

數學方法論叢書

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY
WAYS OF THOUGHT IN CHINESE
ANCIENT MATHEMATICS

中國古代數學思想方法

王鴻鈞 孫宏安 著



数学方法论丛书

中国古代数学思想方法

王鸿钧 孙宏安 著

江苏教育出版社

1988·南京

数学方法论丛书
中国古代数学思想方法
王鸿钧 孙宏安 著

出版发行：江苏教育出版社
经 销：江苏省新华书店
印 刷：南京人民印刷厂

开本850×1169毫米 1/28 印张5.75 字数132,500

1989年5月第1版 1989年5月第1次印刷

印数1—3,900册

ISBN 7—5343—0663—9

G·584

定价：2.15元（贴塑）

出版说明

如大家所知，数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问，已有很长的历史，而且内容极为丰富。16世纪以来，如笛卡尔（Descartes）、莱布尼兹（Leibniz）、庞加莱（Poincaré）、克莱因（Klein）、希尔伯特（Hilbert）和阿达玛（Hadamard）等著名学者，都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解，就近现代而言，以著名的美籍匈牙利数学家波利亚（Polya）为例，他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究，出版了一系列论著，并被译为多种文字，受到全世界的普遍重视，被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国，也有许多学者在各种不同的场合屡次指出：要在数学教材与教学过程中，注意对形成数学概念的认识过程的分析，努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段，特别是我国数学家徐利治教授，他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流，结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状，深感在教学与科研领域中，有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下，我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课，出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物，这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来，在现今的数学教育与数学教学过程中，主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练，对于如何教给学生以寻找真理和发现真理的本领不够重视，在一定程度上低估了发

散思维的训练在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的创造能力。

上述情况表明，我们仍需大力提倡数学方法论的研究，并立把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去。特别是，我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期，这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍，而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍，因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要，我社自1986年初就开始酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》（以下简称《丛书》），并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作，纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月，我社与徐利治教授等充分磋商，组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问，我们深信，在《丛书》的全体编委的共同努力下，一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》，我们也由此而希望，《丛书》的出版，能在我国数学教学改革和培养人材的事业中有所贡献。

《丛书》共分三个档次，除了少数几本属于高档次的专著之外，其他两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑，《丛书》中的大部分题材，对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平，在《丛书》的编辑和出版过程中，难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年6月

前 言

我国古代数学思想方法，源远流长，独具风格，硕果累累，成就辉煌。可是关于中国古代数学思想方法方面的专著国内尚付阙如。美国克莱因(Klein)的《古今数学思想》是1000多页的大著，对中国古代的数学思想竟不置一言。苏联亚历山大洛夫(Александров)等人写的三卷本《数学——它的内容、方法和意义》也只涉及只言片语。我早年有志于数学思想方法问题的探讨，积累了数十万字的笔记资料和手稿，惜乎“文革”中被查抄，已荡然无存。“文革”期间，我在劳动和病休中又写了30万字的高等数学思想方法论手稿，曾经徐利治教授审阅，承蒙他提出许多宝贵的意见，我深受启发和鼓励。1982年以来，给研究生讲授了几遍数学方法论课程，又积累了一些资料，去年赴日本参加“中日数学教育研究会”，我提出有关《九章算术》的数学思想方法的一份报告。今春江苏教育出版社委托徐利治教授主编“数学方法论丛书”，蒙邀参与编委会工作，并约我写《中国古代数学思想方法》一书。我即按出版社和主编提出的要求写出该书的提纲，同我的助手孙宏安同志一道整理手稿，进一步核实资料，几经推敲，两易其稿，勉力完卷。由于时间和篇幅有限，更主要是我们的水平有限，用10万字来概述中国古代的数学思想方法，深感力不从心，不周和欠妥之处在所难免，欢迎批评指导。愿这本小册子起到抛砖引玉的作用，如能为继承和发扬我国古代数学思想方法起一点哪怕是微不足道的作用，就

满足了我们的愿望。

谨向江苏教育出版社和发起数学方法论丛书的同志们、
向主编徐利治教授热情鼓励并支持对我国古代数学思想方法
研究的精神表示钦佩和衷心的感谢！

王鸿钧

1987年11月于大连

绪 论

我们伟大的祖国有着光辉的历史、灿烂的文化。

我国位于北半球、亚洲东部，太平洋西岸，东西跨越了五个时区，南北横穿了约50多个纬度。我国东部和东南部面临着浩瀚的海洋，西部挺峙着巍峨的高山及号称“世界屋脊”的青藏高原，北部是蒙古高原的戈壁和林海。这些在古代交通不发达的条件下，形成了相对的封闭状态，使我们的祖先与外界存在着交往的困难。因而使我国古代文化，在相当时期内保持着自己鲜明的特色。

