

13.13.2/9

日本高中数学課本

第二册

〔日本〕 河口商次等編
北京景山学校譯

(内部发行)

人民教育出版社

日本高中数学課本

第二册

〔日本〕 河口商次等編

北京景山学校譯

人民教育出版社

本书是按日本教育出版株式会社1959年出版的“标准高校数学”(河口商次等編)第二册譯出的。該套課本是供日本高等学校(相当于我国高级中学)教学用的。第二册第一章說明二次方程、高次方程、分式方程、无理方程的解法和有理函数、无理函数的一些图象;第二章說明三角函数和它的性质;第三章說明直綫、圓、抛物綫、橢圓、双曲綫的图形和方程;第四章說明函数的值域、連續和极限以及函数的变化率(即导数)。本书系内部参考資料,供研究外国中学数学教学情况用。

日本高中数学課本

第二册

〔日本〕河口商次等編

北京景山学校譯

北京市书刊出版业营业许可证出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

新华书店北京发行所发行

全国新华书店經售

人民教育印刷厂印装

統一书号:13012·50 字数:142千

开本:850×1168毫米 1/32 印張:6 $\frac{3}{16}$

1964年12月第一版

1964年12月第一次印刷

北京·1—5,350册

定价 1.00 元

前 言

从第一册的代数部分和几何部分,我們已經知道,革新看法和論证地进行考虑,在学习数学时是多么必要而且多么有效.我們还知道,数和式子以及图形之間具有很密切的关系,无论是代数知識还是几何知識,都是根据同样的思维方法加以系統化了的.并且理解到,代数知識和几何知識两者之間,是彼此互不可缺的.

但是,仅仅是这些,对于发展数学以至发展科学还是不够的.因为多数事物是不断变化的,要充分研究并且理解这些事物,就必需充分研究变化的状态.

为了进行这方面的研究,就必須要有能够明确地表现出变化着的量的变化状态,并且进一步进行深入的科学的論证的数学.

因此,我們需要进一步学习这种高等的数学,充分去理解怎样对变化的事物建立理論的邏輯的方法,同时养成合理地考虑和处理事物的习惯.

这本課本的編写,以新指导要領为依据,但是还进一步把下面这些作为重要的目标:

1. 不受旧数学的約束,而用新的数学思想做基础,貫穿着进步的数学概念,循着数学的正軌前进. 因此,将来在进一步学习更高深的数学的时候,将能减少困难.
2. 不是直观的数学,而是論证的、建立了邏輯系統的数字. 而且,还是容易理解的.
3. 使学生学起来有兴趣,并且能够独立钻研.
4. 具有高中数学必須具有的傾向,也就是說,显示出高中数

学应有的特色。

通过这本課本，希望我們能够善于运用数和式子以及图形之間的密切关系，养成更确切地表現事物和科学地研究事物的习惯。

还要充分理解，代数知識和几何知識，都是在同样的思惟方法的基础上建立了体系的。

——原著者。

目 次

第 1 章 方程和函数

§ 1. 二次方程	1
§ 2. 高次方程	5
§ 3. 分式方程	14
§ 4. 无理方程	28
〔研究〕 方程组的同解性	37
〔研究〕 二元二次方程组	39
第 1 章的习题	41

第 2 章 三角函数和它的性质

§ 1. 任意角的三角函数	45
§ 2. 加法定理	55
〔研究〕 三角函数的加法定理的证明	62
§ 3. 三角形和三角函数	74
〔研究〕 正弦定理的证明	78
§ 4. 三角形的解法	84
第 2 章的习题	90

第 3 章 图形和方程

§ 1. 坐标和方程	94
§ 2. 直线	99
§ 3. 圆	106
§ 4. 抛物线	111
§ 5. 椭圆和双曲线	117
§ 6. 平行移动和二次曲线	124
第 3 章的习题	128

第 4 章 函数和它的性质

§ 1. 函数的宏观性质	131
〔研究〕 关于有理整函数	146
§ 2. 函数的连续和极限	148
§ 3. 函数的变化率	155
〔研究〕 $f'(x)$ 为不连续的情况的极大极小值	170

第 4 章的习题.....	172
---------------	-----

补充习题

解 答 数 表*

* 原书后面本附有希腊字母表、平方表、平方根表、对数表、正弦、余弦表、正切、余切表。由于这些表和这套课本的第一册代数部分和几何部分所附的表重复，本书删去不印。——译者注。

第 1 章 方程和函数

§ 1. 二次方程

· 根与系数的关系

像我们在第一册代数部分里学过的那样，二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

的两个根如果是 α, β , 就成为:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad (1)$$

(1) 是表示把左边进行因式分解而成右边的恒等式, 因此把右边展开得到的

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta \quad (2)$$

也必然是恒等式.

