21世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

计算方法

典型例题与解法

高培旺　等编著

- 归纳要点
- 精选例题
- 典型解法
- 模拟应试
- 考研训练

国防科技大学出版社

21世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

计算方法典型例题与解法

高培旺　雷勇军　编著

国防科技大学出版社
湖南·长沙

图书在版编目(CIP)数据

计算方法典型例题与解法/高培旺,雷勇军编著 .—长沙:国防科技大学出版社,2003.11
ISBN 7-81024-981-9

Ⅰ.计… Ⅱ.高… Ⅲ.计算方法—高等学校—解题指导 Ⅳ.O241-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 053213 号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640 邮政编码:410073
E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑:潘 生 责任校对:肖 滨
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本:787×1092 1/16 印张:20.5 字数:524 千
2003 年 11 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1-4000 册
ISBN 7-81024-981-9/O·124
定价:26.00 元

21世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

编审委员会

序

数学有科学皇后之称。在现代社会,自然科学、技术科学与社会科学快速发展,数学在各科学领域的应用愈来愈广泛,而数学本身的分支增多,其理论也愈加深入。数学的发展和数学的应用紧密相关,相互促进。高等数学与现代数学已成为科学家、技术人员和管理人员用来分析和解决现代科技和社会问题的强有力的利器,不仅为解决问题提供了定量分析工具,而且提供了科学的思维方法。

大学教育为适应现代科学发展和人才培养的需要,都把数学教学摆在基础和核心的地位。培养大学生和研究生学习高等数学的浓厚兴趣和理解、应用高等数学的思想、方法的实际能力,是大学生、研究生未来从事现代化工作的必需,是大学数学教师的重任。本丛书编委和国防科技大学出版社为服务大学数学的教与学工作,试图为学生提供一套符合学习规律、适用有效的辅导教材。在编审委员会指导下,参编教师广泛参考国内流行教材和辅导教材,多次研讨写作的目的、要求和方案,定稿前又多次讨论、修改和优化。丛书凝结着作者的心血和创造性劳动。该丛书有如下特点:

1. 满足教学大纲要求,例题习题有典型性、代表性和系列性。作者参照有关学科的本科教学大纲要求,及硕士生入学考试要求而编写,限定内容范围和要求层次。广泛收集国内比较优秀的教材和习题集,反复比较,选择出有典型性、代表性的题目,继而进行分析和解答,使同学们能触类旁通。

2. 作者教学经验丰富,力图适合学生的学习规律。作者都是长期在教学第一线工作,积累了教授与导学的经验,在编写时融合了作者教学经验与教法。根据高等数学的高度抽象性、较强的逻辑性、应用广泛性的特点,掌握其思想和方法必须认真过“应用”关(解题)。而过好“应用”关,除了靠读者数学天赋、悟性,主要还是应“引导”有方。引导的方法主要是,遵循认识规律,例题习题的编排,由浅到深,由简单到复杂,由单一到综合,且提供解题的一般思路,使读者能举一反三。

3. 适合读者自学。大学生学习应有很强的独立性、主动性，况且辅导教师不可能“招之即来”，然而优秀的“学习辅导书”也就是一位好的老师。该书安排的例题提供了分析思路，典型的同步习题和综合习题提供简答过程，全部习题提供了参考答案，十分有利于同学们自学指导。

本丛书的出版值得庆祝，它必将成为大学生、研究生愉快地进行数学训练，完成学业的益友良师。本书适合于广大的在校大学生、研究生学习，也适合于广大自学青年和在职人员自学之用。

丛书的出版是作者和编辑辛勤劳动的结晶，在此感谢他们的劳动，并向同学们和自学青年郑重推荐此书。

侯振挺

2003 年 8 月

前 言

数值计算是研究适用于计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论的一门学科，也称之为数值分析或计算方法。随着计算机技术的发展，它已成为工程设计、数值模拟不可缺少的重要手段，是继科学实验、理论分析之后的第三种科学研究方法。因此，学习和掌握常用数学物理问题的数值方法与算法设计对解决工程实际问题具有重要的作用。当前，"计算方法"已经成为许多理工科专业，如计算机应用、土木工程、机械工程、经济管理等专业本科生或硕士研究生的必修课程，并且是同等学力人员申请硕士学位的计算机科学与技术学科综合水平全国统一考试的五门备选科目之一。为加强读者对计算方法课程的系统学习和对本课程关键知识点的理解与掌握，帮助相关人员参加"数值分析"或"计算方法"不同级别考试(课程结业考试、自学考试、研究生入学考试)的复习，提高解题能力，特组织了多年从事数值分析教学的有经验的教师编写这本书。本书可作为在校各学科本科生的数值计算课程学习与教学的辅导用书，也可作为自学考试和研究生入学考试以及其他各种考试的学习指导书。

