高考复习资料

数学

上册

湖南省教材教学研究室

湖南人民出版社

上册目录

代　　数

[illegible]几何

代　　数

第一章　数

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学。

数是数学的基本概念之一，在中学数学的范围内学过的数如下表：

$$
\text{复数}(a+bi)\begin{cases}\text{实数}(b=0)\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{自然数（正整数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数（正，负）}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数（正，负）——无限不循环小数}\end{cases}\\ \text{虚数}(b\neq 0)\end{cases}
$$

第一节　实　数

一、实数

有理数和无理数总称为实数．实数可以用有限小数或无限小数表示。

1.正整数(即自然数)：指1,2,3,4,…。其中大于1,且正因数只有1和它本身的正整数，称为质数（或称素数），如2、3、5、7、…。其余大于1的数，则称为合数，如4、6、8、9、…。

例 1　将21168分解为质因数的连乘积。

解　$21168 = 2\times2\times2\times2\times3\times3\times3\times7\times7$

$$= 2^4\times3^3\times7^2.$$

2.整数：正整数、0、负整数总称为整数，其中能被2整除的数称为偶数，其余的数称为奇数。

3.有理数：整数和分数（包括正分数和负分数）总称为有理数。

任何一个有理数都可表示为$\frac{q}{p}$的形式（q为整数，p为正整数）都可化为有限小数或无限循环小数。

4.无理数：无限不循环小数叫作无理数。在实际运用时，经常需要用四舍五入法取精确到某位小数的近似数。

二、整数的整除性

证题中常用到有关整数的整除的性质，下面列举几项常用的结论。

1.若一个整数的个位数字为0、2、4、6或8，则这个整数能被 2 整除；若一个整数的个位数字为0或5，则这个整数能被 5 整除。

2.若一个整数的各个数位上的数字的和能被 3 整除，则这个整数能被 3 整除；若其各数位上数字的和能被 9 整除，则这个整数也能被 9 整除。

3.两个连续的整数中，必有一个能被 2 整除；三个连续的整数中，必有一个能被 3 整除；四个连续的整数中，必有一个能被 4 整除。一般地m个连续的整数中，必有一个能被m整除。两个相邻偶数的积，能被 8 整除。

4.若干个整数都能被某一个数整除，则其和、差、积也能被这个数整除。

5.若一个整数能被若干个互质的整数整除，则它也能被这些互质的整数的乘积整除。

例 2 已知m为自然数，求证m^5-5m^3+4m能被120整除。

证明 因为 $m^5-5m^3+4m=m(m^4-5m^2+4)$

$$=m(m^2-1)(m^2-4)$$

$$=(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2),$$

所以m^5-5m^3+4m为五个连续的整数$m-2$，$m-1$，m，$m+1$，$m+2$的乘积。于是它能被 5 整除，也能被 3 整除。

又这五个连续整数中的四个连续整数必有两个是相邻的偶数，而相邻的偶数的乘积能被 8 整除，故这五个连续整数又能被 8 整除。

所以m^5-5m^3+4m能被$3\times5\times8$即120整除。

〔注〕1.可以证明r个连续整数的积能被$r!$整除。证明如下：设r个连续整数中的最大数为n，则它们的积为$n(n-1)\cdots(n-r+1)$。

(1) 当$n\geqslant r$时，$\because$ $C_n^r=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$是整数，

$\therefore n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 能被$r!$整除。

(2) 当$0\leqslant n<r$时，$\because n(n-1)\cdots(n-r+1)=0$，$\therefore$ 它能被$r!$整除。

(3) 当$n<0$时，由(1)，知$|n(n-1)\cdots(n-r+1)|=|n|\cdot|n-1|\cdots|n-r+1|$能被$r!$整除。

$\therefore$ 任意r个连续整数的积，均能被$r!$整除。

2.此结论可作定理用。

三、几个有关的概念

1.数轴：规定了方向、原点和单位长度的直线称为数轴。

任何一个有理数都对应着数轴上的一个点。但是，数轴上

任意一点却不一定都表示有理数．而实数与数轴上的点成一一对应。

2.相反数：在数轴上，在原点两旁且与原点距离相等的两个点所表示的两个数，叫作互为相反数，或称互反数。

如$+2$的相反数为-2，$-a$的相反数为a。

两个相反数的和为0。

3.倒数：如果两个数的积为1，这两个数叫作互为倒数。

如　2与$\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{8}$与$-\frac{8}{3}$，$x\neq0$，$y\neq0$时$\frac{y}{x}$与$\frac{x}{y}$都互为倒数。

