

51.6055

491610

JSQ

高等数学的例题

与习题

高等专科学校教学参考书

高等数学的例题与习题

金士岐 编

目 录

前言		第四章 不定积分	91
第一章 极限与连续	1	一 简单不定积分的例 题	91
一 函数的例题	1	二 用第一类换元积分 法计算不定积分的 例题	92
二 极限的例题	7	三 用第二类换元积分 法计算不定积分的 例题	105
三 函数连续性的例题	17	四 用分部积分法计算 不定积分例题	110
第一章习题与提示	22	五 有理函数积分的例 题	120
第二章 导数与微分	26	六 三角函数有理式积 分的例题	124
导数概念的例题	26	第四章习题与提示	129
求函数导数的例题	31	第五章 定积分	134
导数的应用的例题	46	一 定积分概念和性质 的例题	134
函数微分的例题	52	二 用微积分学基本公 式求解的例题	136
第二章习题与提示	55		
第三章 中值定理与导数的 应用	59		
一 与中值定理有关的 例题	59		
二 应用洛必达法则求 未定型极限的例题	62		
三 泰勒公式及其应用 的例题	70		
四 函数的单调性与中			

- 一 计算平面图形的面积.....160
- 二 计算体积.....164
- 三 计算平面曲线的弧长.....168
- 四 在物理中应用的例题.....172
- 第六章习题与提示.....175
- 第七章 微分方程**.....178
 - 一 微分方程基本概念的例题.....178
 - 二 可分离变量的一阶微分方程的例题.....180
 - 三 一阶线性微分方程的例题.....185
 - 四 杂例.....188
 - 五 应用题.....193
 - 六 可降阶的高阶微分方程的例题.....198
 - 七 线性微分方程的例题.....202
- 第七章习题与提示.....211
- 第八章 无穷级数**.....216
 - 一 关于数项级数的概念及基本性质的例题...216
 - 二 数项级数及其审敛法的例题

- 第八章习题与提示.....247
- 第九章 向量代数与空间解析几何**.....253
 - 一 空间直角坐标系和向量代数的例题.....253
 - 二 平面和直线的例题...258
 - 三 曲面和空间曲线的例题.....269
- 第九章习题与提示.....272
- 第十章 多元函数微分学**.....275
 - 一 多元函数的例题.....275
 - 二 偏导数与全微分的例题.....278
 - 三 多元复合函数及隐函数求导的例题.....285
 - 四 空间曲线的切线与法平面、曲面的切平面与法线的例题...301
 - 五 多元函数极值的例题.....305
- 第十章习题与提示.....312
- 第十一章 重积分**.....315
 - 一 二重积分的例题.....315
 - 二 三重积分的例题.....329
 - 三 重积分应用的例题...335
- 第十一章习题与提示.....342

第一章 极限与连续

一 函数的例题

例1 求下列各函数的定义域:

$$(1) f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{|x|+x-1};$$

$$(2) g(x) = \sqrt{x^2-x-6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}.$$

解 (1) 因为函数为分式, 故必须分母 $|x|+x-1 \neq 0$, 而分子中含有根式 $\sqrt{2x}$; 故必 $2x \geq 0$, 因此使函数有定义的 x 满足

$$\begin{cases} 2x \geq 0, \\ |x|+x-1 \neq 0. \end{cases}$$

解之, 得 $x \geq 0$; $x \neq \frac{1}{2}$, 即定义域为 $[0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.

解 (2) 为使第一加项 $\sqrt{x^2-x-6}$ 有意义, 必须 $x^2-x-6 \geq 0$, 即 $(x-3)(x+2) \geq 0$, 解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -2$.

而使第二加项 $\arcsin \frac{2x-1}{7}$ 有意义的 x 必须 $\left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1$, 即 $-7 \leq 2x-1 \leq 7$, 解得 $-3 \leq x \leq 4$.

故所求的定义域为它们的公共部分, 即 $[-3, -2] \cup [3, 4]$.

例2 下列 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数:

$$(1) f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, \quad g(x) = x+1;$$

$$(2) f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x^2}.$$

[需检验两函数是否有相同的对应规律和定义域.]

解 (1) 因 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, \infty)$, 故表示不同的函数.

解 (2) 因 $f(x) = x$ 的定义域为 $(-\infty, \infty)$; 而 $g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对应规律不同, 故为不同的函数.

例 3 设 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0; \\ x^2+4, & x < 0. \end{cases}$ 求 $f(-1), f(0), f(1), f(x-1)$.

