大学数学学习方法指导丛书（II辑）

数学物理方程

陈恕行 秦铁虎 周 忆 编著
复旦大学数学系主编

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

大学数学学习方法指导丛书（Ⅱ辑）

数学物理方程

复旦大学数学系　主编

陈恕行　秦铁虎　周　忆　编著

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/陈恕行等编著.—上海:复旦大学出版社,2003.9

(大学数学学习方法指导丛书(第Ⅱ辑))

ISBN 7-309-03623-9

Ⅰ.数… Ⅱ.陈… Ⅲ.数学物理方程-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 034055 号

数学物理方程

陈恕行 秦铁虎 周 忆 编著

出版发行 復旦大學出版社

上海市国权路 579 号 邮编 200433

86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)

fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅

装帧设计 周 进

总 编 辑 高若海

出 品 人 贺圣遂

印 刷	复旦大学印刷厂
开 本	787×960 1/16
印 张	12.5
字 数	217 千
版 次	2003 年 9 月第一版 2003 年 9 月第一次印刷
印 数	1—5 100
书 号	ISBN 7-309-03623-9/O·307
定 价	18.00 元

内 容 提 要

本书是作者结合多年教学经验编写的. 书中简要归纳与总结了数学物理方程的主要内容和方法，着重通过较多例题的分析、比较、评述，对学习者感到困难的地方进行释疑解惑. 为使学习者有更多的训练，提高其综合分析和解决问题的能力，书中还选配了较多的习题，习题均有答案或提示，以供读者进行自我检测. 所选例题和习题有些来源于历届研究生入学考试试题.

本书既可以作为学习者学习数学物理方程课程的同步参考书，亦可供有关考研人员和教师、科研人员参考.

序　言

10 多年前，我系几位教师编写了一套《大学数学学习指导》丛书. 丛书出版后颇受欢迎，不久书市即告售罄. 其后，兄弟院校的同行和不少青年学子纷纷来函求购，出版社也多次与我们联系再版事宜，只是作者们长期承担着繁重的教学和科研任务，无暇顾及修订工作. 近年来，随着学科的发展，课程建设又提上了议事日程. 我系一些重要基础课的新教材陆续问世，与此同时，不少教师再次萌发了重新整理、总结在教学工作中积累起来的心得的意愿. 在复旦大学出版社的促进下，推出这套全新的丛书也时机成熟、水到渠成了.

数学科学的发展正处于一个不平凡的时期. 科学技术的进步、实践应用的增多、计算机的影响以及数学科学自身的进展，大大拓广了数学科学的范围和领域. 在不少场合，数学已经从科学研究的幕后，大步跨上了技术应用的前台，成为打开众多机会大门的钥匙. 这就导致社会对其成员数学能力要求的指标不断提高，期望涌现出更多的数学基础扎实、创新能力较强、知识面宽广、综合素质上佳的数学人才. 相应地，数学教育的目标，也就不仅在于为学生提供一种专业知识的传授，更重要的在于引导学生掌握一种科学的语言，学到一种理性思维的模式，接受包括演绎、归纳、分析和类比等各项数学素质的训练. 卓有成效的数学训练将为学生充分参与未来世界的竞争作好准备.

数学的理论是美妙的，引人入胜；数学的方法是精巧的，丰富多彩；但学好数学却必须付出艰辛的劳动. 在教学过程中，我们经常遇到这样的学生：他们能背出一些基本的公式，却做不了略有变化的演算，他们能记得住一些基本的定理，却给不出稍分层次的推理. 有些学生依然留恋早年接受的、为应试而被不恰当地夸大了的"题型教学"，不理解这种训练手段怎么在大学课堂里销声匿迹了. 这些学生学习数学的方法大多较为稚嫩，他们对数学知识只停留于形式的理解，并未达到实质的掌握. 其实，与大多数其他学科相比，数学能为学生提供更多的学习独立思考的机会. 在任何一门数学课程的学习过程中，起主导作用的并非教师，而是学生. 学生学习数学的过程应当是一个再创造的过程. 学生应当按自己的认识去解释、分析所学的内容，用新的观点去改造原有的理解，从而在个人数学知识的库藏中打上自己特有的烙印. 只有通过深入的思考，将吸收的新知识有机地融入原有知识结

构中，用心灵的创造来体验数学，对抽象的对象建立起直观的理解，才能真正地学好数学. 我们希望这套丛书能在方法上为学生学习数学提供有益的借鉴与启迪.