一般地, 使

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

为恒等式的条件, 是两边的对应项的系数彼此相等, 也就是:

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c'.$$

所以, 在(2)里:

$$a = a \quad (3) \quad b = -a(\alpha + \beta) \quad (4) \quad c = a\alpha\beta \quad (5)$$

能够成立.

現在, 用 a 来除(4)、(5)的各边, 就成为:

$$\frac{b}{a} = -(\alpha + \beta), \quad \frac{c}{a} = \alpha\beta$$

由此可知下述事实.

設 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个根是 α, β , 則

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

这叫做二次方程的根与系数的关系.

注意 二次方程的根与系数的关系, 根据根的公式

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

直接計算 $\alpha + \beta, \alpha\beta$, 也能够得出. 也就是, 如果用 D 表示判別式 $b^2 - 4ac$, 則

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta &= \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

另外, 用 α, β 做两个根的二次方程是

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

即

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

因此, 一般地, 和为 p 、积为 q 的两个数, 可以作为

$$x^2 - px + q = 0$$

的两个根来求.

例 1. $x^2 + px + q = 0$ 的两个根为 α, β 时, 用 p, q 来表示下式的值.

$$(1) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

$$(2) \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

解: 根据根与系数的关系,

$$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = q$$

所以(1) 是 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{p}{q}$

(2) 是 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = p^2 - q$

問 1. $2x^2 - 3x + 5 = 0$ 的两个根为 α, β 时, 求下式的值.

① $\alpha^2 + \beta^2$, ② $\alpha^3 + \beta^3$, ③ $\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$

例 2. $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个根为 α, β 时, 作出以 $\alpha + k, \beta + k$ 为两个根的二次方程.

解: 根据根与系数的关系, 在以 α, β 为两个根的二次方程里,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

又, 在以 $\alpha + k, \beta + k$ 为两个根的二次方程里,

$$(\alpha + k) + (\beta + k) = (\alpha + \beta) + 2k = -\frac{b}{a} + 2k$$

$$(\alpha + k)(\beta + k) = \alpha\beta + (\alpha + \beta)k + k^2 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}k + k^2$$

从而, 所求的二次方程是:

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a} + 2k\right)x + \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}k + k^2\right) = 0$$

即 $ax^2 - (2ak - b)x + (ak^2 - bk + c) = 0$

問 2. $x^2 - 2x + 5 = 0$ 的两个根为 α, β 时, 作出以下面两数为根的二次方程.

① $\alpha - 5, \beta - 5$ ② $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ ③ $2\alpha + 3\beta, 3\alpha + 2\beta$

例 3. 甲把一个二次方程的 x 的系数写错了, 而使两个根成为 $-3, 5$, 乙把常数项写错了, 而使两个根成为 $2 \pm \sqrt{6}i$. 求原来正确的两个根.

解：設原来正确的二次方程为 $ax^2+bx+c=0$ ，它的两个根为 α, β 。甲写錯了 b ，但 a, c 是正确的，因此两个根的积是正确的。从而 $\alpha\beta = -3 \times 5 = -15$ 。

又，乙写錯了常数項 c ，但是 a, b 正确，因此两个根的和是正确的，从而 $\alpha+\beta = (2+\sqrt{6}i) + (2-\sqrt{6}i) = 4$ 。

即，正确的两个根的和是 4，积是 -15，因此，原来的方程是

$$x^2 - 4x - 15 = 0$$

从而，正确的根是： $x = 2 \pm \sqrt{19}$

答： $2 \pm \sqrt{19}$

2. 根的正負

二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根都是正的条件是：实根，且两根的和、两根的积都是正的。两个根都是負的条件是：实根，两根的和为負，积为正。另外，两个根异号的条件是：实根，两根的积为負。

綜上所述，两根为 α, β 时，

两根都是正的条件是：	$D \geq 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$
两根都是負的条件是：	$D \geq 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$
一根为正、一根为負的条件是：	$D > 0, \alpha\beta < 0$

注意 在一根为正、一根为負的条件里，由 $\alpha\beta < 0$ 可以推导出 $D > 0$ 。

例。如果下面的二次方程的两个根都是正的，試确定 k 的范围。

$$x^2 + kx + k + 3 = 0$$

解：設两个根是 α, β ，則

$$D = k^2 - 4(k+3) \geq 0, k^2 - 4k - 12 \geq 0, (k-6)(k+2) \geq 0$$

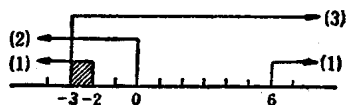
所以 $k \geq 6$ 或 $k \leq -2$ (1)

$\alpha + \beta = -k > 0$ 所以 $k < 0$ (2)

$\alpha\beta = k + 3 > 0$ 所以 $k > -3$ (3)

(1)、(2)、(3)同时成立时 k 的范围是:

$$-3 < k \leq -2.$$



1-1 图

問. 在下面的二次方程里:

$$x^2 + 2(2m+1)x + 5m^2 - 4 = 0$$

按照(1) 两根都是正的 (2) 两根都是負的 (3) 一根为正、一根为負来确定 m 的范围.

