數學科技叢書16

# 集合,邏輯,與設基理論

史　陶　原著
劉福增　譯述

水牛出版社

數學科技叢書 16

# 集合，邏輯與公設理論



史　陶　原著
劉福增　譯述

水牛出版社

# 集合，邏輯，與設基理論

數學科技叢書 16


| | |
|---|---|
| 著　　者： | 史　　　　　陶 |
| 譯 述 者： | 劉　　福　　增 |
| 發 行 人： | 彭　　誠　　晃 |
| 出 版 者： | 水牛圖書出版事業有限公司 |
| 地　　址： | 台北市金山南路一段135號2樓 |
| 電　　話： | 3410275•3215644 |
| | 郵政劃撥0013932－1號 |
| 初　　版： | 中華民國 59 年 6 月 3 日 |
| 再　　版： | 中華民國 75 年 11 月 30 日 |

登記證　局版台業字第0628號

# 譯　序

本書是就奧柏林學院數學教授史陶 (R. R. Stoll) 所著 "Set, Logic, and Axiomatic Theories" 一書譯述而成的。史陶畢業於匹茨堡大學，並於1943年在耶魯大學獲得 Ph. D. 學位。

兩年多以前我已把本書前兩章譯成講稿印發給學生。但已忘記爲什麼，後面兩章沒有繼續譯下去。最近重閱本書時，我覺得有把全書譯出的必要。於是，首先把前兩章的譯稿大加修改，並繼續譯出後面兩章。

原書有下面幾點特色。

一、原書每一節的寫法大致分爲三部分。那就是，概念的敍述和名詞的定義，例子，和習題。概念的敍述和名詞的定義部分寫得很簡要。同時，大部分的例子都在中等程度以上。所以，一般初學者，第一次閱讀本書時，恐怕不易讀懂。但不要緊，多讀幾次自然就會了。

二、原書的選材很適中。對一個只想利用數學基礎的知識，而不是要研究數學基礎的人來說，本書的題材已經足够使用。原書作者在序言裡說過的，這一本書是即將出版的講述現代抽象數學之基礎的更廣含的教科書之一部分。這本敎科書已於1963年出版了。現在我已把此書的目錄譯好附在本書後面。讀者可參照這兩本書的目錄，藉以了解題材取捨的標準。

三、在設基理論部分，這本書的闡釋比其它同類書上的要詳細和深入。這是我要把本書譯出的最重要的理由。因爲現代的數學以及許多科學已大量使用設基法，所以我們很需要對設基法本身做進一步的了解。

四、原書對布氏代數做了很精要的介紹。這在同類的書上是很難看到的。這也是我要譯出原書的重要理由之一。

本書原來使用的連言號是∧，我現在一律把它改爲&。後者的使用似乎愈來愈普遍。同時爲了方便起見，我把"statement"譯成"語句"。

在本書及與本書同時出版的"邏輯觀點"（第一集）的編印過程中，我的學生在整理稿件，抄寫稿件和校對工作上給我許多可貴的幫忙。他（她）們就是，哲學系的劉沙林，楊秀霞，何克英；數學系的賈海萍，張美琴；商學系的蘇啓賢，莊錦福；護理系的杜敏世，陳心耕，麥麗容，何紅崧，賴淑瑛；農化系的李自宜；和植病系的黃炳華，徐開倫。尤其是蘇啓賢和莊錦福兩位對本書的校對格外精細，本書索引也是他們兩位編的。在此我要向以上所有同學致眞誠的謝意。

