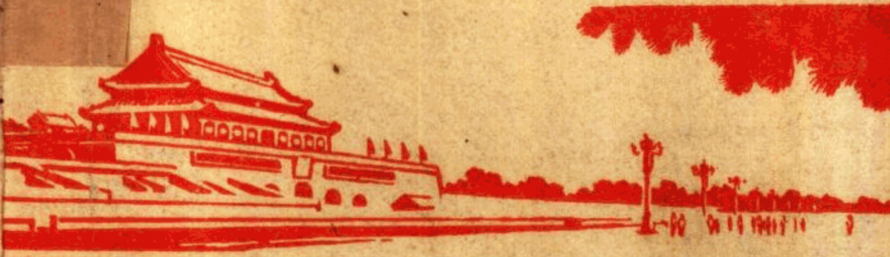


北京市中学课本

数学

第五册

北京市中学课本
数　学
第五册
北京市教育局教材编写组编
*
北京人民出版社出版
北京市新华书店发行
北京印刷一厂印刷
*
1973年1月第1版　1977年1月第4版
1977年1月第1次印刷
书号：K7071·133　定价：0.38元

毛主席语录

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学军，也要批判资产阶级。学制要缩短，教育要革命，资产阶级知识分子统治我们学校的现象，再也不能继续下去了。

目　录

第十七章　圆的方程和它的应用

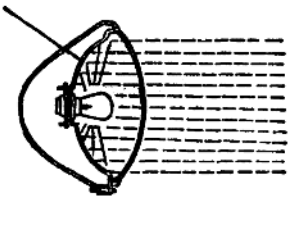
第十八章　抛物线、椭圆和双曲线

第十九章　极坐标和参数方程

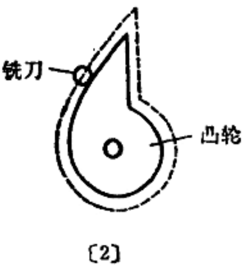
第二十章　数列和极限

第十七章　圆的方程和它的应用

恩格斯指出:“**纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系**”. 以前我们学过的实数、方程、函数等“代数”的内容, 是属于研究数量关系方面的; 而线段、角、平行线、三角形、多边形、圆、柱、锥、台、球等“几何”的内容, 则是属于研究空间形式方面的. 随着生产和科学技术的不断发展, 许多比较复杂的几何图形需要用代数方法进行研究. 例如: 汽车前灯的反射镜面, 是由抛物线绕它的对称轴旋转而成的曲面 (图 17-1〔1〕); 图 17-1〔2〕所示的凸轮, 轮廓线是由螺线和直线组成的; 等等. 在制作过程中, 常常需要借助于代数方程研



〔1〕



〔2〕

图　17-1

究它们的几何图形.

在这一章里，我们将学习圆的方程和它的应用.这部分数学知识的特点是通过坐标的方法，建立起点与实数对之间的对应关系，进一步把"形"与"数"对应起来，从而借助于代数方法研究几何问题.这种数学方法，在三大革命实践中有着广泛的应用.

我们知道：在数轴上，点和实数之间有一一对应关系.在直角坐标系中，平面内的点和实数对(x, y)之间也有一一对应关系.就是说，对于坐标平面内任意一点P，我们可以找到唯一的一对有序实数(x, y)和它对应；反过来，对于任意一对有序实数(x, y)，在平面内就可以找到唯一的一个点P，使它的坐标是(x, y).这个事实很重要，它为我们利用代数方法研究几何图形创造了条件.前面我们曾利用直角坐标系建立起二元一次方程与平面内直线间的一一对应关系.为了进一步研究曲线与方程间的关系，首先需要研究如何根据点的坐标求得线段的长度，以及用坐标表示一些特殊点的位置等等，这里，我们将重点地介绍有向线段、两点间的距离和线段的中点坐标.