习 題

1. 試作根为 $x^2 + 2x - 18 = 0$ 的两根的 5 倍的二次方程.

2. $4x^2 - 12x + 7 = 0$ 的两根为 α, β 时, 求下式的值:

(1) $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha$ (2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ (3) $\alpha^2 + \beta^2$

3. $x^2 - 2px + 2p = 0$ 的两根为 α, β 时, 試求使 $\alpha^2 + \beta^2$ 的值为最小的 p 的值.

4. 按照 $x^2 - 21x + 5p = 0$ 的两根为同号的实数, 求 p 的值, 但 p 为零以外的整数.

§ 2. 高次方程

关于二次方程的解法, 我們已經学过了. 在这一节里来研究三次以上的方程的解法.

1. 因式定理

像在第一册代数部分里已经学过的那样，一般地关于 x 的多项式 $f(x)$ ，用 $x-a$ 去除时，如果它的商是 $Q(x)$ ，余数是 R ，则恒等式

$$f(x) = (x-a)Q(x) + R \quad (1)$$

成立。

例如，二次式

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad (2)$$

用 $x-1$ 来除，得商 $x-4$ 和余数 2，即，

$$f(x) = (x-1)(x-4) + 2 \quad (2)'$$

又，如果用 $x-2$ 去除 (2)，得商 $x-3$ ，且整除无余，因而可以写成：

$$f(x) = (x-2)(x-3) + 0 \quad (2)''$$

(2)' 和 (2)'' 的余数 2 和 0，分别是在 (2) 里 $f(1)$ 和 $f(2)$ 的值，即，

$$f(1) = 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 5 \times 2 + 6 = 0$$

从而，一般地，在 (1) 里如果 $x=a$ ，那么因为 $x-a=0$ ，所以右边的第一项成为 $(x-a)Q(x)=0$ ，因而

$$f(a) = R \quad (3)$$

其次，如果 $f(a)=0$ ，那么由 (3)， $R=0$ ，从而由 (1)

$$f(x) = (x-a)Q(x).$$

所以， $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除。

综上所述，得下述定理：

定理 关于 x 的整式 $f(x)$ ，被 $x-a$ 除得的余数等于 $f(a)$ 。

如果 $f(a)=0$ ，则 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除。

这个定理极为重要,叫做**因式定理**,在三次以上的高次式因式分解、解三次以上的方程时都要用到。

例 1. 把 x^3-3x-2 分解因式。

解: 設 $f(x)=x^3-3x-2$, 那么

$$f(-1)=0$$

所以, $f(x)$ 能被 $x+1$ 整除。

实际, 用 $x+1$ 除 x^3-3x-2 , 得商 x^2-x-2 。

$$\begin{aligned} \text{所以 } x^3-3x-2 &= (x+1)(x^2-x-2) = (x+1)(x+1)(x-2) \\ &= (x+1)^2(x-2) \end{aligned}$$

問 1. 把下面的式子分解因式:

① x^3-x-6

② $x^3-6x^2+5x+12$

③ $x^4+x^3-3x^2-x+2$

④ $x^4-4x^3+3x^2+4x-4$

例 2. 試确定 a, b 的值, 使 x^3+ax^2+bx+6 能够被 x^2-5x+6 整除。

解: 因为 $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$, 因此原式必須能被 $x-2, x-3$ 整除。

因此, 以 $x=2$ 和 $x=3$ 代入原式, 就成为 0。

$$\begin{cases} 8+4a+2b+6=0 \\ 27+9a+3b+6=0 \end{cases}$$

从而,

$$\begin{cases} 2a+b=-7 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3a+b=-11 \end{cases} \quad (2)$$

把(1)、(2)作为关于 a, b 的方程組去解,

$$a=-4, \quad b=1$$

答: $a=-4, b=1$

問 2. 試确定 a, b 的值, 使 x^3+ax^2+bx+1 能够被 $x-1, x+1$ 整除。

問 3. 試確定 a, b 的值, 使 $x^3 + ax^2 + bx - 2$ 能够被 $x^2 + x + 1$ 整除.

問 4. 有一个关于 x 的二次式, $x=2, -3$ 时, 它的值都是 0. 如果 $x=1$, 則为 -8 . 求 $x=5$ 时的值.

例 3. 用 $x-2$ 和 $x-3$ 去除一个关于 x 的整式, 分別得余数 4 和 6, 求用 $(x-2)(x-3)$ 除这个整式时的余式.

