中国精算师资格考试应试指导丛书

# 寿险精算数学

主编　邹公明


上海财经大学出版社

中国精算师资格考试应试指导丛书

# 寿险精算数学


顾　问　周绿林

主　编　邹公明

编　写　唐迎凌　邹公明



上海财经大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

寿险精算数学/邹公明主编．—上海：上海财经大学出版社，2003.7
(中国精算师资格考试应试指导丛书)
ISBN 7-81049-931-9/F·809

Ⅰ.寿…　Ⅱ.邹…　Ⅲ.人寿保险-精算学-资格考核-自学参考资料

Ⅳ.F480.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 045160 号

□ 责任编辑　袁　敏
□ 封面设计　周卫民

SHOUXIAN JINGSUAN SHUXUE
**寿 险 精 算 数 学**

主编　邹公明

---

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙　邮编 200434)
网　　址：http://www.sufep.com
电子邮箱：webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
上海财经大学印刷厂印刷
上海叶大装订厂装订
2003 年 7 月第 1 版　2003 年 7 月第 1 次印刷

---

850mm×1168mm　1/32　10 印张　250 千字
印数：0 001—3 000　定价：23.00 元

# 总　序

保险是转移分散风险的一种有效手段。在商品经济社会中，保险对经济的发展和繁荣起到了极大的推动作用。与众多学科一样，保险与定量分析息息相关。保险精算学领域是教学方法应用得最成功的领域之一，数学学科在保险中用的是多么的相得益彰。

保险离不开精算。例如新险种的开发、保险费率的厘订、责任准备金的评估、再保险的安排、自留额的确定、社会保障计划和制度的建设，甚至营销策略的制定等诸多环节都需要精算师运用精算科学技术进行合理的推测。精算亦离不开保险实践，不然精算不会像今天这样枝叶繁茂而自成体系。所谓保险精算，就是将数学方法(其中更多的是概率统计方法)应用于保险定价、利润评估、负债评估等技术而产生的一套理论，它包括：寿险精算数学、利息理论、人口理论、修匀理论、生存模型、生命表的构造理论、风险理论、非寿险精算数学、养老金数理技术、时间序列等。这套理论数百年日益成长壮大并经过千锤百炼。它的重要性、权威性与科学性已得到保险界的公认。

世界上保险发达国家的精算教育具有高度的系统性、严密性、科学性。英国、北美、澳大利亚和日本等国的精算教育可谓各领风骚。而在中国，一二十年之前听说过 Actuarial Science 一词的人恐怕屈指可数。而在今天，中国精算教育倍受关注。中国众多的莘莘学子纷纷参加精算师资格考试，尽情享受精算的乐趣，同时也感悟到精算师职业的艰辛。精算学得越多，感悟越深。精算科学涉及到保险学、经济学、金融工程、数学、会计学等诸多学科。仅数学就让许多人望而生畏。再者，更为重要的，只有数学而没有实务，精算教育岂不成了数学教育，博大精深的实务性极强的精算似乎

变成了抽象的令人生厌的符号游戏。如此等等都要求我们同心协力,迎难而上,为建立中国精算师职业制度,为中国保险业的健康发展做出实质性的贡献。

邹公明等几位同志就近几年他们自己的精算教育经验与中国精算师资格考试状况,经过整整一年的努力,编写出一套适合中国考生考试、又适合提高精算知识和应用能力的丛书。这套丛书已先期完成的有《风险理论》、《非寿险精算数学及实务》、《寿险精算数学》,后续的还有《生命表构造理论》、《利息理论》、《寿险精算实务》、《综合经济基础》等。这套丛书将弥补市场上的精算学书籍缺乏,尤其是中文精算资料缺乏的不足。相信这套丛书将对读者学习精算学并应用于保险实践,以及准备参加中国精算师资格考试都会有很大的帮助。

