高等师范专科学校教材

初等几何教材教法

钟善基　孙瑞清　编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据国家教委师范司1989年制定的二年制师专数学专业中学数学教材教法教学大纲中的初等几何教材教法部分编写的，较系统、扼要地阐述了初等平面几何中的主要问题，最后一章还介绍了立体几何的基本知识，可供师专数学系及卫星电视培训师资作为教材使用，也可供中学数学教师参考.

初等几何教材教法

钟善基 孙瑞清 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.75 字数 160 000

1990年9月第1版 1990年9月第1次印刷

印数 0001— 13 100

ISBN7-04-003128-0/O·965

定价 1.50 元

前　言

本书是根据国家教委师范司1989年制定的二年制师专数学专业的中学数学教材教法教学大纲中的初等几何教材教法部分编写的，定名为《初等几何教材教法》．它和《初等代数教材教法》以及《中学数学教材教法总论》合为一套相互衔接的教材．供我国师范专科及卫星电视教育高等师范专科"中学数学教材教法"课程使用．

本书在编写过程中，较为系统、扼要地阐述了初等几何中的主要问题．绪论部分略话几何学小史，第一章到第四章分别讲述了几何题的证明方法，几何量的计算，初等几何变换及轨迹作图问题．第五章研究了平面几何的教学方法，第六章简要介绍了立体几何的基本知识．我们希望本书能对读者掌握初等几何的基本理论有所收益，对观察、分析、思考、推究几何问题的能力有所提高，并对中学平面几何的教学有所帮助．

因为本书供一般师专及卫星电视教育高等师范专科双重使用，考虑到卫星电视教育课时较少，因此在使用本书时，可以酌情删减某些内容，例如第六章可以不讲，供学员自学等．

本书初稿写成后，由李长明教授及吕传汉、张成仪、巫承彩、包志超等副教授进行了集体审稿，对原稿提出了许多宝贵的修改意见，我们深表谢意．另外，高等教育出版社的高尚华同志对本书作了细致的编辑工作，在此一并致谢。限于我们的水平，定有疏漏错误之处，恳请读者批评指正．

作　者

1990·1　于北京师范大学

目　录

绪论　几何的起源与欧几里得几何体系

§1　几何的起源与演进

众所周知，数学的研究对象归根结蒂是客观世界的数量关系和空间形式．研究空间形式，是通过对空间形式的抽象——几何图形的研究而进行的．研究的目的，在于认识几何图形的形状、大小和位置关系等方面的内部规律，用以满足指导生活与生产上的需要．和其它科学以及数学的其它分支一样，作为研究几何图形的科学——几何学，也是随着生活与生产的发展而逐步发展起来的：从抽象的几何图形的产生；到根据经验归纳出的、对几何图形内部规律的初步认识；再到从理论上对几何图形内部规律的论证，并形成理论体系；再到不同的几何学各分支的建立，等等．

在这里，对初等几何学的起源与演进，作一简要的概述．

一、归纳经验的几何

几何图形的产生年代，已不可考．从出土的考古资料可知，至少在十万年前，在器皿上已出现了几何图形的花纹；某些器皿、工具也都呈现了几何形状．公元前二千年夏禹治水时，相传是以规、矩等绘制几何图形的工具，并经过了测量、设计工作，虽然这只是传说，但以偌大的水利工程而论，这种传说还是可信的．更何况在殷代的甲骨文(至少是公元前12世纪的文件)中，已有了“规”、“矩”二字；在反映周代天文的《周髀算经》一书中，已明确了矩(相当于直角三角)在测量中的作用，指出了今日所说的勾股定理．

在西方，从现存的古埃及、巴比伦等国的史料可以看出，在天文、测量中也大量地反映了几何图形的知识．据历史学家的考据，今日西方各国的“几何学”一词，如英文中的“Geometry”等，来源

