高等数学的例题

与习题

高等专科学校教学参考书

高等数学的例题与习题

金士岐　编

目　录

第一章 极限与连续

一 函数的例题

例 1 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x}+1}{|x|+x-1}$;

(2) $g(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$.

解 (1) 因为函数为分式，故必须分母 $|x|+x-1\neq 0$，而分子中含有根式 $\sqrt{2x}$，故必 $2x\geqslant 0$，因此使函数有定义的 x 满足

$$\begin{cases}2x\geqslant 0,\\ |x|+x-1\neq 0.\end{cases}$$

解之，得 $x\geqslant 0$; $x\neq\dfrac{1}{2}$，即定义域为$\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$.

解 (2) 为使第一加项 $\sqrt{x^2-x-6}$ 有意义，必须 $x^2-x-6\geqslant 0$，即 $(x-3)(x+2)\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$.

而使第二加项 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 有意义的 x 必须 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，即 $-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 4$.

故所求的定义域为它们的公共部分，即$[-3,\ -2]\cup[3,\ 4]$.

例 2 下列 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数:

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $g(x)=x+1$;

(2) $f(x)=x,\quad g(x)=\sqrt{x^2}$.

[需检验两函数是否有相同的对应规律和定义域.]

解 (1) 因$f(x)$的定义域为$(-\infty, 1)\cup(1,\infty)$; $g(x)$的定义域为$(-\infty, \infty)$, 故表示不同的函数.

解 (2) 因$f(x)=x$的定义域为$(-\infty, \infty)$; 而$g(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$ 当$x<0$时, $f(x)$和$g(x)$的对应规律不同, 故为不同的函数.

例 3 设$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x\geqslant 0; \\ x^2+4, & x<0. \end{cases}$ 求$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(x-1)$.

[求分段函数的函数值, 要注意自变量所在的范围.]

解 $f(-1)=(x^2+4)\big|_{x=-1}=(-1)^2+4=5$.

$f(0)=(2x+1)\big|_{x=0}=2(0)+1=1$.

$f(1)=(2x+1)\big|_{x=1}=2(1)+1=3$.

$$f(x-1)=\begin{cases} 2(x-1)+1, & x-1\geqslant 0; \\ (x-1)^2+4, & x-1<0, \end{cases}$$

即
$$f(x-1)=\begin{cases} 2x-1, & x\geqslant 1; \\ x^2-2x+5, & x<1. \end{cases}$$

[注意: 不能写成 $f(x-1)=\begin{cases} 2(x-1)+1, & x\geqslant 0; \\ (x-1)^2+4, & x<0. \end{cases}$]

例 4 设$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 1, & x\geqslant 0. \end{cases}$ 求$f(x)-f(x-1)$.

解 因为$f(x-1)=\begin{cases} 0, & x-1<0; \\ 1, & x-1\geqslant 0. \end{cases}$

即
$$f(x-1)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ 1, & x\geqslant 1. \end{cases}$$

故 $$f(x)-f(x-1)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1, & 0\leqslant x<1;\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

例 5 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解 $f[f(x)]$ 可视为由 $f(u)=\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ 与 $u=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 复合而成，于是

$$f[f(x)]=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+2x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

类似地，可得

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+3x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

例 6 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$g(x)=\dfrac{1}{1+x}$. 求 $f[g(x)]$、$g[f(x)]$ 及其定义域.

解 $f[g(x)]=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{1+x}{x}$，其定义域为 $\begin{cases}x\neq 0;\\ x\neq -1.\end{cases}$

$g[f(x)]=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{1-x}{2-x}$，其定义域为 $\begin{cases}x\neq 2;\\ x\neq +1.\end{cases}$

例 7 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，　$\psi(x)=\begin{cases}x, & x<0;\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求

$\varphi[\psi(x)]$.

解 因 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

故 $$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}0, & \psi(x)<0;\\ \psi(x), & \psi(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

即 $$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

例 8 设 (1) $f(x+1)=x^2+3x+5$; (2) $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$. 求 $f(x)$.