1. 有向线段

我们知道，数轴是一条有方向的直线，象这样规定了方向的直线叫做有向直线.同样，规定了方向的线

段叫做有向线段．在物理学中研究力的时候，不仅要考虑它的大小，还必须注意它的方向，这就用到有向线段的概念．

在数轴上的有向线段，可以用数量来表示．如图 17-2，在 OX 轴上的有向线段 AB，它的大小就是有向线段的长度，即 3 个单位，它的方向和 OX 轴的方向相同，我们用正数表示，即

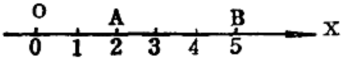


图 17-2

$$AB=+3.$$

同样，有向线段 BA 的长度也是 3，但方向和 OX 轴相反，用负数表示，即

$$BA=-3.$$

因此，有向线段 AB 和 BA 有如下的关系：

$$AB=-BA.$$

既表示有向线段的大小，又表示有向线段方向的数，叫做有向线段的数量．

对于有向线段，要注意两个字母的次序，写在前面的字母表示有向线段的起点，写在后面的字母表示有向线段的终点．如有向线段 AB，A 是起点，B是终点，它的方向是从 A 到 B；反之，有向线段 BA，B 是起点，A是终点，它的方向是从B到 A．

数轴上任意一条有向线段的数量等于它的终点坐标减去它的起点坐标．它的长度等于这个数量的绝对值．比如，有向线段 AB 的数量等于终点 B 的坐标减去起点 A 的坐标，如图 17-2，有

$$AB = 5 - 2 = +3.$$

同样，BA 的数量等于终点 A 的坐标减去起点 B 的坐标，即

$$BA = 2 - 5 = -3.$$

有向线段 AB 的长度用 $|AB|$ 表示．AB 的长度 $|AB| = |5-2| = 3$；BA 的长度 $|BA| = |2-5| = |-3| = 3$.

例 1　已知 A、B、C 三点在数轴上的坐标分别是 4、-2、-6（图 17-3），求 AB、BC、CA 的数量和长度．

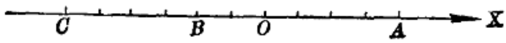


图　17-3

解:

$$AB = -2 - 4 = -6;$$
$$BC = -6 - (-2) = -4;$$
$$CA = 4 - (-6) = 10.$$
$$|AB| = |-6| = 6;$$
$$|BC| = |-4| = 4;$$
$$|CA| = |10| = 10.$$

例2 已知 P_1、P_2 两点的坐标分别是 $(2,1)$ 和 $(5,3)$，求线段 P_1P_2 在两条坐标轴上投影的长度.

解：从 P_1 和 P_2 分别向 x 轴和 y 轴作垂线 P_1M_1、P_2M_2、P_1N_1、P_2N_2（图 17-4）.

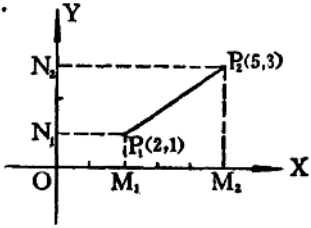


图 17-4

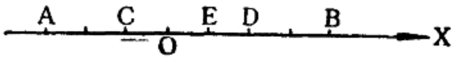
线段 P_1P_2 在 x 轴上的投影是 M_1M_2，在 y 轴上的投影是 N_1N_2. 从图上可以看出 M_1M_2 和 N_1N_2 的长度分别是:

$$|M_1M_2|=|5-2|=3, \quad |N_1N_2|=|3-1|=2.$$

一般地说，如果 P_1、P_2 两点的坐标分别是 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，那么线段 P_1P_2 在 x 轴和 y 轴上投影的长度分别是 $|x_2-x_1|$ 和 $|y_2-y_1|$.

练　习

1. 如图，数轴上每一格等于一个长度单位，说出有向线段 AB、BC、CD、DE 和 EA 的数量和长度.



（第 1 题）

2. 数轴上 A、B 两点的坐标分别是 x_1 和 x_2，设

(1) $x_1=8$，$x_2=6$；　　(2) $x_1=5$，$x_2=-3$；

(3) $x_1=-4$，$x_2=0$；　　(4) $x_1=-9$，$x_2=-11$.

求 $|AB|$ 和 $|BA|$.