中国古代文化的特点，与我们的先人进入文明时的自然历史条件有着密切的关系，在一定程度上可以说，前者就是由后者决定的。

中国古代文明是一个大河背景下的农耕文明。在我国辽阔的土地上，大河纵横，河两岸沃野千里，便于农业的发展。中国古代文明最早产生于大河（黄河、长江等）流域的河谷地带。在农业经济中水源成为关键，要求有一个凌驾于各个部落之上的力量来协调水源的使用；周期性的洪水泛滥又使治水成为沿河居民生死存亡的头等大事，治水要求全体居民的共同努力，因此就需要有一个超乎各个部落的统一的意志，这种实际需要实际上就产生了特殊的结果。一是使中国自进入文明起就成为一个大领土国家，并且形成了集中的王权：商代是“尺地莫非其有也，一民莫非其臣也”（《孟子·滕文公上》），周代则是“溥天之下，莫非王土；率土之滨，莫

非王臣”(《诗经·小雅·北山》),即主要生产资料(土地)和主要生产者(奴隶)都属于奴隶制国家所有。商、周已产生了至上的王权。到了秦汉更形成一个大一统的中央集权的封建专制主义国家。二是使中国早早地进入了文明时代——在古代的氏族血缘纽带尚未瓦解时就进入了奴隶制社会^①。这种血缘纽带在中国文明的特定条件下不但没有受到冲击和削弱,反而变得极其稳定和强大,在其后的漫长历史进程中,经历了各种经济政治制度的变迁,终奴隶社会和封建社会的数千年历史,以血缘宗法纽带为特色,以农业家庭小生产为基础的社会生活和社会结构少有变动,表现出极度的稳定性和保守性。古老的氏族社会的遗风余俗、观念习惯长期地保存、积累下来,成为一种极为坚固的文化结构和心理力量^②。中国古代文化就是在这种文化结构和心理力量中产生和发展起来的。

由于这种文化结构和心理力量,中国文化发展的民族连续性为世界上所仅见。中国古代有着发达的科学技术,例如举世闻名的四大发明——造纸术、印刷术、火药和指南针——对人类文明的发展做出了重大的贡献。数学作为文化和科学技术的一个重要组成部分,在中国古代也取得了光辉的成就,许多数学成果具有世界历史性的重大意义。而且中国古代数学也是在中国古代独特的文化背景中产生和发展的,其独特的思想方法也是古代文化中的珍品,对现代数学的发展有着重要的意义。本书着重探讨中国古代数学思想方法的特点。

中国古代数学思想方法的发展过程是相当长的。如果从

① 肖宪父等:《中国哲学史》(上),人民出版社,1984年。

② 李泽厚:《中国古代思想史论》,人民出版社,1985年,第299页。

对数与形的原始思维产生来考虑,可以追溯到遥远的古代,出现比较完善的十进位值制记数法也有3000多年了。数学思想方法的启蒙时期大约是在春秋战国时代。秦汉之际的《周髀算经》和《九章算术》奠定了中国古代数学思想方法的基础,尤其《九章算术》承前启后,开辟了中国古代数学思想方法的新纪元。由汉代经历漫长的历史发展到唐代的大一统帝国,数学思想方法基本上是对《九章算术》思想方法的继承和发展。隋唐时期在国子监内设“算学馆”,立数学博士、助教等学官、规定《算经十书》为教科书,唐代还在科举考试中设“明算科”,这些对数学教育的发展、数学科学的普及产生了积极的影响,从而为数学思想的发展,创造了有利的条件。到了宋代,结合印刷术、火药、指南针的发明和工商业的大发展,出现了宋及元初数学思想方法发展的新阶段,并在数学上取得了一系列光辉的成就,使这一时期的中国数学,达到世界封建社会数学发展的高峰。其中一些重要的数学成果,要比西方取得同类成果早数百年。可是,好景不长,在元朝中叶,宋元之际达到高度发展的数学理论突然出现停滞和“中断”,高度抽象的重要数学成果渐次失传,数学转向了适应商业发展需要的以珠算为工具的各种简单计算方法方面。由于对中国古代数学这一“中断”的研究是数学史以至于文化史上的一个重要课题,需要更专门的探讨,本书就写到14世纪初朱世杰的数学思想方法为止,关于“中断”及进一步的问题留待以后探讨。

