4) 解不等式组　$-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$，得

$-1\leqslant x\leqslant 3$，定义域为 $[-1,3]$。

(6) 解不等式组 $\begin{cases}3-x>0\\ |x|-1>0\end{cases}$　得 $\begin{cases}x<3\\ |x|>1,\end{cases}$

定义域 $(-\infty,-1)\cup(1,3)$。

(8) 解不等式组 $\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1\\ x^2-x-6>0\end{cases}$　得 $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\ x<-2\text{ 或 }x>3,\end{cases}$

定义域为 $[-3,-2)\cup(3,4]$。

例 5　（习题 29）已知 $f(x)=x^2-3x+2$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(-x)$，$f(\dfrac{1}{x})$，$f(x+1)$

解　$f(0)=0^2-3\cdot 0+2=2$

$f(1)=1^2-3\cdot 1+2=0$

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$$

$f(-x)$ 看作是 $y = f(u) = u^2 - 3u + 2$ 与 $u = -x$ 的复合。

$$f(-x) = (-x)^2 - 3(-x) + 2 = x^2 + 3x + 2$$

$f(\frac{1}{x})$ 看作是 $y = f(u) = u^2 - 3u + 2$ 与 $u = \frac{1}{x}$ 的复合。

$$f(\frac{1}{x}) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2$$

$f(x+1)$ 看作是 $y = f(u) = u^2 - 3u + 2$ 与 $u = x + 1$ 的复合。

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = x^2 - x$$

例 6 （习题 30）设 $f(x) = \frac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$。

分析 $y = f[f(x)]$ 可以看作 x 在映射 f 作用的映象 u，再求 $u = f(x)$ 在 f 映射下的映象 y。也就是 $y = f[f(x)]$ 可以看作函数 $y = f(u) = \frac{u}{1-u}$ 与函数 $u = f(x) = \frac{x}{1-x}$ 的复合。此时要求 u 的值域必须包含在 y 的定义域内。要 u 有意义，$x \neq 1$，要 y 有意义，$u = \frac{x}{1-x} \neq 1$，即 $x \neq \frac{1}{2}$。所以 $f[f(x)]$ 的定义域为 $x \neq \frac{1}{2}, 1$。

函数 $y = f\{f[f(x)]\}$ 可看作 $y = f(v) = \frac{v}{1-v}$，$v = f(u) = \frac{u}{1-u}$，$u = f(x) = \frac{x}{1-x}$ 三个函数的二重复合。也可以把 y 看作 $y = f(v) = \frac{v}{1-v}$ 与 $v = f(u) = f[f(x)] = \frac{x}{1-2x}$ 的复合。由 $x \neq 1$，$u \neq 1$，$v \neq 1$ 可以确定复合函数 $y = f\{f[f(x)]\}$ 的定义域为 $x \neq \frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，1。