[求分段函数的函数值, 要注意自变量所在的范围.]

$$\text{解 } f(-1) = (x^2+4)|_{x=-1} = (-1)^2+4=5.$$

$$f(0) = (2x+1)|_{x=0} = 2(0)+1=1.$$

$$f(1) = (2x+1)|_{x=1} = 2(1)+1=3.$$

$$f(x-1) = \begin{cases} 2(x-1)+1, & x-1 \geq 0; \\ (x-1)^2+4, & x-1 < 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } f(x-1) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 1; \\ x^2-2x+5, & x < 1. \end{cases}$$

$$\left[\text{注意: 不能写成 } f(x-1) = \begin{cases} 2(x-1)+1, & x \geq 0; \\ (x-1)^2+4, & x < 0. \end{cases} \right]$$

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ 求 $f(x) - f(x-1)$.

解 因为 $f(x-1) = \begin{cases} 0, & x-1 < 0; \\ 1, & x-1 \geq 0. \end{cases}$

$$\text{即 } f(x-1) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

故
$$f(x) - f(x-1) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

例 5 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$.

解 $f[f(x)]$ 可视为由 $f(u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ 与 $u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

复合而成, 于是

$$f[f(x)] = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+2x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

类似地, 可得

$$\begin{aligned} f\{f[f(x)]\} &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+3x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}. \end{aligned}$$

例 6 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$. 求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$ 及其定义域.

解 $f[g(x)] = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{x}$, 其定义域为 $\begin{cases} x \neq 0; \\ x \neq -1. \end{cases}$

$g[f(x)] = \frac{1}{1 + \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{2-x}$, 其定义域为 $\begin{cases} x \neq 2; \\ x \neq +1. \end{cases}$

例 7 $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $\psi(x) = \begin{cases} x, & x < 0; \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$ 求

$\varphi[\psi(x)]$].

解 因 $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$

故 $\varphi[\psi(x)] = \begin{cases} 0, & \psi(x) < 0; \\ \psi(x), & \psi(x) \geq 0. \end{cases}$

即 $\varphi[\psi(x)] = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

例 8 设 (1) $f(x+1) = x^2 + 3x + 5$; (2) $f(\sin \frac{x}{2}) = \cos x + 1$. 求 $f(x)$.
 $f(\sin \frac{x}{2}) = 1 + 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

解 (1) 设 $u = x+1$, 则 $x = u-1$,
 于是 $f(u) = (u-1)^2 + 3(u-1) + 5 = u^2 + u + 3$.
 故 $f(x) = x^2 + x + 3$.
 $f(t) = 2 - 2t^2$
 $t = t-1$

[也可写作 $f(x+1) = x^2 + 3x + 5 = (x+1)^2 + (x+1) + 3$ 而直接得出.]

解 (2) 因 $f(\sin \frac{x}{2}) = 1 + \cos x = 2 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$,

故 $f(x) = 2 - 2x^2$.

例 9 设 $2f(x) + x^2f(\frac{1}{x}) = \frac{x^2+2x}{x+1}$, 求 $f(x)$.

解 由 $2f(x) + x^2f(\frac{1}{x}) = \frac{x^2+2x}{x+1}$ ①

将 ① 中的 x 用 $\frac{1}{x}$ 代换, 得 $2f(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2}f(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)}$,

即

$$2x^2f(\frac{1}{x}) + f(x) = \frac{(2x+1)x}{x+1} \quad ②$$

由 ① $\times 2 -$ ②, 可得 $3f(x) = \frac{3x}{x+1}$. 故 $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

例 10 求下列各函数的反函数:

$$(1) y = \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x});$$

$$(2) y = \begin{cases} x^2 - 4, & 0 \leq x \leq 2; \\ x^2, & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

解 (1) 在等式两边乘以 $2e^x$, 移项得 $(e^x)^2 + 2ye^x + 1 = 0$. 于是

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

取对数, 得

$$x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}),$$

即

$$x_1 = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1});$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) = \ln \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \\ &= -\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}). \end{aligned}$$

因此, 当 $x \geq 0$ 时, $y = \operatorname{ch} x$ 的反函数为

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}), \quad \text{其定义域为 } 1 \leq y < +\infty,$$

或改写为 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (1 \leq x < +\infty),$

当 $x \leq 0$ 时, 反函数为 $x = -\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}),$ 其定义域为 $1 \leq y < +\infty,$

或改写为 $y = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (1 \leq x < +\infty).$

解 (2) 反函数为

$$x = \begin{cases} \sqrt{y+4} & (-4 \leq y \leq 0); \\ -\sqrt{y} & (0 < y \leq 4), \end{cases}$$

或改写为

$$y = \begin{cases} \sqrt{x+4} & (-4 \leq x \leq 0); \\ -\sqrt{x} & (0 < x \leq 4). \end{cases}$$

例 11 求下列各函数的最小正周期:

$$(1) y = \sin^2 x;$$

$$(2) f(x) = \cos \frac{x}{4} + 3 \sin \frac{x}{3}.$$

[使 $f(x+T) = f(x)$ 成立的正数 T 称为 $f(x)$ 的周期, 一个周期函数的周期有无穷多个, 通常指的是这些周期中的最

小值. 求函数的周期可先列出 $f(x+T) - f(x) = 0$, 再解出 T .]