例3　x为何值时代数式$\frac{x+3}{x^2-4}$与$\frac{x^3-8}{x^2-9}$的值互为倒数。

解　依题意　$\frac{x+3}{x^2-4}\times\frac{x^3-8}{x^2-9}=1$，

化简，得　$\frac{x^2+2x+4}{(x+2)(x-3)}=1$，

即　$x^2+2x+4=x^2-x-6$，

$\therefore$　$3x=-10$，

$x=-3\frac{1}{3}$。

故当$x=-3\frac{1}{3}$时，两代数式的值互为倒数。

4.绝对值：在数轴上表示一个数的点，它离开原点的距离，叫作这个数的绝对值。

正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数。

$$|a|=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0).\end{cases}$$

例 4　解方程　$|x-4|=5$.

分析　解这类问题的关键是将$x-4$看作一个实数，在保持等量条件的前提下，脱去绝对值符号，转化为等价的不含绝对值符号的方程．因此对$|x-a|$也可以象定义$|a|$一样，分三种情况讨论。

解　(1) 当$x-4>0$时，$|x-4|=x-4$，原方程转化为

$x-4=5$，$\therefore\ x=9$.

(2) 当$x-4<0$时，$|x-4|=-(x-4)$，原方程转化为$-(x-4)=5$，$\therefore\ x=-1$.

(3) 当$x-4=0$时，$|x-4|=0$，与原方程矛盾，无解。

故原方程的解为9和-1。

〔注〕根据算术根的定义$\sqrt{a^2}=|a|$，两边平方后得$a^2=|a|^2$，也可根据$|a|^2=a^2$解除本例中的绝对值符号而求解；另外，也可根据绝对值的几何意义而求本例的解。

5.算术根：正数的正的方根称为算术根。

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a\quad(a>0),\\0\quad(a=0),\\-a(a<0).\end{cases}$$

例 5　化简　$\sqrt{\lg^2 5-10^{\lg(\lg 25)}+\lg 10}$.

解　原式$=\sqrt{\lg^2 5-2\lg 5+1}$

$=\sqrt{(\lg 5-1)^2}$,

$\because\ \lg 5-1<0$,　$\therefore\ 1-\lg 5>0$.

故　原式$=1-\lg 5$.

例6 化简 $|6-a|-|2a+1|+\sqrt{a^2+10a+25}$

$(a<-5)$。

解 $\because$ $a<-5$, $\therefore$ $a+5<0$. $6-a>0$, $2a+1<0$.

$$\begin{aligned}原式&=6-a-[-(2a+1)]+\sqrt{(a+5)^2}\\&=6-a+2a+1-a-5\\&=2.\end{aligned}$$

例7 若x，y为实数，且$(x-y)^2+(2y+1)^2=0$，试求x，y的值。

解 $\because$ $(x-y)^2\geqslant0$，$(2y+1)^2\geqslant0$，而两个非负数的和为零，则它们都为零。

$$\therefore\ \begin{cases}x-y=0,\\2y+1=0.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

〔注〕 这里提供了数学论证中经常运用的一种性质，即几个非负数的和为零，则每个都是零。若本题变为求方程$x^2-2xy+5y^2+4y+1=0$的实数解，读者也要善于变形成本题而求其解。

