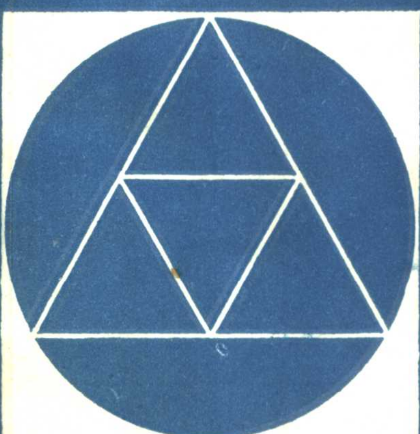
中学教师《专业合格证书》数学教材

SHUXUE

近世代数基础



东北师范大学出版社

中学教师《专业合格证书》数学教材

近 世 代 数 基 础

贺昌亭 张同君 编

东北师范大学出版社出版

（长春市斯大林大街110号）

吉林省新华书店发行 长春市第六印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张15.25 字数329 000

1987年11月第1版 1987年12月第1次印刷

印数 1—31 000

ISBN 7-5602-0035-4/O·16

统一书号：13334·31 定价：2.65元

说　　明

《中共中央关于教育体制改革的决定》提出："要争取在五年或者更长一点的时间内使绝大多数教师能够胜任教学工作。在此之后，只有具备合格学历或有考核合格证书的，才能担任教师。"为了贯彻落实这一要求，国家教育委员会决定建立中小学教师考核合格证书制度，并于1986年9月颁发了《中小学教师考核合格证书试行办法》。根据该《试行办法》的规定，我们已经组织编写出版了中小学教师《专业合格证书》文化专业知识考试各科教学大纲。现在，我们又按照教学大纲的基本要求，组织编写出版这套教材，供中小学教师参加《专业合格证书》文化专业知识考试用。这套教材包括：中等师范11门课程，高等师范专科14个专业的48门课程，高等师范本科12个专业的40门课程，以及公共教育学、心理学课程用书。

这套教材的编写力求具有科学性、系统性和思想性，并努力体现以下原则和要求：要有鲜明的师范性，紧密联系中小学教学的实际；要符合成人在职进修的特点，便于教师自学、自检；要使大多数教师经过努力可能达到规定的要求。

考核合格证书制度刚刚试行，尚缺少经验，加之这套教材出版时间仓促，难免存在一些问题。我们准备继续在实践中探索和研究，争取用几年的时间，建设一套适合我国中小学在职教师进修的教材。希望全国师范教育工作者，尤其是从事在职中小学教师培训工作的同志为此共同努力。

这套教材在编写、出版和发行工作中，得到了各省、自治区、直辖市教育行政部门，许多师范院校、教育学院、教师进修学校和师资培训中心，许多专家和教师，以及有关出版社和教材发行部门的大力支持和帮助，在此，一并致谢。

国家教育委员会师范教育司

一九八七年八月十五日

前　　言

这本《近世代数基础》教材是根据国家教育委员会师范教育司审定的中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试数学教学大纲编写的自学读本.

为了便于自学，为了使大多数读者能够在无师的情况下读懂《近世代数基础》这本书，我们除了把主要内容尽量写得详细清晰、通俗易懂之外，还用大量的系统的例题把近世代数的基本概念、基本理论具体化，希望通过书中的例题促进理解和掌握近世代数的基础知识与基本技能，同时使得读者的自学过程既是增加知识的过程，又是提高自学能力的过程.

考虑到本书的读者基本上是在职的中学数学教师，本书在论述过程中尽量注意联系中学数学教学的实际．这样，一方面缩短了近世代数的理论与初等数学的内容之间的距离，从而减少读者学习近世代数的生疏感，另一方面，有利于教学工作与自学进修之间的结合与相互促进.

本书在内容的组织设计上特别突出了两点：首先是强调打好基础，下功夫学好前两章．因为近世代数的概念、理论与方法在前两章中都有充分的完整的体现，所以，如能对前两章的内容有了较好的理解和掌握，那么，学习后两章，可以说将不会有太多的困难．其次是强调理解和掌握近世代数的观念与方法．这是学懂近世代数的关键所在.