解 (1) 根据周期函数的定义: $\sin^2(x+T) - \sin^2 x = 0$, 即

$$[\sin(x+T) + \sin x][\sin(x+T) - \sin x] = 0,$$
$$\sin \frac{2x+T}{2} \cos \frac{T}{2} \cos \frac{2x+T}{2} \sin \frac{T}{2} = 0,$$

即 $\sin(2x+T) \sin T = 0$.
得 $\sin(2x+T) = 0$ 或 $\sin T = 0$.

由 $\sin T = 0$ 可求得

$$T = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

(由 $\sin(2x+T) = 0$ 不可能求出与 x 无关的 T 来) 取最小者 $T = \pi$, 有 $\sin^2(x+\pi) = \sin^2 x$, 故 $y = \sin^2 x$ 是周期函数, 周期为 $T = \pi$.

[由定义求一个周期函数的周期或证明某函数是否为周期函数是较困难的, 有时记住 $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ 等周期函数的周期, 并利用它们求其它周期函数的周期就较方便了.]

另解 因 $y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, 而 $\cos x$ 的周期是 2π ; 又 $\cos 2(x+\pi) = \cos(2x+2\pi) = \cos 2x$, 知 $\cos 2x$ 的周期是 π . 所以 $y = \sin^2 x$ 的周期为 π .

解 (2) 类似(1)可知 $\cos \frac{x}{4}$ 的周期为 $T_1 = 8\pi$, $\sin \frac{x}{3}$ 的周期为 $T_2 = 6\pi$.

故 $f(x) = \cos \frac{x}{4} + 3 \sin \frac{x}{3}$ 是周期函数, 其周期是两个相加项周期 T_1 及 T_2 的最小公倍数 24π .

[此结论也适用于多个周期函数相加的情况.]

例 12 已知 $f(x)$ 当 $x \geq 0$ 时的表达式为 $e^x - 1$ ，试确定 $f(x)$ 当 $x < 0$ 时的表达式，使它在 $(-\infty, +\infty)$ 内：

(1) 为奇函数； (2) 为偶函数。

解 (1) 由奇函数定义： $f(x) = -f(-x)$ ，当 $x < 0$ 时，有 $-x > 0$ 。

于是 $f(x) = -f(-x) = -(e^{-x} - 1) = -e^{-x} + 1$ 。

解 (2) 由偶函数定义： $f(x) = f(-x)$ 。当 $x < 0$ 时，有 $-x > 0$ 。

于是 $f(x) = f(-x) = e^{-x} - 1$ 。

二 极限的例题

(一) 关于极限的概念以及无穷小与无穷小的比较的例题

例 1 利用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+1} = \frac{3}{2}$ 。

证 任给 $\varepsilon > 0$ ，因为

$$\begin{aligned} \left| \frac{3n-2}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| &= \left| \frac{6n-4-6n-3}{2(2n+1)} \right| = \left| \frac{-7}{2(2n+1)} \right| \\ &= \frac{7}{2(2n+1)} < \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

要使 $\left| \frac{3n-2}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$ ，只要 $\frac{2}{n} < \varepsilon$ ，即 $n > \frac{2}{\varepsilon}$ 就可。故取正

整数 $N \geq \frac{2}{\varepsilon}$ ，当 $n > N$ 时，就有 $\left| \frac{3n-2}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$ 成立。所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

[本题中求 N 时，没有用不等式 $\frac{7}{2(2n+1)} < \varepsilon$ ，而是用适当的放大后的不等式 $\frac{2}{n} < \varepsilon$ ，这种方法在极限证明题中经常使

用, 见下面两例.]

例 2 利用定义证明 $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x+4} = 3$.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 因为

$$\begin{aligned} |\sqrt{x+4} - 3| &= \left| \frac{(\sqrt{x+4} + 3)(\sqrt{x+4} - 3)}{\sqrt{x+4} + 3} \right| \\ &= \frac{|x-5|}{|\sqrt{x+4} + 3|} \leq \frac{|x-5|}{3} \\ &\quad (-4 \leq x < \infty), \end{aligned}$$

要使 $|\sqrt{x+4} - 3| < \varepsilon$, 只要 $\frac{|x-5|}{3} < \varepsilon$ 即 $|x-5| < 3\varepsilon$ 就可.