例8 (1) 证明：如果一个自然数m的平方能够被3整除，那么这个自然数一定能够被3整除；

(2) 利用上面的结论，证明$\sqrt{2}$不是有理数。

证明(1) 分析m被3除所得的余数只可能是0，1，2。要证m能够被3整除，则只要能证明其余数不可能是1，也不可能是2就可以了。

此种证题方法称为反证法，其证题步骤为反设、穷举、归谬、终结。

反设 m 不能被3整除，则有：

1）$m=3k+1$。

于是 $m^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$。

$3(3k^2+2k)$能被3整除，但1不能被3整除，故m^2不能被3整除，此与题设矛盾。

2）$m=3k+2$。

于是$m^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$，也得$m^2$不能被3整除，也与题设矛盾。

由1）与2），可得m能够被3整除。

（2）反设 $\sqrt{2}$是有理数。

1）$\because$ $1<\sqrt{2}<2$，$\therefore$ $\sqrt{2}$不是整数。

2）假设 $\sqrt{2}$等于某既约分数$\frac{q}{p}$（p，q为互质的两个自然数），

则有 $\frac{q^2}{p^2}=2$，

即 $q^2=2p^2$。

故q^2能被2整除从而q也能被2整除。

又设 $q=2q_1$（q_1为自然数），

则有 $4q_1{}^2=2p^2$，即$2q_1{}^2=p^2$，

于是 p^2也能被2整除，从而p也能被2整除。

由此可得，p，q都能被2整除，则$\frac{q}{p}$就不是一个既约分数，这与$\frac{q}{p}$是既约分数的假设相矛盾，故$\sqrt{2}$不是分数。

综上所述$\sqrt{2}$不是有理数。

复 习 题 一（一）

1. 指出下列各数，哪些是正整数、整数、正数、负数、有理数、无理数？

$$7,\ 3.1416,\ \pi,\ -3,\ 0,\ \frac{5}{8},\ -\sqrt{16},$$

$$4.3232,\ -\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

2. 把下列各数分解成质因数连乘积：

(1) 1980；(2) 8475. $(2^2\times3^2\times5\times11,\ 3\times5^2\times113)$

3. 在数3427 $\boxed{}$ 里的 $\boxed{}$ 位置上应填上哪些数字，就能使这数成为(1) 2的倍数；(2) 3的倍数；(3) 4的倍数；(4) 5的倍数；(5) 8的倍数；(6) 9的倍数；(7) 10的倍数；(8) 25的倍数.

4. 有学生3496人，分成人数相等的小组参加劳动. 每组人数限定在10人以上，20人以下，求每组人数及可分组数.

(184组，19人/组)

5. 求用32，36，48去除时，都余15的最小数. (303)

6. 下面的结论是否正确：

(1) 两个数中，绝对值较大的数就是较大的数.

(否，绝对值虽较大，但它本身可以为负数)

(2) 任何一个有理数的平方都是正数.

(否，0的平方就不是正数)

7. 回答下列问题：

(1) 有没有一个实数的平方是负数？

(2) 有没有一个数的平方反而比这个数小？什么时候？

(3) 什么时候a的相反数比a大？什么时候a的相反数比a小？什么时候a的相反数与a相等？

(4) 什么时候a的倒数比a大？什么时候a的倒数比a小？什么时候a的倒数与a相等？

8. 写出绝对值大于 3 而小于 8 的所有整数。

(−4、−5、−6、−7，4、5、6、7)

9. 求出绝对值不小于2而又不大于4的所有整数的积。

(−576)

10. 计算 $|-5|-|-7^2|+\left|\frac{1}{3}\right|-|5\div(-6)|$。$\left(-44\frac{1}{2}\right)$

11. 解方程

$$|x-4|+|x+1|=5. \qquad (-1\leqslant x\leqslant 4)$$

12. 下列等式成立吗？如不成立，应如何改正？

(1) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}-\sqrt{3}$； $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(2) $\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sin\alpha-\cos\alpha$ $(0°<\alpha<45°)$。