這些年來，上課敎書以及學生們略爲滿意的微笑，一直是我生活中最重要的快樂泉源。我拋出一些邏輯，常常意外地收回許多珍貴的友誼。譬如，上學期在臺大醫學院上課的護理系三年級的同學，幾乎全班二十幾個人都來臺大校本部選我開的邏輯。她們在上完下午五點鐘的課後，還要從醫學院匆匆趕來上下午六點到九點的課。連續上三個小時，據她們說還不想睡覺。事實上，上學期白天我也到語言中心 only repeat 英語去。每次上邏輯課前，我也要像她們那樣，在上完下午五點的課後，從語言中心趕回學校來。在被上六節課後，還要自上三節課。因此，我也是相當累的。不過她們在醫學院（語言中心就在那裡）看到我時，還常常會說：老師昨天上課很辛苦了。有一次我咳嗽了。她們還說要在臺大醫院裡順手帶 cough mixture 和醫院自配的 A. C. A 給我。有一位同學看我常帶杯茶到講桌上，她還吩咐我以後要蓋好蓋子。跟她們討論邏輯時，她們還會沏茶和冲可可來。

在沒有人看管的生活中，這些細心細意的照應，使我感到十分和暖。不知怎樣，我就跟她們十分熟起來了。我還曾被她們托到山邊去聽風的聲和水的語。我還聽到她們美妙的歌聲和山鳥的呢喃應和着。偶爾我也跟唱幾曲。總之，我會常常想念這群漂亮的未來的白衣天使的。相信她們也不會忘掉我吧！

有些同學問我上課時爲何有那股熱勁，是不是有什麼特別令人起興的東西。其實目前我周遭的世界並沒有什麼特別令人興奮的地方。但我常自喻自己的心要像一座自然的活火山。這樣外界的溫度不管多少，我的內心却始終會熱熊熊的。這樣我才能够溫暖自己以及溫暖
① 別人，並且成就自己以及成就別人。我認爲這是最好的生活方式之一。

這些年來，有些讀者曾寫信來跟我討論一些問題。除了少數幾封外，我差不多都沒有回。我知道這很不應該，但不知道爲什麼我會這樣懶散。數學家和哲學家懷德海是出奇地懶於回信的人。他的理由是寫信會影響創造。我的理由恐怕沒有這麼嚴重。不過，我說了一個眞實的故事後，相信讀者就不會太計較我了。今年過完農曆年後，我就從家鄉到臺北來。一個多月後母親看我旣沒回去又沒寫家信，於是叫哥哥寫信來問個究竟。我仍然無聲無息。於是母親又叫我侄兒寫信來，我仍然無聲無息。於是母親又叫我姪女寫信來，我仍然無聲無息。不久以前，我正在寫東西的時候，母親和哥哥突然出現在門前。我一看到她老人家時，她便說怎麼那麼久沒回家也不寫信，今天叫哥哥請了假陪她來看我的。她說好久沒有我的音訊，晚上睡不著時常常會掛念，心理很不舒服。她老人家已經七十多歲了，還要特地從新竹鄉下趕來臺北看我。其實我已不小了，可是在她老人家的心目中，一個單個兒在外的孩子終究還是個孩子。

陽光之下沒有沒有例外的東西。雖然我平時很懶於寫信，但當情波浪動時，我會十分勤勉的。我畢竟是一個很正常的人。我發現有一個女孩很喜歡藍色。從第一次叫到她的名字起，她的微笑繼續令人想到世界的美好和可愛的部分。本書封面的顏色就是爲她而選的。

劉 福 增

1970年5月18日

國立臺灣大學

# 原　　序

這本小書是爲當做一學期課程的教科書和當做一本參考書而設計的。本書題材取自通常被稱爲基礎那部分的數學。"數學基礎"(foundation of mathematics)一詞的意義因人而異。就我所使用的而言，我把它了解做數學基本概念的分析，這種分析是爲從一般而統一的觀點來研究數學的上部結構做準備的。我相信本書的材料可供若干種人士的需要。一種是計劃學習某種抽象數學的大學本科生。另一種（如果可能跟它種區別的話）是想教高中數學的人。再一種是已經在中學教書的人。最後，我相信已經沈迷於數學的聰明的高中學生，能够有益地閱讀本書的大部分材料。現在我要描述一下本書所處理的論題，同時借此來說明本書何以對上述人士有所用處。