解: 設这个整式为 $f(x)$, 設用二次式 $(x-2)(x-3)$ 除 $f(x)$ 所得的商为 $Q(x)$, 余式一般为一次式, 因此, 設是 $ax+b$. 得

$$f(x) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b$$

$$\text{如果 } x=2, \text{ 則 } f(2) = 2a + b = 4 \quad (1)$$

$$\text{如果 } x=3, \text{ 則 } f(3) = 3a + b = 6 \quad (2)$$

如果把 (1)、(2) 作为关于 a, b 的方程組来解, 則得

$$a=2, b=0$$

所以, 所求的余式是 $2x$

答: $2x$

問 5. 如果用 $x+1$ 和 $x-1$ 除一个关于 x 的整式, 得余数分別为 -1 和 1 . 求用 x^2-1 除这个式子时的余式.

2. 高次方程

三次以上的方程叫做高次方程. 解一般的三次、四次方程是困难的.*另外, 如所知道的, 五次以上的方程一般是不能解的.** 在这里, 对于高次方程, 只研究那些能够用因式分解公式和因式定理来解的.

* 一般的三次方程的解法, 是 16 世紀中叶意大利的数学家达达里、卡尔达諾等发现的, 随后, 一般的四次方程的解法, 也被卡尔达諾的学生凡拉里发现了.

** 1825 年, 挪威的数学家阿貝尔 (Abel 1802 — 1829) 证明了用代数的方法解一般的五次以上的方程是不可能的. 这里所說的代数的解法是指对方程的系数只用加减乘除及求某次方根的方法来求根.

例1. 解下面的方程:

$$(1) x^3-1=0 \quad (2) x^4-1=0$$

解: (1) $x^3-1=0$

用因式定理分解因式, 得:

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

解得 $x=1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$(2) x^4-1=0,$$

分解因式, 得: $(x^2-1)(x^2+1)=0$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)=0$$

所以 $x=1, -1, \pm i$

答: (1) $1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$; (2) $\pm 1, \pm i$

問1. 解下列方程.

$$\textcircled{1} x^3+1=0 \quad \textcircled{2} x^3-8=0 \quad \textcircled{3} x^3+8=0$$

$$\textcircled{4} x^3-2=0 \quad \textcircled{5} x^3+2=0 \quad \textcircled{6} 2x^3-3=0$$

$$\textcircled{7} x^4-4=0 \quad \textcircled{8} x^4+x^2+1=0$$

問2. 在 $x^3-1=0$ 的根里, 設它的一个虚根为 ω ,

① 证明 $x^3-1=0$ 的三个根是 $1, \omega, \omega^2$.

② 证明 $x^3-a=0$ 的三个根可用 $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}\omega, \sqrt[3]{a}\omega^2$ 来表示.

例2. 解下列方程.

$$(1) x^3-7x-6=0 \quad (2) x^4-9x^2+20=0$$

解: (1) 如果 $x=-1$, 則左边为0, 因此左边能被 $x+1$ 整除.

把左边除以 $x+1$, 商为 x^2-x-6 . 因此,

$$x^3-7x-6=(x+1)(x^2-x-6)=(x+1)(x+2)(x-3)=0$$

所以 $x=-1, -2, 3$

(2) 如果 $x^2 = X$, 那么

$$X^2 - 9X + 20 = 0$$

$$(X-4)(X-5) = 0$$

从而 $X=4$ 和 $X=5$

$$x^2=4 \quad \text{和} \quad x^2=5$$

所以 $x = \pm 2, \pm \sqrt{5}$

答: (1) $-1, -2, 3$ (2) $\pm 2, \pm \sqrt{5}$

注意 像(2)那样, 如果 $x^2 = X$, 就成为关于 X 的二次方程, 这种方程, 叫做**双二次方程**.

問 3. 解下列方程:

$$\textcircled{1} \quad x^3 + 5x - 6 = 0 \quad \textcircled{2} \quad x^3 - 5x - 2 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad x^4 - x^2 - 6 = 0 \quad \textcircled{4} \quad x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$$

例 3. 四次方程 $x^4 + ax^3 + ax^2 + 11x + b = 0$ 的根里面, 有两个是 3 和 -2.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 求另外的根.

解:
$$x^4 + ax^3 + ax^2 + 11x + b = 0 \quad (1)$$

因为 $x=3, -2$ 是(1)的根, 所以

$$\begin{cases} 81 + 27a + 9a + 33 + b = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 16 - 8a + 4a - 22 + b = 0 \end{cases} \quad (3)$$

把(2)、(3)作为方程组来解, 得

$$a = -3, \quad b = -6$$

所以(1)是

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = 0 \quad (4)$$

(4)的左边能被

$$(x-3)(x+2) = x^2 - x - 6$$