由于读者情况有着这样或那样的差别，为了与这种差别

相适应。本书在内容的安排上有一定的伸缩性．一方面用星号标出一部分内容，另一方面在各节的最后部分配置了一些较为深入的例题．这两部分内容对于深入理解近世代数的理论与方法会起到相当的作用．

此外，为了便于读者参考，我们相应地编写了一本《自学指导与习题解答》．

本书由东北师范大学数学系张海权教授主审．

由于我们的水平、能力所限，书中一定会有许多不足之处，诚恳地希望同志们批评、指正．

编　者

于东北师范大学数学系
一九八七年七月

目　　录

第一章　基本概念

§1 集合……………………………………………………（1）

§2 映射……………………………………………………（20）

§3 集合的子集分解　等价关系…………………………（48）

§4 代数体系………………………………………………（76）

§5 代数体系的比较——同构与同态……………………（111）

第二章　群

§1 半群与群………………………………………………（133）

§2 子群……………………………………………………（169）

§3 循环群…………………………………………………（176）

§4 变换群　置换群………………………………………（195）

§5 子群的陪集……………………………………………（222）

§6 正规子群与商群………………………………………（241）

§7 群的同态基本定理……………………………………（256）

第三章　环

§1 环的定义、例子及简单性质…………………………（275）

§2 环的几种主要类型……………………………………（291）

§3 子环与扩环……………………………………………（313）

§4 理想子环与差环　同态定理…………………………（334）

§5 整环上的因子分解……………………………………（360）

§6 唯一因子分解整环上的多项式环……………………（382）

第四章　域

§1 特征数　最小域………………………………………（388）

§2 扩张　代数扩张……………………………………………(396)
§3 单纯扩张……………………………………………………(404)
§4 有限扩张……………………………………………………(419)
§5* 分裂域……………………………………………………(431)
§6 用直尺和圆规作图问题……………………………………(457)
§7 序　有序环　有序域………………………………………(469)

第一章 基本概念

本章是全书的基础，讲述在以下各章中经常要用到的一些基本的概念.

本章共有五节，主要讲两方面的问题. 前三节介绍有关集合、映射与等价关系的一些基本概念和基本性质. 这些概念以及有关的一些性质不仅是学习近世代数必要的预备知识，同时也是近代数学各分支的重要的基础知识；后两节介绍代数体系与同态这两个基本概念. 它们明确地指出了近世代数讨论的基本对象和研究问题的基本方法.

第二节映射和第四节代数体系是本章的两个重点. 而在理解、掌握和运用第三节——等价关系与集合的子集分解和第五节——同态、同构的深刻意义和思想方法方面，一部分读者可能会遇到某些困难，从这个意义上说，这两节是本章的两个难点.

学习本章的要领——掌握重点、克服难点、排除疑点，在于使抽象的概念和抽象的性质具体化. 为此，有必要熟练地掌握一批典型的例子，通过例子理解概念和性质，运用例子掌握理论和方法. 这是学习近世代数的基本要领和有效方法.

§1 集　　合

本节主要是根据本书的需要，系统地介绍有关集合的一

些概念、术语和符号以及相应的一些基本性质.

（Ⅰ）集合的概念与表述方法　子集

高等代数已经涉及过一些相当具体的集合. 例如：

数的集合：把所有的整数作为一个总体来看就是整数集合 $\mathbf{Z}$;

多项式的集合：把所有的实系数一元多项式作为一个总体来看，就是实系数一元多项式集合 $\mathbf{R}[x]$;

矩阵的集合：把所有的元素为有理数的二行三列矩阵作为一个总体来看，就是 2×3 有理矩阵集合$M_{2\times3}(\mathbf{Q})$.

可见，集合这样一个数学名称并不令人生疏，也不会有什么费解之处. 但是，由于在近世代数的讨论中所涉及的不只限于数、多项式和矩阵这些具体的事物，可以是非常一般的、相当抽象的数学对象，并且从事物的总体上来考虑问题又是代数学的一个重要特点，因此有必要把“事物的总体”这样一个概念明确起来. 这在数学上通常就是用“集合”这个名称来表达的. 于是，我们可以说：

任何一些事物的总体叫做集合. 集合也简称为集.

作为个体来看的事物叫做元素.