在近年出版的爲某種抽象數學的入門課程所寫的教科書中，許多有概述預備概念的"第零章"。這樣的一章通常都不適合於初次遇見這些論題的學生的。在本書裡第一章是這種第零章的一種擴充的寫法，裡面放有許多例子和習題。本章和第三章的頭四節合起來，應該在大學生原先把數學當做一種計算理論的概念，和把數學當做更高和更現代的數學的抽象性質之間的空隙，建立一所橋梁。第三章上述部分是講設基理論之概念的。因此，我認爲精通第一章和第三章的前面部分，能使大學生不必花頭幾個星期去討論集合，函應，次序關係，等等諸如此類的概念，就可以拿拓樸的概念開始學拓樸學的入門課程，和拿代數的概念開始學代數的入門課程了。現在正在高中教數學的人當然熟悉我們所討論的題材。但是他們對這些題材的現在形式和新的術語也許就不會那麽熟悉了。如果他們要能够閱讀像"數學教師"這一

類雜誌上近年所刊文章，或準備敎任何新增的數學課程，甚至或要評定所提的種種新課程，則熟悉這些似乎是不可缺少的。

第二章講符號邏輯。我們很詳細講語句演算；這是符號邏輯的標準題材中最簡單的部分。有限制的述詞演算只講個概要而已；語句演算在此只是一很少的部分而已。然而我們是拿語句演算裡所使用的同一模型來處理述詞演算的，所以要了解述演詞算應該充分把握語句演算。本書所講的符號邏輯的範圍可能對多數的讀者都可適用。又本書所講的並未超出一個有學養的人應所知道的最小的範圍。若干最偉大的心智曾研究符號邏輯，當他們的結果被了解時，是人智上令人難忘的創造。任何嚴格的數學學生如果要能够利用符號邏輯的符號和學習如何形成“就 $x=a$，$f$ 爲連續”的否定，他應知道符號邏輯的基本原理。

第三章的最後部分是擬給想知道符號邏輯如何在研究有關形式設基理論有關的問題上發生作用的人，做個準備。

第四章講布氏代數理論。這一章是要給曾努力去通過第一，二章和第三章的前面部分的人的一種獎賞。許多曾被發展的概念在這裡被拿來在很少幾頁的篇幅內，去獲得不論是歷史上和現在的興趣上都有用的布氏代數理論的基本部分。爲了美觀起見，我選擇一種在結構上怪豐富的理論來講。

本書是從即將出版的一本講現代抽象數學之基礎的更廣涵的敎科書所選出來的（參看譯序——譯者）。到現在爲止，給這部書幫助的機構和人士很多。國家科學基金科學人員獎助金和奧柏林學院所給的一年休假，使我能够有充足的一年來撰作這部書。加州理工學院給我刺激而新鮮的工作環境。我很感謝以前的同事麥加里敎授（Angelo Margaris）勸我學習有關邏輯的東西。麥加里敎授和出版社所選的批

評人士曾很仔細地閱讀本書原稿，指出錯誤和提出許多改進意見。最後但並不是最不重要的，我很感謝我的太太。她爲我反覆抄打原稿，到達完美的地步，同時在我努力寫作時她一直耐心協助。

史陶 (R. R. Stoll)

1960 年 9 月 3 日

# 目　次

# 第一章
# 集合與關係

把集合論當做一門數學來研究是自德國數學家康托 (G. Cantor, 1845-1918) 創始的。在此我們不對集合論的誕生及其成長做完整的說明，因爲要了解這些需要相當的數學知識。可是，我們卻要走馬看花似地簡單描述一番。如果這樣的描述不能讓你滿意，並不要緊，因爲你並沒有遺失什麼。但是，如果你懂得其中一部份，你或許會獲得一些東西。