于希腊文．而此希腊文的原意是"测地术"．它反映的是，当时埃及的尼罗河每年泛滥而冲毁地界，事后必重新丈量土地，从而产生了测量土地的几何图形大小的测量法．确实，在现存的古埃及数学的《纸草纸》书中，记载了一系列的简单平面几何图形的面积计算公式．此外，还记载有计算容积、计算土方的公式等．

很明显，几何知识是由天文、测地、求积等需要而产生的．以当时社会状况而论，研究天文、测地、求积，基本上为的是农业的需要．因此，几何知识也确是来源于生产实践又用于生产实践的．

由于在这些史料中，对总结出的几何知识的真实性都未作推理证明；某些计算公式只是近似的，并不精确；直至公元前 7 世纪的史料中，才见有对几何知识的推理证明，因而在公元 7 世纪以前，可以说是单纯地由经验积累，通过归纳而产生几何知识的阶段．

二、初步的推理几何

由现存的史料可知，在公元前 7 世纪，对几何知识开始了逻辑推理的论证，当然是初步的，也就是说从经验和已有的几何知识出发，按照逻辑的要求，对某一项几何知识进行推理论证．作为代表人物，首先是古希腊的泰勒斯(Thales，约公元前 64 年)．如，"对顶角相等"、"等腰三角形的底角相等"、"半圆的内接角是直角"等，这些定理都是他首先提出，并作了推理论证的．

其次是古希腊的毕达格拉斯(Pythagoras，约公元前530年)．如，"三角形内角和等于二直角"、"勾股定理"、"只有五种正多面体存在"等定理都是由毕达格拉斯学派(毕达格拉斯创立学校，形成毕达格拉斯学派．这个学派将所有发现都归功于毕达格拉斯，因而很难知道哪个定理是毕达格拉斯本人提出的)首先提出，并作了推理论证的(勾股定理最早虽然是我国提出的，但未见推理论证．在西方，则首先由毕达格拉斯学派提出，并作了推理论证)．

古希腊的柏拉图(Plato,公元前427～347年),虽然他主要是哲学家,着重研究逻辑,但在他所设的学校门口写着:“不懂几何的人不得入内.”这说明了逻辑推理用于几何知识的论证程度.

由于逻辑推理的运用必须从定义出发,因而可知此时的几何知识,也必定进入概念化的阶段了.我国最早的论述科学的书籍之一《墨经》中(约成书于公元前4世纪),便载有几何上的定义,如,平行线(平面)的定义是:“平,同高也.”圆的定义是:“圜,一中同长也.”等等.

但是,直至公元前4世纪,还未见有按照逻辑要求编排的、系统的几何书籍出现.因而在公元前4世纪前,可以说几何的研究进入到了初步的推理几何阶段.

三、系统的推理几何——欧几里得《原本》的编成

作为系统的推理几何的标志,就是众所周知的、古希腊欧几里得(Euclid,约公元前300年)所著的《原本》一书的出现.《原本》中,除少量的数论知识外,大部分都是几何知识的内容.这些几何知识的内容是前人提出的,而由欧几里得汇集在一起,按逻辑要求的顺序、前因后果地进行了编排;并先提出定义和公理,而后在这基础上,对各项知识都作了推理论证.《原本》可以说是历史上第一部按逻辑的要求编成的、系统的推理几何的书籍,也是历史上第一部按逻辑的要求编成的、系统的数学书籍.

1.《原本》中几何知识的大体内容

第一卷　首先提出23个定义、5项公设(几何方面的公理)、10项公理(数量关系方面的公理),而后提出48个命题①及其论述.命题中含有三角形(全等,边角关系)、垂直线和平行线、平行四边形、多边形的面积、勾股等定理.其中的定义举例如下:

---

① 今日几何书中的定理和问题,在《原本》中统称命题.

(1) 点是无大小的.

(2) 线是有长无宽的.

(3) 线之界(端)是点.