3. 求线段 AB 在两条坐标轴上的投影的长度，已知 A、B 的坐标为：

(1) $A(3,4)$，$B(5,6)$；

(2) $A(-2,0)$，$B(-3,4)$。

2. 两点间的距离

求平面内两点间的距离，在实践中是经常遇到的。下面研究怎样利用两点的坐标来求出两点间的距离。

已知 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，求 P_1 与 P_2 之间的距离 $|P_1P_2|$。

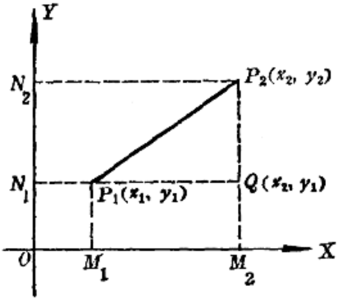


图 17-5

如图 17-5，过 P_1、P_2 分别作 x 轴、y 轴的垂线 P_1M_1、P_2M_2 和 P_1N_1、P_2N_2。设直线 P_1N_1 和 P_2M_2 相交于 Q，则 Q 点的坐标为 (x_2, y_1)。连结 P_1P_2，可知 $\triangle P_1P_2Q$ 为一直角三角形，于是有

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2,$$

$$\because \quad |P_1Q| = |x_2 - x_1|, \quad |QP_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$\therefore \quad |P_1P_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

由此得到 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 两点间的距离公

式

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.}$$

这个公式也适用于P_1、P_2两点位于其他几个象限的情况.

例1 求$P_1(-3,5)$和$P_2(1,2)$两点间的距离（图17-6）.

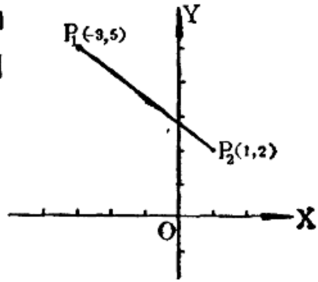


图 17-6

解: 已知

$$x_1=-3,\ y_1=5;$$
$$x_2=1,\quad y_2=2.$$

根据两点间距离公式,得

$$\begin{aligned}|P_1P_2|&=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-5)^2}\\&=\sqrt{4^2+(-3)^2}\\&=\sqrt{25}=5.\end{aligned}$$

例2 我军广大指战员，在以华国锋主席为首的党中央的领导下,坚决执行毛主席的建军路线,加强部队建设和民兵建设,加强战备,随时准备歼灭一切敢于入侵之敌. 一次军事演习中，已知在1:25000的地图上，我炮兵阵地的坐标是(25，30)，敌阵地的坐标是(45,45)(单位是厘米),求我炮兵阵地与敌阵地之间的实际距离(单位是米).

解：设地图上敌我阵地之间的距离为 l，则

$$l=\sqrt{(45-25)^2+(45-30)^2}.$$

$$=\sqrt{625}=25(\text{厘米}).$$

因为地图的比例尺为 $1:25000$，所以敌我阵地之间的实际距离为

$$25\times25000\div100=6250(\text{米}).$$

答：我炮兵阵地与敌阵地之间的实际距离为6250米.

例3 在 x 轴上有一点 P，它与点 $A(1,-3)$ 的距离等于 5，求 P 的坐标.

解：在 x 轴上的点的纵坐标等于 0，因此设 P 点的坐标为 $(x,0)$.

根据题意，得

$$|AP|=5.$$

由两点间的距离公式，上式可写成

$$\sqrt{(x-1)^2+[0-(-3)]^2}=5,$$

即

$$\sqrt{(x-1)^2+9}=5.$$

两边平方，得 $(x-1)^2+9=25,$

即

$$x^2-2x-15=0.$$

解得 $x_1=5,\ x_2=-3.$

经过验根，这两个根都是原方程的根.

因此，所求的 P 点的坐标是 $(5,0)$ 或 $(-3,0)$，也就

是说，在 x 轴上有两个点满足题目的条件，如图 17-7 所示.