最后有一句话希望成为每一位考生的座右铭:“路漫漫其修远兮,吾将上下而求索”。借此以鼓励中国勇敢、智慧和勤勉的年轻人。

王静龙

于华东师范大学

# 前 言

《寿险精算数学》是寿险精算中比较核心的课程。它的基本内容包括趸缴纯保费、均衡保费、准备金估计、现金价值的计算等;它还推广了一些精算模型,如多元风险模型、多生命状态模型、多元风险模型的应用以及养老金精算数理等。本书内容比较丰富,层次分明,概率模型众多。虽然在中国精算师资格考试中这门课规定用时为4小时,考生们可能认为通过这门课比较困难,但这门课只用到初等概率论的知识,且题目变化不大,数学期望这个数学特征贯穿始终,方差与数学期望形影不离。除此之外,这门课再无特别之处,所以,考生们不必顾虑。不过,还得要仔细阅读本书。书中的例题和模拟题也要熟做。

编写此书的目的就是想解决一些中国精算师资格考试考生的疑问,提高中国考生的精算知识水平,不至于让考生们感到通过了一门课的考试,还不知道这门课讲了些什么,有不知所学之感。由于本书是应试指导书,故编排简洁,共分为八章,每章内容层次清晰,并有针对性地安排了例题,让读者通过对本书的阅读,加深对精算学的知识了解。书中引用由卢仿先和曾庆五编著的《寿险精算数学》(南开大学出版社出版)中的一道例题以及附录中转换函数表的几个数据,在此对他们表示感谢。

另外,本书最后还给出三套模拟试题,每套模拟试题后都给出了详细的解答。书中的例题和模拟试题都着眼于实务知识,使读者学习理论知识的同时学会实践应用,希望读者在学习本书后能有所收获。当然,由于作者水平有限,错误和疏漏之处在所难免,敬请读者和专家批评指正。

最后，在编写本书的过程中，得到了多位教授和精算专家的大力帮助和指点，在此对他们表示衷心的感谢。由于他们的谦逊，使我很遗憾不能将他们的鼎鼎大名列于纸上。

编 者

2003 年 5 月

# 目　　录

## 第一部分　重点知识精讲

## 第二部分　模拟试题

# 第一部分

# 重点知识精讲

# 1 生存分布与生命表

## 1.1 生存函数

**定义** 随机变量 $X$ 为新生儿死亡时的年龄,其分布函数与生存函数如下:

分布函数 $F(x) = P\{X \leqslant x\}$

$= P\{$新生儿在 $x$ 岁之前死亡$\}$

生存函数 $S(x) = 1 - F(x)$

$= P\{X > x\}$

$= P\{$新生儿在 $x$ 岁之后死亡$\}$

$= P\{$新生儿在 $x$ 岁时仍然活着$\}$

**注** (1) $S(0) = 1$;

(2) $0 \leqslant S(x) \leqslant 1, x \geqslant 0$;

(3) 若 $y > x$,则 $S(x) > S(y)$,即 $S(x)$ 是 $x$ 的严格递减函数;

(4) $\lim\limits_{x \to \omega} S(x) = 0$,其中 $\omega$ 为死亡的极限年龄。

任何满足上述四点的函数即可作为生存函数,如:

$$S(x) = e^{-x}, \qquad x \geqslant 0$$

$$S(x) = 1 - \frac{x}{100}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 100$$

使用生存函数表示概率非常方便,如:

$P\{$一个新生儿在 30 岁与 40 岁之间死亡$\}$

$= P\{30 < x \leqslant 40\}$

$= P\{x > 30\} - P\{x > 40\}$

$= S(30) - S(40)$

# 1.2 现年 $x$ 岁的人的未来寿命

**定义** $T(x)$ 为个体 $(x)$ 的未来寿命随机变量或个体 $(x)$ 生存至死亡的时间随机变量，则记 $T(x)$ 的分布函数为：

$$P[T(x) \leqslant t] = {}_tq_x$$

记

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= 1 - {}_tq_x \\ &= (x)\text{ 生存 } t \text{ 时间的概率} \\ &= P\{T(x) > t\} \end{aligned}$$