(4) 直线是与其上的点看齐的线.

(5) 面是只有长和宽的.

(6) 面之界是线.

(7) 平面是与其上的直线看齐的面.

(8) 平面角是平面上两相交直线的倾斜度.

(15) 圆是包含在一线里的那种平面图形,使得从其内某一点连到该线的所有点的直线都相等.

(23) 平行直线是同一平面内,往两个方向无限延长后, 在两个方向上都不会相交的直线.

其中的公设是:

I. 从每一点到另一点可引直线.

II. 每一直线都可以无限延长.

III. 以任一点为中心可用任意半径作圆.

IV. 凡直角皆相等.

V. 一条直线与二直线相截, 如果截出的某一侧的两内角的和小于二直角,此二直线必相交,且交于同侧两内角和小于二直角的那一侧.

其中的公理举例如下:

I. 等于同量的量相等.

II. 等量加等量其和相等.

IV. 不等量加等量其和仍不等.

IX. 全量大于分量.

X. 两直线不能包围平面的一部分①.

① 据考证,公理X是后人添加的.

第二卷　由 14 个命题组成．包含论线段计算的恒等式、黄金分割(中外比)、勾股定理推广等定理．

第三卷　由 37 个命题组成．包含圆心角、圆周角、切线、割线的理论及圆幂等定理．

第四卷　由 16 个命题组成．包含圆的内接和外切多边形的性质及正 5、6、10 边形的作图等．

第五卷　由 25 个命题组成．内容为欧多克索斯(Eudoxus，古希腊，约公元前 400 年)的比例论．

第六卷　由 33 个命题组成．包含平行截割定理、三角形的平分角线定理、相似三角形定理、比例线段的作图等．

(第七—九卷　数论初步)

第十卷　由 117 个命题组成．内容为论不可公度的量、与整数开平方的有关的几何运算等．

第十一—十三卷(立体几何)　分别由 40、18、19 个命题组成．包含直线与平面的相关位置、多面角、棱柱体、相似体体积之比及正多面体等定理．

2．《原本》的主要特点

(1) 突出的特点

① 是有史以来，按逻辑要求编成的、反映公理法的第一部演绎体系的数学书．

② 不以数表示量的大小．凡涉及度量问题，如线段、面积等的大小问题时，均只论及等于、大于、小于的关系．更突出的是关于比例的定义，和今日几何书上通常的定义不同(当然等价)．用今日符号写出当时的比例定义就是：

如果 p,q 是两个同类量；p',q' 是两个同类量(不必与 p，q 同类)；m,n 表整数；$mp \gtreqless nq \Longleftrightarrow mp' \gtreqless nq'$ 时，p,q,p'，q' 就叫做成

比例的量，记作 $p:q=p':q'$.

③ 不以"平行线唯一"的形式表达平行公理，而表之以公设V.

(2) 对后世的突出作用

① 成为公认的、历史上第一部巨大的科学典籍.

② 奠定了数学这门科学必须依照逻辑要求论述其规律的基础；是公理法的开端.

③ 反映出欧几里得及当时数学水平已达到的高度，尤其是对某些问题的处理．如引进了欧多克索斯的比例定义．原来虽然已明确了不可公度量的存在，但数的概念尚未发展到无理数的阶段．当一单位线段与一线段无公度时，对该线段的长度还解释不了．因而，如果以今日的处理办法来定义比例线段，作为基础的两线段之比的定义，便不能完整地刻划出来．欧几里得选取了欧多克索斯的比例定义，既保持了定义的完整性，避开了尚属存疑的"漏洞"；而且也保持了与今日定义的等价性.

④ 是较长时期以来，用以培养学生的逻辑推理能力的典型课本.