$(\cos\alpha-\sin\alpha)$

13. (1) 当$a<-3$时，$\sqrt{(a+3)^2}=$？ $[-(a+3)]$

(2) a为何值时$\sqrt{(a-3)^2}=a-3$？ $(a\geqslant 3)$

(3) a为任意实数时$\sqrt{(a+1)^2}=$？

$$\left(\begin{array}{l} a\geqslant -1,\text{原式}=a+1 \\ a<-1,\text{原式}=-(a+1) \end{array}\right)$$

$\sqrt{(1+a^2)^2}=$？ (原式$=1+a^2$)

14. (1) 试证明每个奇数的平方，被8除必定余1；

(2) 试证明三个连续整数的积能被6整除；

(3) 试证明两个相邻偶数的积能被8整除。

15．证明：对于任何整数n，$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1$都是整数，并且用3除时余2。

提示：用3除时余2，即证　$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1-2$ 能被3整除。

16．化简下列各式

（1）$\sqrt{(\lg 3)^2-2\lg 3+1}$；　　（$1-\lg 3$）

（2）$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2}$．　　$\left(原式=\begin{cases}1-2x\,(x<-1)\\3\;(-1\leqslant x\leqslant 2)\\2x-1\,(x>2)\end{cases}\right)$

17．哪些实数满足下列方程：

（1）$|x-2|+|x+1|=5$；　　（-2，3）

（2）$|x-3|+|2-x|=3$．　　（1，4）

18．（1）试证明$\sqrt{5}$是无理数；

（2）试证明5个连续自然数的平方和不是一个完全平方数．

19．求$x^2-4y^2=5$的整数解．　　$\left(\begin{cases}x=3,\\y=\pm 1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-3,\\y=\pm 1.\end{cases}\right)$

20．求证在连续三个奇数的平方和上加1，必可被12整除，但不能被24整除．

第二节　复　　数

一、复数

1．几个基本概念：

（1）复数的定义：形如 $a+bi$ 的数叫作复数，其中a、b 为实数，a 叫作复数的实部，b 叫作复数的虚部，i 叫作虚数单位，$i^2=-1$．

当$b=0$时，$a+bi$ 是实数；当$b\neq 0$时，$a+bi$ 是虚数；

当$a=0$，$b\neq0$时，$a+bi$是纯虚数。

(2) 复数相等的定义：在复数$a+bi$与$c+di$中。当且仅当实数$a=c$，$b=d$时，规定这两个复数相等。即$a+bi=c+di$。

(3) 共轭复数的定义：两个复数的实部相等，虚部是相反的数时，称这两个复数为共轭复数，即$a+bi$和$a-bi$是共轭复数。

(4) 复数绝对值的定义：$\sqrt{a^2+b^2}$称为复数$a+bi$的绝对值（或者模），记作：$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$。

2.几个基本性质：

(1) 无顺序性　任意两个复数之间，没有大小的规定，因而不能比较大小。但对于任意两个实数，则可以比较它们的大小。

(2) 复数能和复平面上的点建立一一对应关系，其中实数能和数轴上的点建立一一对应关系。

(3) 在复数范围内永远可以施行加、减、乘、除(除数不能为零) 乘方、开方六种运算。

(4) 在复数范围内，加法和乘法的交换律，结合律，以及乘法对加法的分配律都成立。

(5) 虚数单位i的乘方具有周期性：

$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$。（n为整数）

二、复数的表示法

1.用复平面上的点z表示复数$a+bi$：在直角坐标系内，以横轴ox表示实轴，纵轴oy表示虚轴，建立复平面。在复平面内的点$z(a,b)$与复数$a+bi$一一对应。可以用点$z(a,b)$表示复数$a+bi$（见图1.1）。

2.用平面向量$\overrightarrow{oz}$表示复数$a+bi$：在复平面内，以原点o为

起点，$z(a、b)$为终点的向量$\overrightarrow{oz}$与复数$a+bi$可作成一一对应，所以可以用平面向量$\overrightarrow{oz}$表示复数$a+bi$ （见图1.2）。