一般用大写的拉丁字母A、B、C、……表示集合；用小写的拉丁字母a、b、c、…表示元素.

集合与元素之间的基本关系是属于与不属于. 当元素a是集合A中的元素时，就说a属于A，也说A含有a，记作$a\in A$. 否则，即当a不是集合A中的元素时，就说a不属于A，也说A不含有a，记作$a\bar{\in}A$.

约定：不含有任何事物的总体叫**空集合**，记作ϕ.

现在明确规定两个集合相等的意义.

设A与B是任意的两个集合，如果A与B含有完全同样

的元素，就说A与B相等，记作A＝B．换个说法就是：

$A=B$ 当且仅当 $x\in A\Longleftrightarrow x\in B$.

下面介绍表述一个集合的方法．一般有三种方法：

1） 用语言说出一个集合是由哪些元素组成的．

2） 在表示集合的字母后面点三个点，随后写出全部元素．

3） 用符号 $A=\{\cdots\}$ 表示A是由括号里的元素所组成的．在括号中可以写出A的全部元素，也可以用适当的数学符号指明A的元素所应满足的条件．例如

$$A=\{1,\ -1\},\ B=\{x\mid x^2-1=0\}.$$

前者具体地写出集合A是由1与-1两个数组成的；后者清楚地表明集合B的元素恰好是二次方程$x^2-1=0$的根．一般地，在括号中竖线后边指出该集合中的元素所应满足的条件．根据集合相等的定义，这里列举的A与B是相等的，即$A=B$.

为了说明问题和便于引用，下面罗列一些集合的例子．其中多数是大家比较熟悉的．

例 1 常用的数集

1） 自然数集

$\mathbf{N}$：1，2，3，…，n，…

2） 整数集

$\mathbf{Z}$：…，-3，-2，-1，0，1，2，3，…

3） 有理数集

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\,a,\ b\in\mathbf{Z},\ b\neq0\right\}.$$

4） 所有的实数做成的集合叫实数集，用$\mathbf{R}$来表示．

5） 复数集

$$C=\{a+bi \mid a,\ b\in\mathbf{R}\}.$$

6) 非负整数集

$\mathbf{N}^*$：0，1，2，3，…，n，….

例 2 多项式集合

1) 设F为任一数域．于是，系数属于F的一切一元多项式的集合

$$F[x]=\{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+ +a_nx^n \mid a_i\in F,\ n\in\mathbf{N}^*\}.$$

2) 对任意一个取定的非负整数m，系数属于F、次数小于m的一切一元多项式的集合

$$F_m[x]=\{a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1} \mid a_i\in F\}.$$

注意，零多项式是 $F_m[x]$ 的元素．因为我们认为零多项式也被规定了一个次数，即$-\infty$．而且$-\infty<m$.

例 3 考虑实系数的三元一次齐次联立方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_mx+b_my+c_mz=0. \end{cases} \qquad (1)$$

把每一个形式如（1）的方程组作为元素就组成一个集合S．这个集合S具有明显的几何意义，建议读者给予具体的几何解释.

例 4 矩阵的集合

1) 实数域$\mathbf{R}$上所有的二阶方阵组成的集合，即以一切实二阶方阵作为元素的集合

$$M_2(\mathbf{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,\ d\in\mathbf{R}\right\}.$$

2) 实二阶可逆矩阵组成的集合，记作

$$GL_2(\mathbf{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in\mathbf{R}, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0\right\}.$$

3) 实二阶特殊矩阵组成的集合，即以一切行列式等于1的实二阶矩阵做为元素的集合，记作

$$SL_2(\mathbf{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in\mathbf{R}, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=1\right\}.$$

例 5 n 元实二次型的集合，即以一切n个变数的实系数二次齐式为元素组成的集合

$$S: f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=XAX'.$$

其中 $X=(x_1x_2\cdots x_n)$ 是1行 n 列矩阵，$A\in M_n(\mathbf{R})$，并且$A'=A$.

类似地，把每一个 n 元复系数的二次齐式作为元素也组成一个集合

$$T=\{f=XAX' \mid X=(x_1x_2\cdots x_n), A\in M_n(\mathbf{C}), A'=A\}.$$

例 6 考虑一个给定的平面 π. 于是

1) 以平面 π 上的每一条直线为元素组成一个集合 L.

