数学分析
习题课讲义

（上册）

吕　凤　刘玉琏
王大海　苑德新　编著

东北师范大学出版社

数学分析习题课讲义

（上册）

吕　凤　刘玉琏
王大海　苑德新　编著

东北师范大学出版社

数学分析习题课讲义（上册）

SHUXUEFENXIXITIKEJANGYI (SHANGCE)

吕　凤　刘玉琏　王大海　苑德新　编

责任编辑：李殿国　　封面设计：李冰彬　　责任校对：吕　凤

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
（长春市斯大林大街110号）　　吉林农业大学印刷厂制版
（邮政编码：130024）　　吉林农业大学印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32　　1991年5月第1版
印张：12.75　　1991年5月第1次印刷
字数：324千　　印数：0 001—4 000册

ISBN 7-5602-0452-x/O·50（压膜）定价：4.15元

前　言

教学实践证明，数学分析习题课对学生灵活运用所学的概念和定理，进而深刻理解和掌握这些概念和定理，对培养学生独立掌握论证问题和计算问题的方法，进而提高逻辑推理能力和独立工作能力都起着重要的作用，它是配合讲授课不可缺少的一个重要教学环节。影响数学分析习题课质量的因素是多方面的，但是根据培养目标和《数学分析教学大纲》的要求，根据学生的实际水平，选好示范题和习作题是上好习题课的关键。一般来说，肩负数学分析习题课教学任务的青年教师在这方面会遇到一些困难。鉴于此，我们编写了这套《数学分析习题课讲义》上，下册。它对高师的数学分析习题课选题的内容、类型、题型程度等给出了一个轮廓，期望它对青年教师上好数学分析习题课能有所帮助。它对高师数学专业的本科和专科的学生可作为数学分析的课外学习指导书，它对在职进修和自学的读者可作为数学分析的辅导书。

由于各院校和自学读者采用的数学分析教材不同，为了适应高师多层次的要求，容纳《数学分析教学大纲》的主要内容。为此，本书基本上按照刘玉琏、傅沛仁编写的《数学分析讲义》上、下册（高等教育出版社1981年第二版，以下简称《讲义》）的章、节、定义、定理编写的。每节均由**基本内容、几点说明、解题方法、测验题**四部分组成，书后附有**测验题答案**。书中的例题和测验题多数选自《讲义》的练习题；刘玉琏编写的《数学分析》（跨电视卫星教材）上、下册（高等教育出版社1988年4月第一版）的练习题。显然，本书是这两套教材密切配套学习参考书。

由于我们业务水平和编写能力有限，本书不妥之处，乃至错误仍在所难免，恳请读者和从事数学分析教学的同志提出宝贵意见。

编　者

1989．7　于长春东北师范大学数学系

目　　录

预备知识

一 集 合

1. 集合的概念

“集合”是数学中一个重要的概念，它在现代数学中起着重要的作用。

我们常常研究某些事物组成的集体。例如一班学生、一批产品、全体正整数等等，这些事物组成的集体都是集合。

一般来说，集合是具有某种属性的事物的全体或是按照某一法则进行研究的对象的全体，构成集合的事物或对象，称为集合的**元素**。例如，

1）1980年2月1日在长春市出生的婴儿组成一个集合。

2）方程$x^2-5x+6=0$的根组成一个集合。

3）1，2，3，4，5五个自然数组成一个集合。

4）全体偶数组成一个集合。

5）能被5整除的所有的自然数组成一个集合。

通常，我们用大写字母A、B、C、…等表示集合，用小写字母a、b、c、…等表示集合的元素。如果a是集合A的元素，则表为$a\in A$，读作a属于A或a在A中；如果a不是集合A的元素，则表为$a\bar{\in}A$，读作a不属于A或a不在A中。例如，

6）如果 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合，则 $\frac{3}{5}\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}\ \overline{\in}\,\mathbf{Q}$．

集合 A 中元素的数目称为 A 的**基数**（**或势**）．基数为有限数的集合，称为**有限集合**，如上面的1）、2）、3）；基数不是有限数的集合，称为**无限集合**，如上面的4）、5）．