$f(\sin\frac{x}{2}) = 1+1-2\sin^2\frac{x}{2}$

$\therefore f(t)=2-2t^2$

解 (1) 设 $u=x+1$, 则 $x=u-1$,

于是 $$f(u)=(u-1)^2+3(u-1)+5=u^2+u+3.$$

故 $$f(x)=x^2+x+3.$$

[也可写作 $f(x+1)=x^2+3x+5=(x+1)^2+(x+1)+3$ 而直接得出.]

解 (2) 因 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2-2\sin^2\frac{x}{2}$,

故 $$f(x)=2-2x^2.$$

例 9 设 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{x+1}$, 求 $f(x)$.

解 由 $$2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{x+1} \quad ①$$

将①中的 x 用 $\frac{1}{x}$ 代换, 得 $2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)}$,

即 $$2x^2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{(2x+1)x}{x+1} \quad ②$$

由 ①×2−②, 可得 $3f(x)=\frac{3x}{x+1}$. 故 $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

例 10 求下列各函数的反函数:

(1) $y=\operatorname{ch} x=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

(2) $y=\begin{cases} x^2-4, & 0\leqslant x\leqslant 2; \\ x^3, & -2\leqslant x<0. \end{cases}$

解 (1) 在等式两边乘以$2e^x$，移项得$(e^x)^2+2ye^x+1=0$. 于是

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}.$$

取对数，得 $$x=\ln(y\pm\sqrt{y^2-1}),$$

即 $$x_1=\ln(y+\sqrt{y^2-1});$$

$$x_2=\ln(y-\sqrt{y^2-1})=\ln\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}$$
$$=-\ln(y+\sqrt{y^2-1}).$$

因此，当$x\geqslant 0$时，$y=\operatorname{ch} x$的反函数为

$x=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$， 其定义域为 $1\leqslant y<+\infty$，

或改写为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $(1\leqslant x<+\infty)$，

当$x\leqslant 0$时，反函数为$x=-\ln(y+\sqrt{y^2-1})$，其定义域为$1\leqslant y<+\infty$，

或改写为 $y=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $(1\leqslant x<+\infty)$.

解 (2) 反函数为

$$x=\begin{cases} \sqrt{y+4} & (-4\leqslant y\leqslant 0); \\ -\sqrt{y} & (0<y\leqslant 4), \end{cases}$$

或改写为 $$y=\begin{cases} \sqrt{x+4} & (-4\leqslant x\leqslant 0); \\ -\sqrt{x} & (0<x\leqslant 4). \end{cases}$$

例 11 求下列各函数的最小正周期:

(1) $y=\sin^2 x$; (2) $f(x)=\cos\dfrac{x}{4}+3\sin\dfrac{x}{3}$.

[使$f(x+T)=f(x)$成立的正数T称为$f(x)$的周期，一个周期函数的周期有无穷多个，通常指的是这些周期中的最

小值．求函数的周期可先列出 $f(x+T)-f(x)=0$，再解出 T.]

解 (1) 根据周期函数的定义：$\sin^2(x+T)-\sin^2 x=0$，即

$$[\sin(x+T)+\sin x][\sin(x+T)-\sin x]=0,$$

$$\sin\frac{2x+T}{2}\cos\frac{T}{2}\cos\frac{2x+T}{2}\sin\frac{T}{2}=0,$$

即
$$\sin(2x+T)\sin T=0.$$

得
$$\sin(2x+T)=0 \quad 或 \quad \sin T=0.$$

由 $\sin T=0$ 可求得

$$T=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots\cdots$$

(由 $\sin(2x+T)=0$ 不可能求出与 x 无关的 T 来)取最小者 $T=\pi$，有 $\sin^2(x+\pi)=\sin^2 x$，故 $y=\sin^2 x$ 是周期函数，周期为 $T=\pi$.