故取 $\delta = 3\varepsilon$, 当 $0 < |x-5| < \delta$ 时, $|\sqrt{x+4} - 3| < \varepsilon$ 成立.

所以 $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x+4} = 3$.

例 3 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 因为

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \cos \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq |x-x_0|. \end{aligned}$$

(因为 $|\sin(x-x_0)| \leq |x-x_0|$), 故取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x-x_0| < \delta = \varepsilon$ 时, 就有 $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ 成立.

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$.

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} x-1, & -1 \leq x < 0; \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$ 讨论 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是

否存在.

解 在 $x=0$ 的两侧, 函数 $f(x)$ 的表达式不同, 故要考虑 $x=0$ 处函数 $f(x)$ 的左右极限. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1-x^2} = 1.$$

由于左右极限不相等, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

例 5 设 $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x > 0; \\ x + a, & x \leq 0. \end{cases}$ 问 a 取何值时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

存在?

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+a) = a;$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

故当 $a=2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

例 6 证明 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在.

证 因 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1;$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

由于 $x=0$ 处函数的左右极限不等, 故此极限不存在.

例 7 当 $x \rightarrow 1$ 时, 两个无穷小 $\frac{1-x}{1+x+x^2}$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是否等价? 又, 无穷小 $1-\sqrt{x}$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是否等价?

解 因
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1+x+x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3}{3} = 1.$$

故当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{1-x}{1+x+x^2}$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是等价无穷小.

又因
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}} = \frac{3}{2}.$$

故当 $x \rightarrow 1$ 时, $1 - \sqrt{x}$ 与 $1 - \sqrt[3]{x}$ 是同阶无穷小, 但不等价.

例 8 证明 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\operatorname{tg} x - \sin x$ 是比 x^2 高阶的无穷小.

证 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x} \end{aligned}$$

(前两个因子的极限均为 1)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

故当 $x \rightarrow 0$ 时, $\operatorname{tg} x - \sin x$ 是比 x^2 高阶的无穷小.

例 9 证明 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$.

证 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{x}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n(\sqrt[n]{1+x} - 1)}{x},$

令 $\sqrt[n]{1+x} = u$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $u \rightarrow 1$.

$$\text{原式} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{n(u-1)}{u^n - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{n}{u^{n-1} + u^{n-2} + \dots + 1} = 1,$$

故 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$.

(二) 计算极限的例题

计算下列极限:

例 1 (1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$; *5.4.10*

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right)$. *2.5*

[此类题利用因式分解去掉不定因子.]

解 (1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x(x-a) - (x-a)}{x^3 - a^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \frac{a-1}{3a^2}$.

解 (2) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2-x+1-3}{x^3+1} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} = -1$.

例 2 (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ *4.1.10*

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+ax-x})$.

[此类题利用共轭根式去掉不定因子.]

解 (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

解 (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+ax-x})$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax-x})(\sqrt{x^2+ax}+x)}{(\sqrt{x^2+ax}+x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + 1} = \frac{a}{2}.$$

例 3 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[4]{1+2x} - 1}$.

[此类题利用变量代换化为有理分式,再分解因式.]

解 (1) 令 $\sqrt[3]{1+x} = t$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 1$.

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^2 + t + 1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{3}{2}.$$

解 (2) 令 $\sqrt[4]{1+2x} = t$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 1$.

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(t^4 - 1)}{t - 1} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 1} (t+1)(t^2 + 1) = 2.$$

例 4 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[2]{1-2x}$.

[此类题利用两个重要的极限.]

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x(1 - \cos x)}{\sin^3 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \cdot \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2 \cos x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2}.$$

$$\text{解 (2)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{3}}$$

令 $u = -2x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $u \rightarrow 0$.

$$\text{原式} = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} [(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{-2} = e^{-2}.$$

$$\text{例 5 (1)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin 2x}; \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\operatorname{tg} 2x}.$$

[此类题利用等价无穷小代换.]

解 (1) 因 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x$; $\sin 2x \sim 2x$, 利用等价无穷小代换,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

解 (2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x$; $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$, 利用等价无穷小代换:

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{例 6 (1)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}; \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^3}}.$$

[此类题利用“有界量与无穷小量之积为无穷小量”这一性质.]

解 (1) 因 $x^2 \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$), 又 $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$. 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0.$$

解 (2) 因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}} = 0$, 又 $|\cos x|$

≤ 1 , 故