(3) 较突出的缺点

以今日的眼光看来，《原本》还是有不少缺点的，较突出的有：

① 《原本》中有些定义模糊不清，用了未经定义的概念，如"界"、"长"、"宽"、"看齐"等．因而起不到逻辑上的作用．实际上，在后文中也没有明白地利用这些，列出这些只是对几何形象的描写就是了．至于作为一般定义基础的、由公理制约的基本概念，在《原本》中就更没有划分出来了.

② 《原本》中所提出的公设和公理，在逻辑上虽然都是必要的，但是并不够．因而在后文论证定理时，有些论据只是靠直观、经验了.

四、《新欧几里得几何原本》的编成

公元 1794 年法国数学家勒让德(Legendre, 1752—1833)就着《原本》中的几何部分作了较大的修改，编成了《新欧几里得几何原本》. 其主要特点是：

1. 把《原本》中的非几何部分去掉，重新整理、编排；并把“命题”中的定理和问题截然分清了.

2. 加入了非负实数轴，从而把以数表量的内容纳入了几何.

3. 把《原本》中的比例部分，改用了今日课本中的处理办法(今日的处理办法，实即由该书沿袭下来的).

4. 把《原本》中的第 V 公设，换成和它等价的、由普雷菲尔(Playfair, 1748—1819)提出的平行公理，即沿袭至今日课本中平行公理：过直线外一点，有且只有一条直线，和原直线平行.

这本书出现后，便成了此后直至今日的、多数初等几何课本的蓝本了.

注. 《几何原本》之名，最早出现在我国. 公元 1607 年，徐光启(1562—1633)与传教士利马窦(Matteo Ricci, 1552—1610)合译了《原本》的前 6 卷，便定名为《几何原本》. 在西方，《几何原本》之名，则从勒让德的书开始.

§2 希尔伯特几何公理的建立

完整的欧几里得几何公理，是德国数学家希尔伯特(Hilbert, 1862—1943)于公元 1899 年首先提出的. 其内容是：

基本概念(原始概念)：

(1) 基本对象：点；直线；平面.

(2) 基本关系：点在直线上，点在平面上(属于、通过、……均为在……上的同义语)；一点在另两点之间；线段合同，角合同.

公理 I 结合公理

I_1 对于任意两个不同的点 A、B，存在着直线 a 通过每个点 A、B.

I_2 对于任意两个不同的点 A、B，至多存在着一条直线通过每个点 A、B.

I_3 在每条直线上至少有两个点；至少存在着三个点不在一条直线上.

I_4 对于不在一条直线上的任意三个点 A、B、C，存在着平面 α 通过每个点 A、B、C. 在每个平面上至少有一个点.

I_5 对于不在一条直线上的任意三个点 A、B、C，至多有一个平面通过每个点 A、B、C.

I_6 如果直线 a 上的两个点 A、B 在平面 α 上，那么直线 a 上的每个点都在平面 α 上.

I_7 如果两个平面 α、β 有公共点 A，那么至少还有另一公共点 B.

I_8 至少存在着四个点不在一个平面上.

公理 II 顺序公理

II_1 如果点 B 在点 A 和点 C 之间，那么 A、B、C 是一条直线上的不同的三点，且 B 也在 C、A 之间.

II_2 对于任意两点 A 和 B，直线 AB 上至少有一点 C，使得 B 在 A、C 之间 .

II_3 在一条直线上的任意三点中，至多有一点在其余两点之间.

II_4 设 A、B、C 是不在一条直线上的三个点；直线 a 在平面 ABC 上但不通过 A、B、C 中任一点；如果 a 通过线段 AB 的一个内点①，那么 a 也必通过 AC 或 BC 的一个内点（巴士(Pasch,

① 线段 AB 的内点即 A、B 之间的点.

1843—1930)公理).

公理III 合同公理(合同记作≡)

III_1 如果A、B是直线a上两点，A'是直线a或另一条直线a'上的一点，那么在a或a'上点A'的某一侧必有且只有一点B'，使得$A'B' \equiv AB$. 又，$AB \equiv BA$.