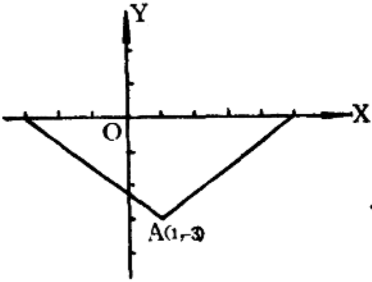


图 17-7

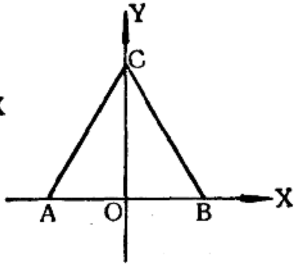


图 17-8

例 4 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(-a, 0)$、$B(a, 0)$ 和 $C(0, \sqrt{3}a)$(其中 $a>0$). 求证：这个三角形是等边三角形(图 17-8).

证明：
$$|AB| = \sqrt{[a-(-a)]^2 + (0-0)^2} = 2a,$$
$$|BC| = \sqrt{(0-a)^2 + (\sqrt{3}a-0)^2} = 2a,$$
$$|CA| = \sqrt{[(-a-0)]^2 + (0-\sqrt{3}a)^2} = 2a,$$
$$\therefore \quad |AB| = |BC| = |CA|,$$
即 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

例 5 如图 17-9，在图上选择适当的坐标系，利用两点间的距离公式，求每两孔中心的距离（精确到

0.01).

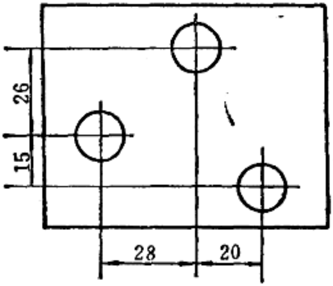


图 17-9

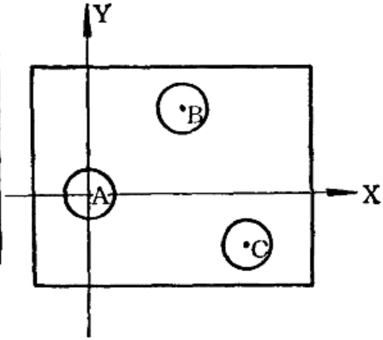


图 17-10

解: 为了方便起见，把三孔中心分别记作、A B、C，取 A 为原点，建立坐标系如图 17-10 所示，那么三孔中心的坐标是：$A(0,0)$、$B(28,\ 26)$、$C(48,\ -15)$.

根据两点间的距离公式，得

$$|AB| = \sqrt{(28-0)^2+(26-0)^2}$$
$$= 38.21.$$
$$|AC| = \sqrt{(48-0)^2+(-15-0)^2}$$
$$= 50.29.$$
$$|BC| = \sqrt{(48-28)^3+(-15-26)^3}$$
$$= 45.62.$$

同学们可分别选取 B、C 为原点建立坐标系，对上例中计算的结果进行检验.

坐标系建立得适当，就可使计算或证明较为简便。一般地，我们常选取图形中的一个点作原点，这样就能使这点的横坐标和纵坐标都是零；我们也常选取图形中的一条直线作 x 轴或者 y 轴，这样就能使这条直线上点的纵坐标或者横坐标是零；如果图形中有两条互相垂直的直线，那么，我们就可以把它们选作 x 轴和 y 轴，这样就能使一条直线上点的纵坐标是零，另一条直线上点的横坐标是零。

练　习

1. 求下列两点间的距离：

(1) $A(-1, 0)$和$C(2, 0)$；

(2) $A(0, 6)$和$C(0, -2)$；

(3) $A(-2, 3)$和$C(-4, 3)$；

(4) $A(2, -5)$和$B(2, 3)$；

(5) $P_1(-3, 4)$和$P_2(9, -7)$；

(6) $P_1(-3, 6)$和$P_2(0, -5)$。

2. 在 y 轴上有一点 P，它与点 $A(4, -6)$的距离是 5，求 P 点的坐标。

3. 分别以下列三点为顶点画三角形，再由它们各边的长判断它们各是什么样的三角形。

(1) $A(-4, 3)$、$B(2, -5)$、$C(0, 6)$；

(2) $A(-6, 8)$、$B(6, -8)$、$C(8, 6)$；

(3) $A(5, 1)$、$B(2, -2)$、$C(2.5, 0.5)$；