2) 以平面 π 上的每一个三角形为元素组成一个集合 Δ.

3) 以平面 π 上的每一个圆为元素组成一个集合 K.

例 7 考虑我国1986年12月31日在编的中学教师. 以每一位在编的中学教师为元素组成一个集合 T. 可以记作

$$T=\{x \mid x \text{ 为1986年12月31日在编的中学教师}\}.$$

类似地，我国1986年12月31日在编的中学数学教师（这是可以认定的）也组成一个集合 S. 它的元素就是每一位在编的中学数学教师. 可以记作

$$S=\{x\in T \mid x \text{ 是数学教师}\}.$$

例 8 在进行队列训练时有这样四句简单的口令：

立正；向左转；向后转；向右转。

把这四句口令的每一个作为元素就组成一个集合

S：立正，向左转，向后转，向右转.

也还可以记作

$S=\{$立正，向左转，向后转，向右转$\}$.

类似地，以两个汉字“有”与“无”为元素也同样可以组成一个集合

T：有，无.

或者记作

$T=\{$有，无$\}$.

如果一个集合A是由无限多个元素组成的，那么就说A是**无限集**. 如果集合A是由有限个元素组成的，那么就说A是**有限集**. 特别地，空集是有限集，通常用符号$|A|$表示有限集A中元素的个数. 上面提到的例1～例6中各个集合都是无限集，而例7与例8中所说的集合则都是有限集. 并且对例8中的两个集合来说，明显可见

$$|S|=4,\quad |T|=2.$$

下面再举两个常见的有限集的例子.

例 9 n次单位根的集合

令n为取定的一个正整数，则有集合

$$\bigcup_n=\{x\in\mathbf{C}\mid x^n=1\}$$

是一个有限集，并且$|\bigcup_n|=n$. 这个集合$\bigcup_n$是以1的n次方根为元素组成的，叫做n次单位根集. 具体地看，有

$$\bigcup_1=\{1\},$$

$$\bigcup_2=\{1,\ -1\},$$

$$\bigcup_3=\{1,\omega,\omega^2\},\ \text{其中}\ \omega=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i,$$

$$\bigcup_4=\{1,i,-1,-i\}.$$

例 10 前n个正整数1，2，3，…，n组成一个有限集

$$\mathbf{N}|_n=\{1,2,3,\cdots,n\}.$$

顺便我们可以考虑前n个正整数的全排列．以这样的每一个全排列为元素也组成一个集合，通常记作P_n．我们已经知道，P_n是有限集，并且$|P_n|=n!$．特别地，当$n=3$时，则有$|P_3|=3!=6$，而且

$$P_3: 123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321.$$

我们还知道，排列有奇、偶之分：反序数为奇数者叫奇排列；否则，叫偶排列．并且P_n之中排列奇、偶各有一半，即都是$\frac{n!}{2}$个．这样，比如在P_3中来看，其中的三个奇排列也组成一个集合

$$P'=\{132,\ 213,\ 321\}.$$

其余的三个偶排列组成的集合为

$$P''=\{123,\ 231,\ 312\}.$$

下面介绍与集合概念密切相关的另一个重要概念——子集合．

定义 1 设A、B为任意的集合．如果凡是属于B的每一个元素都属于A，那么就说集合B是集合A的子集合．简称B是A的**子集**．用符号$B\subseteq A$表示B是A的子集．

当B是A的子集时，就说B含于A或者说A包括B．

如果$B\subseteq A$，但是$B\neq A$，就说B是A的**真子集**，记作$B\subsetneq A$．

对任意的集合A，根据定义1，显然有

$$A\subseteq A,\quad \phi\subseteq A.$$

即集合A恒为它自身的子集；空集ϕ是任一集合的子集．把ϕ与A叫做A的**平凡子集**．此外，如果A还有其它的子集，

就叫做是A的**非平凡子集**.

一般地，对于给定的一个集合A，考虑A的一切可能的子集是有意义的，也是有必要的. 这样，把A的每一个子集作为元素就相应地组成一个集合，叫做集合A的**幂集合**，记作 2^A 或者 $P(A)$，即 $2^A=\{x\mid x\subseteq A\}$.