数值计算的内容非常丰富，包罗万象。该课程以"高等数学"和"线性代数"为基础，以"计算机高级语言"为手段，以计算机为解题工具，主要介绍最基本数学问题的数值方法和理论，主要内容有：数值计算的误差分析、函数插值、函数逼近与曲线拟合、数值积分与数值微分、常微分方程数值解法、非线性方程求根、线性方程组的直接方法、线性方程组的迭代法、矩阵特征值与特征向量的计算。

该门课程的特点是算法公式多、理论分析严谨，因而很多同学在学习过程中，感到不得要领、难以把握，尤其在求解具体问题时往往难以做到灵活运用。实际上，每个算法都有相应的数学背景、数学原理和基本线索，但某些算法的构造思想是类似的，是其中一种算法的延伸和推广，比如数值积分的高斯求积公式可看成牛顿－柯特斯公式在求积节点由固定到待定的一种拓展。本书以此为依据，在内容提要中，把这些算法归为一类而顺次列出来，更好地帮助大家联系、理解和记忆及开拓思路。

本书以工科"计算方法"教学大纲为基础进行编写，编写过程中参考了近几年国内出版的多种计算方法教材和计算方法习题集、大量的自学考试和国内重点大学研究生入学考试试题，精选出近 500 多道典型题目并进行了详细

分析与解答。全书共分十章，涵盖了工科“计算方法”所要求掌握的全部内容。本书前九章均给出了知识要点、内容提要、典型例题与方法、习题、解题指导与习题解答，从而便于读者使用。

知识要点：依教学大纲要求，分别按“**理解、掌握、熟练掌握**”提出了每章各知识点的不同要求，读者由此可明确学习重点。

内容提要：简要**概述了每章的主要知识点**，以便读者在较短时间内能较系统地掌握该章的基本概念、重要定理和主要算法。

典型例题与方法：为了帮助大家灵活运用所学知识去分析问题和解决问题，掌握解题技巧，我们在典型例题与方法一节中，**依每章内容的特点和考试重点，对典型问题进行了适当的归纳，总结出几类典型题型**，并附以 1~3 **道例题，给出了相应的解题思路和解题方法**，以希望达到举一反三、融会贯通的效果。这部分例题可供课程综合复习和各类备考人员参考。

习题：主要**包括同步训练题和综合训练题**，同步练习以国内通用教材为基础，结合每章的重要知识点，给出了课程学习过程中的**同步训练题，可供选修数值分析课程的学生进行同步训练**，加深对课程内容的理解与掌握。**综合训练题的难度较同步训练题大**，是为系统掌握每章甚至全书内容而精选出的具有较强综合性和灵活性的习题，**适合于本课程的综合复习和各类备考人员参考**。

习题解答：给出了同步训练的详细解答与解题指导以及综合训练题的简要解答，供读者解题时参考。

最后，本书还**附上了两份模拟试卷和两份研究生入学考试全真试题及其参考答案**。其中模拟试卷可供工科本科生课程学习结业的摸底考试使用，研究生入学考试试题可供参加研究生入学考试者和在职申请硕士学位人员选考“数值分析”科目复习使用。

本书第一、二、三、四章由中南大学数学科学与计算技术学院的高培旺博士编写，第五、六、七、八、九章由国防科技大学航天与材料工程学院的雷勇军博士编写，第十章由两作者共同编写，最后由高培旺博士定稿。

本书在编写过程中得到了国防科技大学出版社潘生副编审的热情指导，在此对他的辛勤劳动表示衷心感谢；另外，国防科技大学航天与材料工程学院硕士研究生田蕾、李贞、罗亚中、谢燕给出部分习题的解答，在此一并表示感谢。