虽然，学习数学的方法因人而异，但是，数学课程的一些基本环节却是值得共同注意的. 首先，要学好一门数学课程，毋庸置疑应掌握它所包含的最基本的数学思想. 这就是说，既要深入理解有关主要对象的概念和性质，又必须把一系列的定义和定理科学地融合在一起，从整体上把握这个知识体系的发端、推进和提升，融会贯通地领悟贯穿于课程中的数学思想与精神. 其次，数学思想是通过特定的数学方法来实现的，每门课程所蕴含的数学方法提供了构筑相应理论框架的主要工具，也提供了作出分析、判断、转化、求解等具体策略的依据. 从猜想的形成、分析的展开，到计算、推理的实施、提炼、拓广的升华，数学方法在解决问题的过程中处处体现着自身的价值. 再次，每门数学课程都有不少特殊的数学技巧. 它们不仅显示了运算与论证的灵活性，而且是各种成功的数学方法所不可缺少的重要因素. 一个有相当深度的技巧往往来自丰富的想像和敏锐的观察. 数学技巧的介绍与训练，对学生思维的引发、开拓和深化有十分重要的意义. 总之，数学思想、数学方法和数学技巧三位一体，共同构成了有血有肉的一门门数学课程. 因此，要学好数学，也就必须在领会思想、掌握方法、熟练技巧上多下功夫.

正是基于上述认识，在这套丛书中，每一册大体包括概念和性质的简介与提要、主要方法与典型例题的分析与讨论，同时，还配置了一定数量的习题. 希望读者可参照这个内容的三部曲，通过对数学思想、方法和技巧的思考与消化，把解决数学问题的能力提高到一个新的台阶.

编写这套丛书的作者们都具有丰富的教学经验，他们在编写时还注意到兼顾读者的多种需要：无论是学生在学习相应课程时同步使用，还是在学完一门课程后作总复习的参考，抑或为报考研究生而作考前准备，都将从中获得较大的收获. 我们也愿意借助这套丛书与兄弟院校的同行们作广泛的教学交流.

复旦大学数学系将这套丛书的编写列入加强本科教学工作的计划之中. 数学系、所的许多教授对如何编好这套丛书提出一系列中肯的建议，为提高丛书质量创造了有利条件. 复旦大学出版社的范仁梅女士对这套丛书的策划和编辑倾注了大量的心血. 我们对以上诸位在此一并致以诚挚的谢意.

限于水平，这套丛书的错误与缺陷在所难免，殷切地期望广大读者不吝指正. 希望通过作者与读者的共同努力，经日后修订，使这套丛书日趋成熟.

复旦大学数学系
教学指导委员会
2002 年 4 月

前　　言

数学物理方程在自然科学以及技术科学中有广泛的应用，又与其他各数学分支有密切的联系. 目前在各高等学校数学类专业的教学计划中都设置了这门课程，而且许多理工科的专业也往往按不同深度讲授这一课程的内容. 无疑，这门课程对于培养学生的数学理论基础与解决实际问题的能力都起着重要的作用.

编写本书的目的就是希望对学生学习与掌握数学物理方程的内容起到一定的帮助作用. 有些初次接触数学物理方程的学生感到这门课程不容易学，分析其原因，大体有对问题的背景不熟悉、分析运算不熟练以及不善于归纳总结等. 数学物理方程来源于物理学等自然科学，例如就来源于物理学的方程来说，微分方程本身以及许多定解问题的归结都需要一定的物理知识，有些解决问题的方法以及所引入的数学概念，也往往有相应的物理解释. 因而，增加对有关自然科学知识，特别是物理知识的了解，对于数学物理方程的学习是很有帮助的. 其次，数学物理方程内容丰富、方法多样，难以用统一的格式展开内容并加以讨论，这是由学科的特点及其发展现状所决定的. 所以在学习这门课程时，更需要时时从理论内容与方法技巧两方面来剖析各部分内容，并经常比较各类方程以及各类解决问题方法的异同，以求融会贯通. 再则，为求得一个数学问题的解决，一般都要经过一定的计算. 在本课程中尤其是如此. 这时，良好的分析计算训练、熟练的运算能力就起着重要的作用. 总之，关键在于根据数学物理方程课程的特点，认真对待每一个环节. 只要这样，这门课程是不难学好的，而且是很有兴趣的.