III_2 如果两线段都合同于第三线段，这两线段也合同.

III_3 设AB、BC是直线a上的两线段且无公共的内点；$A'B'$、$B'C'$是a或另一直线a'上的两线段，也无公共的内点. 如果$AB \equiv A'B'$，$BC \equiv B'C'$，那么$AC \equiv A'C'$.

III_4 设平面α上给定$\angle(h,k)$，在α或另一平面α'上给定直线a'和a'所确定的某一侧，如果h'是α'上以点O'为端点的射线，那么必有且只有一条以O'为端点的射线k'存在，使得$\angle(h',k') \equiv \angle(h,k)$.

III_5 设A、B、C是不在一条直线上的三点，A'、B'、C'也是不在一条直线上的三点，如果$AB \equiv A'B'$，$AC \equiv A'C'$，$\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$，那么$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$，$\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

公理IV 平行公理

过定直线外一点，至多有一条直线与该直线平行.

公理V 连续公理

V_1 如果AB和CD是任意两线段，那么以A为端点的射线AB上，必有这样的有限个点$A_1, A_2, \cdots, A_n$，使得线段AA_1，A_1A_2，$\cdots$，$A_{n-1}A_n$都和线段CD合同，而且B在A_{n-1}和A_n之间(阿基米德公理).

V_2 一直线上的点集在保持公理$\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{II}, \mathrm{III}_1, \mathrm{V}_1$的条件下，不可能再行扩充.

注1. 有些《几何基础》书中，常以康托(Cantor, 1845—1918)公理代替上述的V_2:

"一条直线上如果有线段的无穷序列 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, …, 其中每一线段都在前一线段的内部, 且对于任何线段 PQ 总有一个 n 存在, 使得 $A_nB_n<PQ$, 那么在这直线上必有且只有一点 X 落在 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, …的内部."

注 2. 也有的书中, 用与 V_1, V_2 等价的戴德金 (Dedekind, 1831—1916)公理作为连续公理:

"如果线段 AB 及其内部的所有点能分为有下列性质的两类:

(1) 每点恰属一类; A 属于第一类, B 属于第二类;

(2) 第一类中异于 A 的每个点在 A 和第二类点之间.

那么, 必有一点 C, 使 A、C 间的点都属于第一类, 而 C、B 间的点都属于第二类."

(关于几何公理的研究, 详见《几何基础》书.)

第一章　几何题的证明

§1　度量关系的证明

在初等几何中，有三种基本量，即线段的长度、角度以及弧长．两条线段相等的充要条件是它们的长度相等；两个角相等的充要条件是它们的角度相等；而同圆或等圆上两条弧的相等可转化为它们所对的圆心角是否相等．因此，我们一般把证明两条线段或两角的相等与不等，以及线段与角的和、差、倍、分，证明比例线段关系和定值等问题都归结为度量关系的证明问题．

一、线段与角的相等与不等

（一）两条线段相等的证明方法

证明这类问题，常用如下的思考方法：

1．证其为两个全等三角形的对应边．若无现成的全等三角形可用，则可添加辅助线，构造出需要的全等三角形．

2．证其为等腰三角形的两腰，如无现成的等腰三角形可用，则可添加辅助线造成必要的等腰三角形．

3．证其为平行四边形中有关相等的线段，有时也要利用辅助线作成平行四边形．

4．证其为同圆或等圆中的有关相等的线段．

5．利用三角形中位线或梯形中位线的性质．

6．利用相似形．

7．利用等量的传递性

等等．

例1　已知：$\triangle ABC$，以 AB、AC 两边向外作正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$，由 A 引 $AD\perp BC$ 于 D，延长 DA 交线段 FH 于 M．求证：

$FM=MH$

证明 (1)

由 F、H 分别向直线 DA 引垂线,设垂足分别为 Q、P(图 1-1).