[由定义求一个周期函数的周期或证明某函数是否为周期函数是较困难的，有时记住 $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ 等周期函数的周期，并利用它们求其它周期函数的周期就较方便了.]

另解 因 $y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$，而 $\cos x$ 的周期是 2π；又 $\cos 2(x+\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos 2x$，知 $\cos 2x$ 的周期是 π．所以 $y=\sin^2 x$ 的周期为 π.

解 (2) 类似(1)可知 $\cos\dfrac{x}{4}$ 的周期为 $T_1=8\pi$，$\sin\dfrac{x}{3}$ 的周期为 $T_2=6\pi$.

故 $f(x)=\cos\dfrac{x}{4}+3\sin\dfrac{x}{3}$ 是周期函数，其周期是两个相加项周期 T_1 及 T_2 的最小公倍数 24π.

[此结论也适用于多个周期函数相加的情况.]

例 12 已知 $f(x)$ 当 $x\geqslant 0$ 时的表达式为 e^x-1. 试确定 $f(x)$ 当 $x<0$ 时的表达式，使它在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内：

(1) 为奇函数；(2) 为偶函数.

解 (1) 由奇函数定义：$f(x)=-f(-x)$，当 $x<0$ 时，有 $-x>0$.

于是 $$f(x)=-f(-x)=-(e^{-x}-1)=-e^{-x}+1.$$

解 (2) 由偶函数定义：$f(x)=f(-x)$. 当 $x<0$ 时，有 $-x>0$.

于是 $$f(x)=f(-x)=e^{-x}-1.$$

二 极限的例题

(一) 关于极限的概念以及无穷小与无穷小的比较的例题

例 1 利用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

证 任给 $\varepsilon>0$，因为

$$\left|\frac{3n-2}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{6n-4-6n-3}{2(2n+1)}\right|$$
$$=\frac{7}{2(2n+1)}<\frac{2}{n}.$$

要使 $\left|\dfrac{3n-2}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$ 就可. 故取正整数 $N\geqslant\dfrac{2}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，就有 $\left|\dfrac{3n-2}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+1}=\frac{3}{2}.$$

[本题中求 N 时，没有用不等式 $\dfrac{7}{2(2n+1)}<\varepsilon$，而是用适当放大后的不等式 $\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，这种方法在极限证明题中经常使

用，见下面两例．]

例 2 利用定义证明 $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x+4}=3$.

证 任给 $\varepsilon>0$，因为

$$|\sqrt{x+4}-3|=\left|\frac{(\sqrt{x+4}+3)(\sqrt{x+4}-3)}{\sqrt{x+4}+3}\right|$$

$$=\frac{|x-5|}{|\sqrt{x+4}+3|}\leqslant\frac{|x-5|}{3}$$

$$(-4\leqslant x<\infty),$$

要使 $|\sqrt{x+4}-3|<\varepsilon$，只要 $\frac{|x-5|}{3}<\varepsilon$ 即 $|x-5|<3\varepsilon$ 就可．故取 $\delta=3\varepsilon$，当 $0<|x-5|<\delta$ 时，$|\sqrt{x+4}-3|<\varepsilon$ 成立．

所以 $$\lim_{x\to 5}\sqrt{x+4}=3.$$

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

证 任给 $\varepsilon>0$，因为

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant|x-x_0|.$$

(因为 $|\sin(x-x_0)|\leqslant|x-x_0|$)，故取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta=\varepsilon$ 时，就有 $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$ 成立．

所以 $$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$$

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & -1\leqslant x<0;\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$ 讨论 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在．

解 在 $x=0$ 的两侧，函数 $f(x)$ 的表达式不同，故要考虑 $x=0$ 处函数 $f(x)$ 的左右极限．因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1-x^2}=1。$$

由于左右极限不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x>0; \\ x+a, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 问 a 取何值时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在？

解 因
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+a)=a;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x+1)=1+1=2.$$

故当 $a=2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在.