这里须注意 $T(x)$ 和 $X$ 的关系：

(1) $X$ 为新生儿生存的时间随机变量；

(2) $T(x)$ 为一个 $x$ 岁的人到死亡时生存的时间（不包括 $x$ 岁之前的存活时间）。

那么，有如下一些关系：

① $X = T(0)$

② $$\begin{aligned} {}_tq_x &= P\{(x)\text{ 在 } t \text{ 年内死亡}\} \\ &= P\{\text{新生儿在 } x \text{ 岁和 } x+t \text{ 岁之间死亡} \mid \text{新生儿已经生存到 } x \text{ 岁}\} \\ &= \frac{P\{\text{新生儿在 } x \text{ 岁和 } x+t \text{ 岁之间死亡}\}}{P\{\text{新生儿已经生存到 } x \text{ 岁}\}} \\ &= \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} \end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned} {}_tp_x &= 1 - {}_tq_x \\ &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\ &= P\{\text{新生儿生存至 } x+t \text{ 岁} \mid \text{新生儿已经生存到 } x \text{ 岁}\} \end{aligned}$$

其他一些关于 $T(x)$ 的分布函数：

$${}_1q_x = q_x$$

$$= P\{x \text{ 在一年内死亡}\}$$

$$= \frac{S(x) - S(x+1)}{S(x)}$$

$${}_1p_x = p_x$$

$$= 1 - q_x$$

$$= \frac{S(x+1)}{S(x)}$$

$${}_{t|u}q_x = P\{x \text{ 在 } x+t \text{ 岁和 } x+t+u \text{ 岁之间死亡}\}$$

$$= \frac{S(x+t) - S(x+t+u)}{S(x)}$$

$$= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x$$

$$= {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}$$

$${}_{t|1}q_x = {}_{t|}q_x$$

$$= P\{x \text{ 在 } x+t \text{ 岁和 } x+t+1 \text{ 岁之间死亡}\}$$

$$= \frac{S(x+t) - S(x+t+1)}{S(x)}$$

$$= {}_tp_x \cdot q_{x+t}$$

## 1.3 现年 $x$ 岁的人未来寿命的取整余命

记 $K(x)$ 为 $(x)$ 的未来寿命的整数随机变量，则：

$$P\{K(x) = k\} = P[k < T(x) \leqslant k+1]$$

$$= P\{x \text{ 在 } x+k \text{ 岁和 } x+k+1 \text{ 岁之间死亡}\}$$

$$= {}_{k|}q_x$$

**注** $\sum_{k=0}^{\infty} P[K(x) = k] = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}q_x = 1$，其中${}_{0|}q_x = q_x$。

这就是说，${}_{k|}q_x$ 是离散型随机变量 $K(x)$ 的分布律。

如果记 $\omega$ 为死亡的极限年龄，那么：

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} P\{K(x) = k\} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_{k|}q_x = 1$$

**例** 已知 $S(x)=(1/10)\sqrt{100-x}, 0\leqslant x\leqslant 100$。

(1) 计算一个 19 岁的人在 36 岁之前死亡的概率。

(2) 计算一个 19 岁的人将在 36 岁和 75 岁之间死亡的概率。

**解** (1) 
$$
\begin{aligned}
{}_{17}q_{19} &= \frac{S(19)-S(36)}{S(19)} \\
&= \frac{(1/10)[\sqrt{81}-\sqrt{64}]}{(1/10)\sqrt{81}} \\
&= \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

(2) 
$$
\begin{aligned}
{}_{17|39}q_{19} &= \frac{S(36)-S(75)}{S(19)} \\
&= \frac{(1/10)[\sqrt{64}-\sqrt{25}]}{(1/10)\sqrt{81}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
{}_{17|}p_{19}\cdot{}_{39}q_{36} &= \frac{S(36)}{S(19)}\cdot\frac{[S(36)-S(75)]}{S(36)} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

## 1.4 死力

记 $\mu_x$ 为年龄 $x$ 岁的人的死力，则：

$$
\begin{aligned}
\mu_x &= -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)}{S(x)} \\
&= -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[1-F(x)]}{1-F(x)} \\
&= \frac{f(x)}{1-F(x)}
\end{aligned}
$$