2．集合的表示法

1）列举法 按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号 { } 括起来．

例1 由 a、b、c、d 四个元素构成的集合 A，表为

$$A=\{a,b,c,d\}.$$

例2 由 $x^2-5x+6=0$ 的根所构成的集合 A，表为

$$A=\{2,3\}.$$

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏．

2）描述法 把具有公共属性 P 的所有元素 a 构成的集合 A，表为

$$A=\{a\mid P(a)\}.$$

例3 方程 $x^2-5x+6=0$ 的根构成的集合 A，表为

$$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}.$$

例4 全体偶数构成的集合 A，表为

$$A=\{x\mid x=2n,n\text{为整数}\}.$$

集合以及集合间的关系可以用图形表示，称为**文氏图**．文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合，如图0.1．集合内的元素以区域内的点表示．

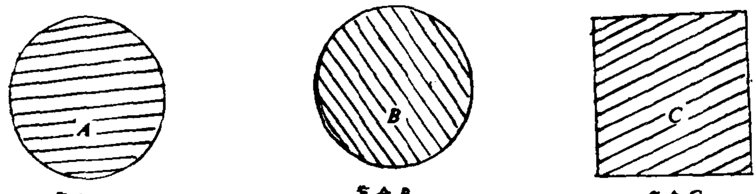


图 0.1

由对集合的描述可知，一个集合 A中的所有元素具有下列三个性质：

确定性 集合A中的元素都是确定的或分明的，即对任意一个事物a，能够判断$a \in A$或 $a \bar{\in} A$，二者必居其一，不能模棱两可。

互异性 集合A中的所有元素，虽具有共同的特性，但又是互异的。于是，若集合A有两个（或多个）相同元素，则把它们作为一个元素看待。例如，集合

$$\{1,2,3,1,2,4,5\} \quad 与 \quad \{1,2,3,4,5\}$$

是相同的。

无序性 集合A的所有元素与它们排列的顺序无关。例如，

$$\{1,2,3,4,5\} \quad 与 \quad \{4,5,3,1,2\}$$

是同一个集合。

3． 空集与全集

不包含任何元素的集合称为**空集**，表为$\varnothing$。

例 1 方程$x^2+1=0$的实根集合为空集。

例 2 全班学生某课考试均及格，则不及格学生的集合为空集。

由所研究的所有事物构成的集合称为**全集**，表为U.全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集。例如讨论问题仅限于正整数，则全体正整数的集合为全集；讨论的问题仅限于整数，则全体正整数的集合就不是全集。

4． 子集

定义 1 如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，即"如果$a \in A$，则$a \in B$"，则称A为B的**子集**，表为$A \subset B$或$B \supset A$，读作A包含于B或B包含A。

例 1 设$\mathbf{N}$表示全体自然数的集合，$\mathbf{Q}$表示全体有理数的集合，则

$$N \subset Q.$$

例 2 设A表示全部产品的集合，B表示该产品全部废品的集合，则．

$$B \subset A.$$

定义 2 设有集合A和B，如果$A \subset B$且$B \subset A$，则称 A与B**相等**，表为$A = B$。

例3 设$A = \{x \mid 1 \leqslant x < 4 \text{ 的整数}\}$，

$B = \{x \mid < 5 \text{ 的质数}\}$，

则 $$A = B.$$

根据定义，显然有下列结论：

1）$A \subset A$，即"集合A是其自己的子集"．

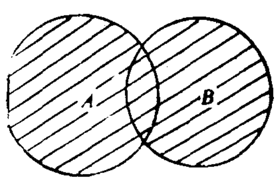
2）对任意集合A，有$\varnothing \subset A$，即"空集是任意集合的子集"．

3）如果$A \subset B$，$B \subset C$，则$A \subset C$，即"集合的包含关系有传递性"．

5． 集合的运算

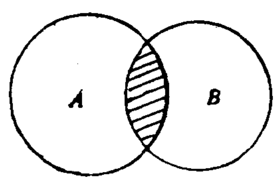
定义3 设有集合A和B，由A和B的所有元素构成的集合，称为A与B的**并**，表为$A \cup B$，如图0.2，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}.$$



A∪B

图0.2



A∩B

图0.3

集合的并有下列性质：

1）$A \subset A \cup B$，$B \subset A \cup B$.

2）对任何集合A，有

$$A\cup\varnothing=A,\qquad A\cup A=A.$$

定义4 设有集合A和B，由A和B的所有公共元素构成的集合，称为A与B的**交**，表为$A\cap B$. 如图0.3的阴影部分. 即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}.$$

集合的交有下列性质：

1）$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$.