我们结合前面提到的集合来看子集的例子，以便于进一步理解相应的概念.

首先，对于常见的那几个数集来说，有如下的包括关系：

$$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{N}^*\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}.$$

而且由于依次是真子集，因此更加确切的包括关系应当是

$$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{N}^*\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}.$$

对于多项式集合$F[x]$与$F_m[x]$来说，显然$F_m[x]$是$F[x]$的真子集，即$F_m[x]\subsetneqq F[x]$. 一般地，有如下的包括关系：

$$F_0[x]\subsetneqq F_1[x]\subsetneqq F_2[x]\subsetneqq\cdots\subsetneqq F_m[x]\subsetneqq\cdots.$$

对于实数域$\mathbf{R}$上的二阶方阵的集合$M_2(\mathbf{R})$、$GL_2(\mathbf{R})$、$SL_2(\mathbf{R})$，由于$SL_2(\mathbf{R})$是$GL_2(\mathbf{R})$的真子集，$GL_2(\mathbf{R})$又是$M_2(\mathbf{R})$的真子集，所以有

$$SL_2(\mathbf{R})\subsetneqq GL_2(\mathbf{R})\subsetneqq M_2(\mathbf{R}).$$

对于一切n个变数实系数的二次型集合S，当中的一切恒正（正定）型组成S的一个子集S'，而且是S的一个真子集，即$S'\subsetneqq S$.

对于平面π上一切三角形的集合$\triangle$，它有如下常见的一些子集：

$$\triangle_1=\{x\in\triangle\mid x\text{ 是锐角三角形}\},$$

$$\triangle_2=\{x\in\triangle\mid x\text{ 是直角三角形}\},$$

$$\triangle_3=\{x\in\triangle\,|\,x\text{ 是等腰三角形}\},$$

$$\triangle_4=\{x\in\triangle\,|\,x\text{ 是等边三角形}\}.$$

它们之间的包括关系是

$\triangle_i\subseteq\triangle$，但是$\triangle_i\neq\triangle$，所以$\triangle_i\subset\triangle$，

$i=1，2，3，4.$

$\triangle_4\subseteq\triangle_1$，但是$\triangle_4\neq\triangle_1$，所以$\triangle_4\subset\triangle_1$.

$\triangle_4\subseteq\triangle_3$，但是$\triangle_4\neq\triangle_3$，所以$\triangle_4\subset\triangle_3$.

对于我国1986年底在编的全体中学数学教师组成的集合S，可以考虑如下的一些子集：

$$S_1=\{x\in S\,|\,x\text{ 具有20年以上的教令}\},$$

$$S_2=\{x\in S\,|\,x\text{ 是教令不到20年}\},$$

$$S_3=\{x\in S_2\,|\,x\text{ 是任初中课的}\},$$

$$S_4=\{x\in S_2\,|\,x\text{ 是任高中课的}\},$$

$$S_5=\{x\in S_3\,|\,x\text{ 具有大专以上学历}\},$$

$$S_6=\{x\in S_4\,|\,x\text{ 具有本科学历}\}.$$

因为（调查数字表明）教令不到二十年的教师不全是初中教师，也不全是高中教师，所以S_3与S_4都是S_2的真子集，即

$$S_3\subset S_2，\ S_4\subset S_2.$$

再有，事实上的确还有相当一部分不具有合格学历的初、高中数学教师．因此，S_5是S_3的真子集；S_6是S_4的真子集．即

$$S_5\subset S_3，\ S_6\subset S_4.$$

其次考虑幂集的例子．

对于整数集$\mathbf{Z}$，因为 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$，$\mathbf{N}^*\subseteq\mathbf{Z}$，$\mathbf{N}|_n\subseteq\mathbf{Z}$，所以

$$\mathbf{N}\in 2^{\mathbf{Z}}，\ \mathbf{N}^*\in 2^{\mathbf{Z}}，\ \mathbf{N}|_n\in 2^{\mathbf{Z}}.$$

对于正整数集$\mathbf{N}$，因为$\mathbf{N}|_n\subseteq\mathbf{N}$，所以$\mathbf{N}|_n\in 2^{\mathbf{N}}$．同