明清两代正是西方文艺复兴和资本主义社会发生和发展的时期,中国却由一个庞大的封建帝国渐次沦为一个半殖民地半封建的国家,数学大大地落后了,数学思想方法也无大进展。新中国成立以后,百废俱兴,数学也取得了迅速的发

展。尤其是十一届三中全会以来，振兴中华，实现四化，建设富强、民主、文明的社会主义现代化国家，成为10亿人民的共同心愿。我们完全相信，在建设有中国特色的社会主义宏伟行动纲领的指引下，我国古代的数学思想方法，必将发扬光大，真正成为我国和世界数学思想发展的重要源泉，把现代数学思想方法的发展推向一个新高峰。

目

录

绪论

一	古老的数学思想	1
1.1	数和形的原始思维	1
1.2	甲骨文与十进位值制记数法	7
1.3	《周易》的数学思想	12
1.4	早期文献中反映的数学思想	24
二	《九章算术》的思想方法	34
2.1	古代数学的经典著作——《九章算术》	34
2.2	开放的归纳体系	37
2.3	算法化的内容	50
2.4	模型化的方法	62
2.5	计算工具——算筹	69
2.6	古代数学思想的两大源泉 ——《九章算术》与《几何原本》	80
三	数学思想方法的进一步发展	86
3.1	著名历算家的思想方法	87
3.2	数学名著的思想方法	105
四	宋元时期的数学思想方法	117
4.1	数学思想方法跃进的里程碑 ——《数书九章》	118
4.2	抽象化思想的发展	132
五	中国古代数学思想的主要特点	149
5.1	“经世致用”的实用思想	149
5.2	“天人相应”的神秘思想	152
5.3	算法化、数值化、离散化的计算思想	155
5.4	朴素的辩证思想	159
5.5	正统思想	160
附录	中国古代数学思想方法大事年表 主要参考文献	

一 古老的数学思想

中国古代的数学思想方法是扎根于古人的社会实践之中的。中国古代生产方式的特点决定着中国古代数学思想方法的特点，特别是生产实践起着关键性的作用。当然，数学思想方法也反过来推动着生产和其他社会实践的发展。我们来考察中国古代最古老的数学思想。

1.1 数和形的原始思维

数学中最古老的，可以说是原始的概念就是“数”（自然数）和“形”（简单几何图形）的概念。它们的形成和发展也标志着数学思想方法的开端。数和形是反映现实世界的量的关系和空间形式的“原子”和“细胞”，由它们开始，逐渐发展成完善的数学体系。实际上，其他所有的数学概念也确实是在数和形的概念的基础上形成的。因此，探讨人们如何形成数和形的原始思维，可以作为探讨古老的数学思想的出发点。

数学的原始思维来源于数学的对象，更确切地说，来源于现实世界。但是，数学的原始思维并不是现成地存在于现实世界中等待我们去取来，自然界中既没有数也没有形的概念。数和形是人作为认识主体对现实世界的反映，是人的思维的产物，亦即“思想事物”。人类是怎样反映外部世界，怎样形成数学的原始思维的呢？必须通过主体和客体的联系环节——人的社会实践。就是说，数学原始思维是产生于人类

的实践活动中的。

原始人的第一项需要就是谋取物质生活资料以使自己生存下去并延续后代，所以人类的生产活动是最基本的实践活动。这一活动是向自然界“索取”的活动，在这一活动中，人们必须与自然界进行交往，在这种交往中人们才能认识自然界的种种性质，包括认识自然界的量的关系和空间形式，经过人脑的能动的认识活动，便形成了数学的原始思维。

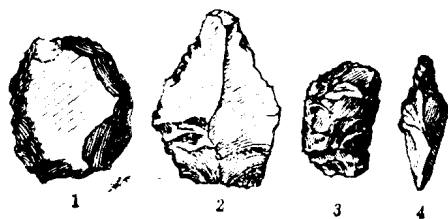
在探讨数学的原始思维时，必须顾及两个重要的前提。一个前提是人们的实践活动使人们对客观存在的事物有了广泛的认识，人们的社会实践提出了认识数和形的必要性；另一个前提是人们有了一定的抽象思维能力，能够在改造世界的实践活动中，抽象出数学的原始概念。这两点都是在人们的实践活动中实现的。