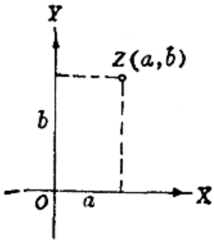

图1.1

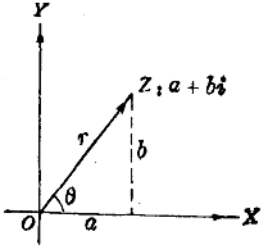

图1.2

3.复数的三角形式和指数形式：x轴的正方向 ox 和向量$\overrightarrow{oz}$所夹的角θ，叫作复数$z=a+bi$ 的幅角，记作 $Argz$，不等于零的复数$a+bi$有无数个幅角，它们相差2π的整数倍．其中比 2π 小的正角叫做幅角的主值，记作 $\arg z$，$a+bi$ 的幅角θ用公式$\cos\theta=\frac{a}{r}$；$\sin\theta=\frac{b}{r}$来确定（见图1.2）。利用复数的模、幅角可把复数$a+bi$表示成：

$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中：$r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\theta=\arg z$。
$a+bi$ 叫作复数的代数形式，$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 叫作复数的三角形式。它的共轭复数可写成：

$r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$ 或 $r(\cos\theta-i\sin\theta)$。

但后者不是三角形式．

为简便起见，我们用$e^{i\theta}$表示$\cos\theta+i\sin\theta$。

即：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，于是就有$z=re^{i\theta}$．如 $1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$，

$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$等等．$z=re^{i\theta}$称为复数的指数形式。

三、复数的运算

1.加法和减法：用复数的代数形式来进行加、减运算较为方便。

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$$

2.乘法：

代数形式： $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

三角形式： $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

一般地

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)$$
$$+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].$$

3.除法：

代数形式：c、d不同时为零.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

三角形式：

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

4.乘方：

代数形式： $(a+bi)^n=a^n+c_n^1a^{n-1}bi+c_n^2a^{n-2}(bi)^2+\cdots$

$+c_n^ka^{n-k}(bi)^k+\cdots+(bi)^n$ （n是自然数）.

三角形式：

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

这个公式叫棣美弗定理，复数乘方时用此公式较方便。

5.开方：

代数形式：复数开平方时可用代数形式：

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,i\right),$$

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,i\right).$$

三角形式：

$$\sqrt[n]{r(\mathrm{ccs}\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right].$$

其中$\sqrt[n]{r}$表示模数r的n次算术根。$k=0,1,2,\cdots,(n-1)$，n取自然数。复数的n次方根有n个值，它们所对应的复数分布在复平面内以o为圆心以$\sqrt[n]{r}$为半径的圆上，并将圆周n等分。

例 1　计算：

(1) $\frac{1}{i}(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)^5+\left(\frac{1}{1+i}\right)^4+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7$；

(2) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{11}$；

(3) $\sqrt[3]{1-i}$。

解： (1) 原式 $=\frac{i}{i\cdot i}(\sqrt{2})^5(1+i)^5+\frac{1}{(1+i)^4}+\left(\frac{2i}{2}\right)^7$

$$=-4\sqrt{2}(1+i)i(1+i)^4+\frac{1}{(1+i)^4}+i^7$$

$$=16\sqrt{2}(1+i)\,i-\frac{1}{4}-i$$

$$=-\left(16\sqrt{2}+\frac{1}{4}\right)+(16\sqrt{2}-1)i.$$

〔注〕 掌握并牢记下列结果，在进行复数运算时较方便：

$$\frac{1}{i}=-i;\quad (1\pm i)^2=\pm 2i;\quad \frac{1}{1\pm i}=\frac{1}{2}(1\mp i);$$

$$\frac{1+i}{1-i}=i;\quad \frac{1-i}{1+i}=-i;\quad \left(\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=1.$$

(2) $\because -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ,$

$\therefore$ 原式 $=(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)^{11}$

$=\cos 1320^\circ+i\sin 1320^\circ$

$=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ$

$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

(3) $\because\ 1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right),$

$\therefore$ 原式 $=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi+\frac{2}{3}k\pi\right)\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{7}{12}\pi+\frac{2}{3}k\pi\right)\right],\quad (k=0,1,2).$$