书中难免有疏漏及不妥之处，恳请读者指正。

作　者

2003 年 11 月于湖南长沙

目　录

第一章　误差分析

第二章　函数插值

第三章　函数逼近与曲线拟合

第四章　数值积分与数值微分

第五章　常微分方程数值解法

第六章 方程求根

第七章 解线性方程组的直接方法

第八章 解线性方程组的迭代法

第九章 矩阵的特征值与特征向量计算

第十章 应试模拟

第一章　误差分析

一、知识点要求

要求掌握：误差的基本概念与性质，绝对误差及绝对误差限、相对误差及相对误差限和有效数字之间的关系。了解误差的来源及传播，并会由此分析算法的收敛性及数值稳定性，理解在算法设计中应注意的事项。

二、内容提要

§1. 产生误差的主要来源

误差主要来源于模型误差、测量误差、截断（或方法）误差和舍入误差。在建立数学模型时与实际问题之间出现的误差称为模型误差；由观测某些参量产生的误差称为测量误差；用数值方法求近似解时，所得到的近似解与精确解之间的误差为截断误差或方法误差；而由于计算机的字长有限在用计算机表示数据时所产生的误差称为舍入误差。

本课程主要讨论截断（或方法）误差和舍入误差。

§2. 绝对误差与绝对误差限（界）

定义 1　设 a 是准确值 x 的一个近似值，称 $\Delta a = |x - a|$ 为近似值 a 的绝对误差。也有些教材直接把差 $e = a - x$ 称为近似值 a 的绝对误差，简称误差。当 $e > 0$ 时，a 叫做强近似值，而当 $e < 0$ 时，a 叫做弱近似值。

若 δa 是绝对误差 Δa 的一个上界，即有 $\Delta a = |x - a| \leqslant \delta a$，则称 δa 是近似值 a 的一个绝对误差限（界）。

显然，如果近似值 a 存在一个绝对误差限，则必有无穷多个绝对误差限。

§3. 相对误差与相对误差限（界）

定义 2　设 a 是准确值 x 的一个近似值，当 $x \neq 0$ 时，称 $\Delta_r a = \frac{\Delta a}{|x|} = \frac{|x - a|}{|x|}$ 为近似值 a 的相对误差。相对误差的一个上界 $\delta_a = \frac{\delta a}{|x|}$ 称为相对误差限。

近似值的精确程度通常是通过相对误差来衡量的。由于在实际计算中，精确值 x 一般是未知的，当 $a \neq 0$ 时，常用 $\tilde{\delta}_r a = \frac{\delta a}{|a|}$ 作为相对误差限来计算。

§4. 有效数字

若准确值x通过四舍五入得到近似数a，则自左向右的第一个非零数字到四舍五入得到的最末一个数字称为近似数a的有效数字。如果近似值$a \neq 0$有n位有效数字，则可写成标准形式如下：

$$a = \pm 10^m \times a_1 . a_2 \cdots a_n = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)}) \quad (1.1)$$

其中m为整数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$为0到9中的一个数字且$a_1 \neq 0$。于是，近似数的有效数字的位数可以通过它的误差限来定义。

定义3 若近似值a的绝对误差满足

$$\Delta a = | x - a | \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1} \quad (1.2)$$

则称a是x的至少具有n位有效数字的近似值。

根据上述定义，在m相同的情况下，n越大，即近似值的有效位数越多，其绝对误差限越小，近似的精确度越高。另外，近似值的有效数字还与相对误差有关。

性质1 若近似值a对精确值x的相对误差满足

$$\frac{\Delta a}{|a|} = \frac{|x-a|}{|a|} \leqslant \frac{5}{a_1 + 1} \times 10^{-n} \quad (1.3)$$

则a至少具有n位有效数字；反之，若a至少具有n位有效数字，则其相对误差满足

$$\frac{\Delta a}{|a|} \leqslant \frac{5}{a_1} \times 10^{-n} \quad (1.4)$$

这意味着：近似值的有效位数越多，其相对误差限也越小。

§5. 函数求值的误差估计

设a是准确值x的一个近似值，b是准确值y的一个近似值。关于一元函数$f(x)$，如果在a的邻域上连续可微，则近似值$f(a)$对精确函数值$f(x)$的误差，有下列近似表达式：

$$\Delta f(a) = | f(x) - f(a) | \approx | f'(a)(x-a) | = | f'(a) | \Delta a$$

由此推出近似函数值$f(a)$的绝对误差限和相对误差限的估计公式分别为

$$\delta f(a) \leqslant | f'(a) | \delta a, \delta_r f(a) \leqslant \left| \frac{f'(a)}{f(a)} \right| \delta a \quad (1.5)$$