例 6 证明 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

证 因
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1;$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1.$$

由于 $x=0$ 处函数的左右极限不等，故此极限不存在.

例 7 当 $x\to 1$ 时，两个无穷小 $\dfrac{1-x}{1+x+x^2}$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是否等价？又，无穷小 $1-\sqrt{x}$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是否等价？

解 因
$$\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1-x}{1+x+x^2}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{3}{3}=1.$$

故当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1-x}{1+x+x^2}$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是等价无穷小.

又因
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}=\frac{3}{2}.$$

故当 $x\to1$ 时，$1-\sqrt{x}$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是同阶无穷小，但不等价.

例 8　证明　当 $x\to0$ 时，$\operatorname{tg}x-\sin x$ 是比 x^2 高阶的无穷小.

证　因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}$$

(前两个因子的极限均为 1)

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=0,$$

故当 $x\to0$ 时，$\operatorname{tg}x-\sin x$ 是比 x^2 高阶的无穷小.

例 9　证明　当 $x\to0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$.

证　因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{x}{n}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{n(\sqrt[n]{1+x}-1)}{x}$,

令 $\sqrt[n]{1+x}=u$, 则当 $x\to0$ 时，$u\to1$.

$$原式=\lim_{u\to1}\frac{n(u-1)}{u^n-1}=\lim_{u\to1}\frac{n}{u^{n-1}+u^{n-2}+\cdots+1}=1,$$

故 $x\to0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$.

(二)计算极限的例题

计算下列极限:

例 1 (1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$; 分解因式

(2) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$. 通分

[此类题利用因式分解去掉不定因子.]

解 (1) $$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=\lim_{x\to a}\frac{x(x-a)-(x-a)}{x^3-a^3}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}=\frac{a-1}{3a^2}.$$

解 (2) $$\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^2-x+1-3}{x^3+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=-1.$$

例 2 (1) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$; 有理化

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x)$.

[此类题利用共轭根式去掉不定因子.]

解 (1) $$\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

解 (2) $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-x)(\sqrt{x^2+ax}+x)}{(\sqrt{x^2+ax}+x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}=\frac{a}{2}.$$

例 3 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$.

[此类题利用变量代换化为有理分式，再分解因式.]

解 (1) 令 $\sqrt[6]{1+x}=t$，则当 $x\to0$ 时，$t\to1$.

$$原式=\lim_{t\to1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\frac{3}{2}.$$

解 (2) 令 $\sqrt[4]{1+2x}=t$，则当 $x\to0$ 时，$t\to1$.

$$原式=\lim_{t\to1}\frac{\frac{1}{2}(t^4-1)}{t-1}=\frac{1}{2}\lim_{t\to1}(t+1)(t^2+1)=2.$$

例 4 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$.

[此类题利用两个重要的极限.]

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{\sin^3 x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x\cdot\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\cdot\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{2\cos x}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}.$$

解 (2) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

令 $u=-2x$,则当 $x\to0$ 时,$u\to0$.

$$原式=\lim_{u\to0}(1+u)^{-\frac{2}{u}}=\lim_{u\to0}[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{-2}=e^{-2}.$$

例 5 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$.

[此类题利用等价无穷小代换.]

解 (1) 因 $x\to0$ 时,$\ln(1+x)\sim x$; $\sin 2x\sim 2x$, 利用等价无穷小代换,

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

解 (2) 当 $x\to0$ 时,$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$; $\operatorname{tg} 2x\sim 2x$, 利用等价无穷小代换:

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}.$$

例 6 (1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\dfrac{1}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cos x}{\sqrt{1+x^3}}$.

[此类题利用"有界量与无穷小量之积为无穷小量"这一性质.]

解 (1) 因 $x^2\to0\,(x\to0)$, 又 $\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$. 故

$$\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}=0.$$

解 (2) 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+1}}=0$, 又 $|\cos x|\leqslant1$, 故