康托因爲研究有關三角級數及實數級數，使他感到需要有一種方法來比較數的無限集合的量。爲對付這個問題，他引進了集合的勢 (power)（或大小 (size)）的概念。他說，兩個集合具有**相同** (same) 的勢如果其中一個的分子可以跟另一個的分子配對起來。因爲兩個有限集合可以配對起來恰好如果它們具有相同數目的分子，所以一個有限集合的勢可視同數數(a counting number)一樣。這樣，無限集合的勢的概念是日常數數的一種推廣。康托發展了這些推廣了的（或超限 (transfinite)）數的理論。在做這種發展時，他創造了一種集合論。他在這方面的成就，被認爲是數學創造上一個傑出的例子。

康托主張把無限當做一種實元 (an actuality) 來處理。這也就是說，他把無限集合和超限數與有限集合和數數同等看待。他這種見解，在當時是一種創新。當時因爲偏見有些數學家反對他這種觀點。可是，因爲這種理論對超越數的存在提出一種證明，所以也有一些數學家贊同這種觀點的。後來，也陸續發現這種理論可應用於分析（學）

和幾何。在 1890 年，康托的集合論獲得承認為一支獨立自主的數學。在十九，二十世紀之交，因為發現從集合論的內部可導出矛盾來，所以數學家對於集合論的態度也有了某種改變。這種矛盾即所謂詭論 (paradox)。詭論的出現並不被認為是嚴重的缺點，因為一旦對這些詭論有了充分的了解，我們是可以把它們解決的。康托的集合論所提出的問題及集合論的利用，合起來逐漸創造了對抽象集合的一般理論之獨立興趣。在這種抽象的理論裡，康托的觀念充滿了廣泛的形式。本章就是以這種一般理論為基礎的。

本章要在集合論的架構內，特別討論三個重要的數學概念：函應，等應關係和次序關係。1.3—1.6 節在做必要的準備，而 1.1 和 1.2 兩節則在描述通往康托集合論的起點。

有人也許會問，選擇一個我們已經知道終究將導致災禍的東西當起點，是否聰明。事實上，我們已經小心地避免了這種麻煩。這也就是說，在若干重要項目上，本章是獨立於康托的集合論或"素樸的" (naive) 集合論的。實際上，任何供做數學當基礎的集合論，都會包括在本章所出現的主要定義和定理。不過，僅僅是我們用來獲得若干這些結果的方法是素樸的。但使用這樣的方法並不會產生什麼不可補救的害處；實際上，這種方法正是數學上常用的標準工具。

在本章裡，我們要假定讀者已熟悉整數，有理數，實數和複數等系統。有了這方面的知識，將增加我們以舉例幫助讀者了解我們所要討論的定義，定理等等的可能性。我們將分別以畫下線的英文大寫字母 $\underline{Z}$, $\underline{Q}$, $\underline{R}$ 和 $\underline{C}$ 代表整數，有理數，實數和複數等集合；並且分別以符號 $\underline{Z}^+$, $\underline{Q}^+$ 和 $\underline{R}^+$ 代表正整數，正有理數和正實數等集合。

## 1. 1. 康托的集合概念

現在讓我們看看康托的集合 (set) 概念，然後再對這個概念的組成部分做個簡要的分析。依據他的說法，一集合 $S$ 是任何我們的直覺或我們的理知所能意會成一整體的明確而清晰可分的事物之集體。這些事物叫做 $S$ 的**元素** (elemenst) 或**分子** (members)。[這種說法是不適於當作集合之定義的。因爲所謂「集體」「整體」不過是「集合」的同義詞而已。實際上「集合」是數學的基本觀念之一。其基本的程度到很不適宜再用更基本的數學名詞予以定義了。——譯註]

在康托的集合概念裡，最要緊之點是：把事物之集體看成一個單一的東西 (意會成一整體)。我們人的注意力從個別的事物轉向到把這些個別的事物之集體看成一單一的東西，這是常見的事。例如，我們日用語言中的串、群、束、班、團、隊、套、族、類等等都是很好的例證。