其中，δa是近似值a的一个绝对误差界。

进一步，关于二元函数$f(x, y)$，如果在点(a, b)的邻域上连续可微，则近似值$f(a, b)$对精确函数值$f(x, y)$的误差，有下列近似表达式：

$$\Delta f(a,b) = | f(x,y) - f(a,b) | \approx \left| \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-a) \right|$$
$$\leqslant \left| \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \right| \Delta b$$

由此推出近似函数值$f(a, b)$的绝对误差限和相对误差限的估计公式分别为

$$\delta f(a,b) \leqslant \left| \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \right| \delta a + \left| \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \right| \delta b, \delta_r(a,b) \leqslant \frac{\delta f(a,b)}{| f(a,b) |} \quad (1.6)$$

根据上述估计公式，可导出最简单的二元函数，即两个数之间的加、减、乘、除运算的绝对误差限和相对误差限估计式：

$$\begin{aligned}&\delta(a \pm b) \leqslant \delta a + \delta b, \delta_r(a \pm b) \leqslant \frac{\delta a + \delta b}{|a \pm b|}\\&\delta(ab) \leqslant |b| \delta a + |a| \delta b, \delta_r(ab) \leqslant \delta_r a + \delta_r b\\&\delta\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \frac{|b| \delta a + |a| \delta b}{|b|^2}, \delta_r\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \delta_r a + \delta_r b (b \neq 0)\end{aligned} \tag{1.7}$$

§6. 算法的收敛性与收敛速度

凡近似算法必须得到理论上或实际上的收敛保证才能应用于求解问题，因此，保证收敛性是我们设计算法最基本的要求。

算法的收敛性主要是通过近似解逼近精确解的程度，即某种“距离”来描述的。

定义 4 如果由算法产生的近似解集合 $\{a_n\}$ 按某种选定的距离能逼近精确解 x 到任意程度，即任给 $\varepsilon > 0$，都存在 $N > 0$，使当 $n > N$ 时有

$$\| a_n - x \| < \varepsilon$$

则称该算法是收敛的；否则，不收敛。其中，$\| \cdot \|$ 表示某种选定的距离。

现设近似解数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于精确解 x，另有数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 0 且 $b_n > 0$。如果对某个常数 $p > 0$，存在某个 $N > 0$，使当 $n > N$ 时，有 $\frac{\| a_n - x \|}{\| b_n \|^p} \leqslant K$ 或 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\| a_n - x \|}{\| b_n \|^p} = K (\neq 0)$，则称近似解 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以收敛速度(或精度) $O(b_n^p)$ 收敛于 x 或称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 p 阶收敛的。当 $p = 1$ 时，称其为线性收敛；当 $p = 2$ 时，为平方收敛。

对数值方法收敛性的分析可分为两类：一类是通过截断误差的大小进行判断；另一类是依迭代算法产生近似解序列的收敛速度来进行评价。

§7. 舍入误差的传播及算法的稳定性

由于计算机采用的是二进制实数系统，且计算机的字长是有限的，因而十进制实数与计算机内的二进制实数之间就不能构成一一对应关系。这在十进制实数输入计算机转换成二进制实数以及运算过程中不可避免地需要执行舍入处理，由此产生的舍入误差在算法的下一步实施中会进行传播和积累，有可能导致最终计算结果严重失真，这种现象称为数值稳定性问题。由此可见，稳定性与收敛性一样，也是设计算法时需满足的最基本要求。

一个算法是否稳定，就是看舍入误差在传播和积累的过程中能否得到控制，使计算结果比较可靠。具体地，我们通过下面的示例给出说明。

设近似解 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是由递推公式

$$x_n = F(x_n - 1),\ n = 1,2,\cdots \tag{1.8}$$

得到的。若 x_0 给定，且 x_0 有舍入误差 e_0，则实际上只能得到

$$\tilde{x}_0 = x_0 - e_0, \tilde{x}_n = F(\tilde{x}_{n-1}), n = 1,2,\cdots$$

记 $e_n = x_n - \tilde{x}_n, n = 1,2,\cdots$。如果存在不依赖于 n 的常数 C，使得

$$| e_n | \leqslant Cn | e_0 |, n = 1,2,\cdots \tag{1.9}$$