2）对任何集合A，有

$$A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cap A=A.$$

例1 设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\},\ A\cap B=\{3,4\}.$$

例2 设$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b\}$，则

$$A\cup B=\{a,b,c\},\ A\cap B=\{a,b\}.$$

例3 设$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x>0\}$，则

$$A\cup B=\{x\mid x\geqslant -1\},\ A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}.$$

例4 如果A为奇数集合，B为偶数集合，则

$$A\cup B=\{x\mid x为奇数或偶数\},\ A\cap B=\varnothing.$$

定义5 设有集合A和B，属于A而不属于B的所有元素构成的集合，称为A与B的**差**，表为$A-B$. 如图0.4的阴影部分，即

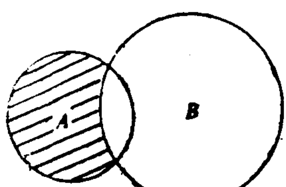


图0.4

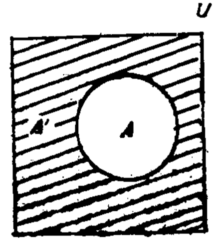


图0.5

$$A-B=\{x\mid x\in A且x\overline{\in}B\}.$$

例5 如果$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5,7\}$，则

$$A-B=\{2,4\}.$$

定义 6　全集U中所有不属于A的元素构成的集合，称为A的**补集**，表为A'，如图0.5的阴影部分．即

$$A'=\{x \mid x\in U 且 x \overline{\in} A\}.$$

补集有下列性质：

$$A\cup A'=U,\ A\cap A'=\varnothing.$$

例 6　设U为全体正整数集合，A为全体正奇数集合，则A'为全体正偶数集合．

6．集合的运算律

1）交换律：（1）$A\cup B=B\cup A$.

（2）$A\cap B=B\cap A$.

2）结合律：（1）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

（2）$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

3）分配律：（1）$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

（2）$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

4）吸收律：（1）$(A\cup B)\cap A=A$.

（2）$(A\cap B)\cup A=A$.

5）摩根律：（1）$(A\cup B)'=A'\cap B'$.

（2）$(A\cap B)'=A'\cup B'$.

二　常用的符号

数学分析的语言是由文字叙述和数学符号共同组成的．数学分析的一些专门符号在这里不一一列举，仅给出数理逻辑的符号和常用的数学符号．

1．蕴含符号

符号“$\Longrightarrow$”表示“蕴含”或“若…，则…”．

符号“$\Longleftrightarrow$”表示“必要充分”或“等价”．

设P与Q表示两个陈叙句。

用蕴含的符号连接起来，即

$$P \Longrightarrow Q,$$

表示P蕴含Q，或若有P则有Q。

用等价符号连接起来，即

$$P \Longleftrightarrow Q,$$

表示P与Q等价，或P蕴含Q($P \Longrightarrow Q$)同时Q蕴含P($Q \Longrightarrow P$)。

例如，等边三角形$\Longrightarrow$等腰三角形

等腰三角形$\Longleftrightarrow$三角形两个底角相等。

根据排中律，命题

$$P \Longrightarrow Q \quad 与 \quad 非Q \Longrightarrow 非P,$$

是等价的。如果要证明命题$P \Longrightarrow Q$为真，也以证明命题非$Q \Longrightarrow$非P为真即可。

2．量词符号

数理逻辑的量词只有两个：**全称量词**和**存在量词**。

全称量词的符号是“$\forall$”，表示“对任意的”或“对任一的”

存在量词的符号是“$\exists$”，表示“存在”或“能找到”。

例如，$A \subset B$，即集合A是集合B的子集，也就是，集合A的任意元素x都是集合B的元素，用符号表示是，

$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

$A=B$用符号表示是

$A=B \Longleftrightarrow \forall x \in A \Longrightarrow x \in B$，同时$\forall x \in B \Longrightarrow x \in A$.可见用量词符号表示比用文字叙述简练。