中国古人在进入文明以前就已经产生了数和形的原始思维。考古学上的许多发现，向我们提供了大量信息，这些信息表明，在中国，在五六千年以前的原始社会中就产生了数和形的原始思维。我们以这些信息来考察中国古人关于数和形的原始思维。

1. 北京人的石器

北京人是旧石器时代早期的人类，距今约70万年——20万年，北京人居住在北京周口店龙骨山的洞穴中。在北京人的遗址中发现了10余万件石器。其中有砍斫器，尺寸较大；有刮削器，有盘状、直刃、凸刃、凹刃等多种形状；还有尖状器和雕刻器，数量少些，但制作精细。还发现用来加工石器的石锤和石砧。石器的加工程序和打制方法比较固定，反映出一定的技术水平^①。其石器形状如图1.1所示。

^① 《中国大百科全书·考古学》，中国大百科全书出版社，1936年，第37页



北京人的石器

1 盘状砍砸器 2 砍砸器 3 矩形刮削器 4 石锥

图1.1

要制成这种种形状的石器，北京人除了观察过大量自然物的形状、大小外，在他们的头脑里还一定有着关于形的某种表象，正是这些表象通过实践，转化为他们制造出来的各种形状、各种大小的石器，这表明北京人对形已有了一些认识。

2. 许家窑人的石球

许家窑人，发现于山西省阳高县许家窑村和河北省阳原县侯家窑村之间，距今约10万年。在遗址中发现石制品14000余件，且20%为石器，其中石球达1074个，数量之多，为世界所仅见。石球中最大的直径超过100毫米，重量超过1500克；最小的直径在50毫米以下，重量不到50克。其中既有制作得滚圆的成品，又有半成品和毛坯，从中可以清楚地看到制作石球的全部工艺过程^①。据推测，石球是一种狩猎工具。

① 《中国大百科全书·考古学》，第589页。

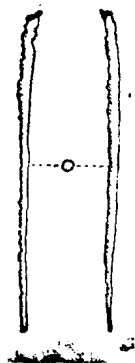


图1.2

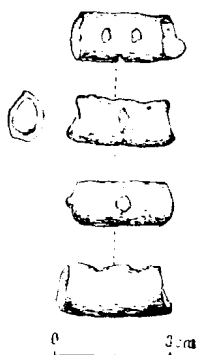


图1.3

这样大量而集中地制造石球，说明了当时人们在制造工具的社会实践中产生了对“球形”的进一步的认识。

3. 山顶洞人的骨针和骨管

山顶洞人（发现于北京周口店龙骨山的山顶洞穴中，即居住于北京人遗址的上方，距今约18000年）的遗址中出土石器25件，还出土一枚精致的骨针，磨得很圆，呈较规则的圆柱状（图1.2）。此外，还出土2000多件用砾石和动物骨骼、牙齿、海蚶壳等制成的各种形状的装饰物。其中有四只骨管，刻着大小不等的豁口（如图1.3所示）。骨管上的豁口，最少有两种解释。一种认为，可能是记事的符号，大事刻大豁口，豁口的排列顺序，表示事件发生的顺序；另一种认为，可能是数学记号，小豁口表示一个单位，大豁口表示10个单位^①。这表明山顶洞人已具有十进制的思想或顺序的思想，他们已能区分前后，识别简单的数目了。

① 李迪：《中国数学史简编》，辽宁人民出版社，1985年，第5—8页。

4. 仰韶文化的数、形观念

仰韶文化（中国黄河中游地区的新石器时期文化，因最早发掘的河南省渑池县仰韶村遗址而得名）的遗址现已发现1000多处，其中大规模发掘的典型遗址有10余处，年代约在公元前5000—前3000年之间。遗物中的石器已有十分规则的形状，表明当时的人类已经有了“对称”、“平行”、“等距”等抽象的观念。

仰韶文化时期还发明了陶器。这是人类工具制造史上的一次重要的飞跃，表明人的生产力有了很大的提高，也表明人的思维能力有了巨大的发展。要用一些形状不固定的泥土制成具有某种形状、一定大小的陶器就一定要在头脑中先有一个“形”的表象。人们制造的陶器都有比较规则的几何形状，它们实际上都可以看作是人们的“几何图形”观念的实物模型。仰韶文化中的陶器有各种各样的形状和大小，说明当时的人已经具有了多种几何图形的观念了（见图1.4）。



图1.4