在 $\triangle FQA$ 和 $\triangle ADB$ 中,

$AF=AB$, $\angle FQA=\angle ADB=90°$,

$\angle FAQ$ 和 $\angle ABD$ 都是 $\angle BAD$ 的余角.

$\therefore \quad \angle FAQ=\angle ABD$.

$\therefore \quad \triangle FQA \cong \triangle ADB$.

$\therefore \quad FQ=AD$.

同理, $PH=AD$.

$\therefore \quad FQ \underline{\underline{\parallel}} PH$, $\therefore$ $FQHP$ 为平行四边形.

$\therefore \quad FM=MH$.

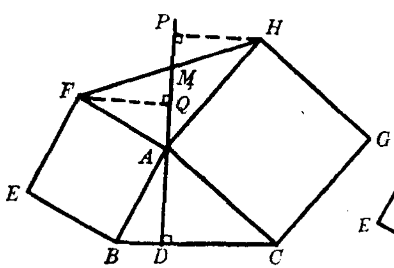

图 1-1

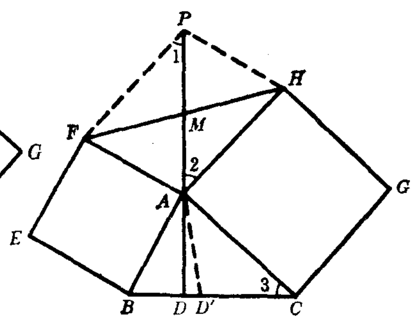

图 1-2

(2)

作 $\square AFPH$(图 1-2).

则 AP 必过 FH 中点 M.

又延长 PA 交 BC 于 D'.

由于 $AF=AB$, $FP=AC$,

$\angle PFA$ 和 $\angle BAC$ 都是 $\angle FAH$ 的补角.

$\therefore\quad \angle PFA=\angle BAC.$

$\therefore\quad \triangle AFP\cong\triangle BAC.$

$\therefore\quad \angle 1=\angle 3$, 又 $\because \angle 1=\angle 2$, $\therefore \angle 2=\angle 3.$

而 $\angle 2$ 是 $\angle D'AC$ 的余角,

$\therefore\quad \angle 3$ 也是 $\angle D'AC$ 的余角.

$\therefore\quad AD'\perp BC$, $\therefore\quad AD'$ 与 AD 重合.

$\therefore\quad FM=MH.$

例 2 三角形有两角的角平分线相等时,一定等腰.

已知: 图 1-3, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$的平分线交AC 于 D, $\angle ACB$ 的平分线交 AB 于 E, 并且 $BD=CE$.

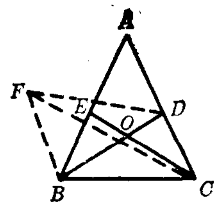

图 1-3

求证: $AB=AC.$

证明 设 BD、CE 交于 O 点. 作线段 DF, 使 F 和 C 在 BD 的异侧,并使 $\angle FDB=\angle BCE$, $FD=BC$. 由已知 $BD=CE$, 所以 $\triangle FDB\cong\triangle BCE$.

$\therefore\quad \angle FBD=\angle BEC.$

$\therefore\quad \angle FBC=\angle FBD+\angle DBC=\angle BEC+\angle DBA=\angle BOC.$

又 $\quad \angle FDC=\angle FDB+\angle BDC$

$\qquad\qquad =\angle DCO+\angle ODC=\angle BOC.$

但 $\quad \angle BOC=180^\circ-\dfrac{1}{2}\angle B-\dfrac{1}{2}\angle C=90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle A>90^\circ$,

$\therefore\quad$ 在 $\triangle FBC$ 和 $\triangle FDC$ 中, $FD=BC$(作图),

$FC=FC$, $\angle FBC=\angle CDF>90^\circ$(前证),

$\therefore\quad \triangle FBC\cong\triangle CDF.$

可见, $BCDF$ 是平行四边形.