3． 几个常用的符号

1）阶乘符号

设n是自然数，符号“$n!$”读作“n的阶乘”，表示不超过n的所有自然数的连乘积。例如，

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

$$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

为了运算上的方便，规定$0!=1$。

2）双阶乘符号

设n是自然数，符号“$n!!$”读作“n的双阶乘”，表示不超过n并与n有相同奇偶性的自然数的连乘积。例如，

$$10!!=10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2.$$

$$13!!=13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1.$$

注意 $n!!\neq(n!)!$。

3）最大（小）数的符号

符号“max”读作“最大”，“max”是maximun（最大）的缩写。

符号“min”读作“最小”，“min”是minmun（最小）的缩写。

$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，表示$a_1$，$a_2,\cdots,a_n$这$n$个数中的最大者。

$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，表示$a_1,a_2,\cdots,a_n$这$n$个数中的最小者。

例如， $\max\{7,5,4,8,2\}=8$.

$\min\{7,5,4,8,2\}=2$.

三　常用的不等式

数学分析中的一些重要概念，很多定理及其证明都要应用不等式，因此，不等式是数学分析中论叙问题不可缺少的工具，这里只给出一些简单常用的不等式，以备读者查阅。

1． $|x-a|<\delta\Longleftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$.

$\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$称为a的δ**邻域**，表为$U(a,\delta)$.

$0<|x-a|<\delta\Longleftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$，且$x\neq a$.

$\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$称为a的**去心邻域**，表为

$U^0(a,\delta)$.

$$|x|>a \Longleftrightarrow x<-a \text{ 或 } x>a.$$

2. $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$.

3. $\forall x\in\mathbf{R}$, 有 $|\sin x|\leqslant 1$, $|\sin x|\leqslant|x|$.

4. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数，则有不等式

1） $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

（几何平均数） （算术平均数）

或

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}{n}.$$

2） $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

（调和平均数） （几何平均数） （算术平均数）

3） $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$.

5. $\forall x\in\mathbf{N}$，有不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}、$$

对此不等式取自然对数，有

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

或
$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

6. $\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\frac{1}{n!}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}.$$

7. $\forall n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$，有

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

希 腊 字 母 表

字 母		汉语拼音	国际音标
Α	α	arfa	ˈælfə
Β	β	beita	ˈbiːtə
Γ	γ	gama	ˈgæmə
Δ	δ	deirta	ˈdeltə
Ε	ε	eipuseilong	epˈsailən
Ζ	ζ	zeita	ˈziːtə
Η	η	eita	ˈiːte
Θ	θ	seita	ˈθiːtə
Ι	ι	youta	aɪˈoutə
Κ	κ	kapa	ˈkæpə
Λ	λ	lamuda	ɪæmdə
Μ	μ	miu	mjuː
Ν	ν	niu	njuː
Ξ	ξ	kesei	ksai
Ο	ο	oumikrong	ouˈmaikrən
Π	π	pai	pai
Ρ	ρ	rou	rou
Σ	σ	seigama	ˈsigmə
Τ	τ	tao	tɔː
Φ	φ	fai	fai
Χ	χ	kai	kai
Υ	υ	ypuseilong	juːpˈsailən
Ψ	ψ	pusai	psai
Ω	ω	oumiga	ˈoumigə

第1章

函　　数

§1.1　函　　数

一　基　本　内　容

定义1　设$A\neq\varnothing$，$A\subset\mathbf{R}$（即A是实数集$\mathbf{R}$的非空子集）．如果$\forall x\in A$，按照对应规律f，都对应唯一一个$y\in\mathbf{R}$，则称**对应规律f是定义在A上的函数**，表为

$$f:A\longrightarrow\mathbf{R}\,(x\longrightarrow y=f(x))$$

数集A称为函数f的**定义域**，数x对应的数y称为x的**函数值**，表为$y=f(x)$。函数值的集合称为函数f的**值域**，表为$f(A)$，即

$$f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}\subset\mathbf{R}$$

由于$x\in A$与$y\in\mathbf{R}$处于不同的地位，有时也称x是**自变量**（或自变数），y是**因变量**（或因变数）．

符号“$f:A\longrightarrow\mathbf{R}$”表示$f$是定义在数集$A$上并在实数集$\mathbf{R}$中取值的函数，即对$\forall x\in A$，有$f(x)\in\mathbf{R}$．这是现代数学表示函数的符号．但是，在数学分析这门基础课中，一方面要研究大量具体的函数，即对应规律不是抽象的而是具体的，使用这个函数符号有些不方便；另一方面为了和中学《代数》中的函数符号一致．本