那麼，什麼樣的事物才可放在一集合裡呢？「我們的直覺或我們的理知所能意會到的事物」一語告訴我們，可放在一集合裡的事物是相當自由的。第一，這話告訴我們，組成集合的事物之性質是不受限制的。例如，蘋果，沙粒或素數等等都可以當作集合的成分。然而在數學的應用上，我們常把點，線，數，數集合等等當作集合的分子。第二，集合的分子即使不能明文列示出來，也是可以的。在這一點上，首先我們可能想到無限集合。這種集合即使在理論上，我們也不可能把它的分子集合起來當作一個集合整體的。譬如，全部素數所構成的集合和在歐氏平面上所有以有理數爲坐標的點所成的集合，便是這種集合。又即使就有限集合來說，也有像任何無限集合那樣抓拿不到的。

拿一個古老的例子來說吧。一個具有 10,000 個字號的自動排字機，適足以做爲任何語言的印刷之用。這 10,000 個字號中包括已有

的各種型態的大小寫字母、數字、標點和一個表示空隔的空白字。其實多少個字號並不重要，只要兩個或兩個以上的字號也就够了。

在康托的集合概念中，另外一些關鍵字眼是「淸晰可分的」和「明確的」。所謂「淸晰可分的」，依他的用法是指：對於任何有資格當某一特殊集合的一對事物，我們必須要能够決定它們是相異或相同。所謂「明確的」是指：如果有一集合和一事物，我們要能決定該事物是否爲該集合的分子。這就是說，一集合完全由其分子來決定的。

## 1. 2. 直覺集合論的基礎

依據康托，集合是由叫做元素或分子的事物所組成的（我們將把分子與元素當同義詞來使用）。我們說，如果有一特定的事物和一特定的集合，則我們能決定該事物是否是該集合的一分子，其意思是說，如果在“…是…的一分子”中，以一事物的名稱塡入上面第一空格，以一集合的名稱塡入第二空格，則我們能決定所得到的語句是眞的還是假的。這樣，分子關係這一概念是指事物與集合間的關係。我們將用 $\in$ 來表示這種關係。因此，如果事物 $x$ 是集合 $A$ 的一分子，則寫成：

$$x \in A$$

唸成 $x$ 在 $A$ 裡，或 $x$ **屬於** (belong to) $A$。又如果 $x$ 不是 $A$ 的一分子，則寫成：

$$x \notin A$$

唸成 $x$ 不在 $A$ 裡，或 $x$ 不屬於 $A$。其次，我們以：

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$$

表示“$x_1 \in A$，$x_2 \in A$，$\cdots$ 及 $x_n \in A$”。

康托的假設，即一集合是由其分子決定的，可用分子關係的話寫成下述的形式：

**直覺的外範原理** 兩個集合爲相等 (equal) 恰好如果它們具有相同的分子。

如果兩個集合$X$和$Y$相等，我們用

$$X=Y$$

來表示。如果不相等，則用

$$X\neq Y$$

來表示。我們必須知道，這個對分子關係所假設的外範原理並不瑣細無用。[它告訴我們一個很豐富的原理，這個原理就是我們經常可用或該用分子關係來表示或說明集合關係。] 通常，要證明兩個特定的集合$A$和$B$爲相等時，我們要分成兩部分來證，即如果 $x\in A$，則 $x\in B$；並且，如果 $x\in B$，則 $x\in A$。

如果一個集合$A$的分子爲事物 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 時，我們常寫成

$$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}。$$

如果$A$的分子只有一個 $x$，則寫成

$$A=\{x\}。$$

這種集合稱爲**單元集** (unit set)，因其唯一的分子是 $x$。

**例 A**

**例 1.** 如果$A$爲所有正偶數之集合，$B$爲所有能以兩個正奇數之和來表示的正整數之集合，則$A$與$B$相等。

**證明:**

首先假定 $x\in A$，並由此導出 $x\in B$。

如果 $x\in A$，則 $x=2m$，故 $x=(2m-1)+1$，意即 $x\in B$。

其次假定 $x\in B$，並由此導出 $x\in A$。

如果 $x\in B$，則 $x=(2p-1)+(2q-1)$，故 $x=2(p+q-1)$，此式涵蘊 $x\in A$。