本书是结合作者多年的教学经验写成的. 书中所涉及的内容，一般不超过数学系数学物理方程课程的水平. 对于多数教科书中已述及的内容，我们在本书中一般不再详述. 特别是对一些较容易的内容，仅作简要的归纳与总结. 而对初学者可能感到困难的地方，则多作解释，或增添前后的比较与评注. 为提供读者更多的训练机会，我们选配了较多的例题与习题，并对每个习题给出了解答或提示. 所选的习题中有些来源于历届研究生考试的试题，在解这些习题时需要一定的综合分析能力，读者也可借此来测试自己理解与掌握数学物理方程有关知识的程度. 我们设想，本书既可以作为初学数学物理方程课程时同步使用的参考书，也可在系统复习这门课程时使用. 此外，对于有关的教师和研究人员，本书也会是一本良好

的备用参考资料.

本书原由陈恕行与秦铁虎编写. 最近,陈恕行、秦铁虎、周忆又在此基础上进行了修改,添加了部分例题、习题与说明. 在编写本书的过程中,我们参考了许多国内外有关著作(见参考书目),得到了很大的帮助,在此我们谨向有关作者致以深切的谢意. 复旦大学出版社范仁梅同志对于本书的出版给予了许多帮助,我们对此表示衷心的感谢. 由于我们的知识和经验所限,本书中可能有不少缺点与不足之处,欢迎读者批评指正.

作　　者

2003 年 1 月于复旦大学

目　　录

第 1 章

二阶线性偏微分方程的分类及特征理论

波动方程、热传导方程与调和方程是三种最重要的二阶线性偏微分方程. 同时,它们也是不同类型的二阶线性偏微分方程的典型代表. 这一章将从一般的二阶线性偏微分方程出发,通过化标准型将方程加以分类. 这种分类能使我们清楚地了解上述三类最重要的数学物理方程的代表性. 此外,我们应注意在一点对方程进行分类与在一个区域中对方程进行分类的联系与异同,应注意对含两个自变量的方程与含多个自变量的方程进行分类的方法的异同.

特征(特征线、特征曲面)的概念是偏微分方程理论中最基本、最重要的概念,它决定了方程的分类,同时对于偏微分方程定解问题的提法、解的性质以至求解方法起着重要的作用. 这一点在初次接触偏微分方程时还不容易有深刻的体会,希望读者随着学习的深入,能逐渐加深理解这一概念及其重要性.

§1.1 方程的分类

1.1.1 含两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类

含两个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式是

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f, \tag{1.1}$$

其中 a_{11}, a_{12}, a_{22}不同时为零. 方程的分类依赖于行列式 $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$的取值或矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$的特征值 λ_1, λ_2 的符号.

若 $\Delta>0$(等价地,λ_1, λ_2 不等于零且同号),则称方程(1.1)为椭圆型的;

若 $\Delta<0$(等价地,λ_1, λ_2 不等于零且异号),则称方程(1.1)为双曲型的;

若 $\Delta=0$(等价地,λ_1, λ_2 有一个为零),则称方程(1.1)为抛物型的.

若方程(1.1)在区域 Ω 中的每一点上都是椭圆型(相应地,双曲型或抛物型)

的，则称方程(1.1)在区域 Ω 中为椭圆型(相应地，双曲型或抛物型)方程.

根据连续性，由 Δ 在一点大于零或小于零可推得 Δ 在该点的某邻域中也是如此. 所以方程为椭圆型或双曲型的性质总是在一个区域中成立的. 反之，Δ 在一点等于零并不能告诉我们它在这一点的邻域中符号是怎样的，因此我们又有：

若方程(1.1)在区域 Ω 的一个子区域上为双曲型的，在 Ω 的另一个子区域上为椭圆型的，则称方程(1.1)在区域 Ω 中为混合型方程；

若方程(1.1)在区域 Ω 的一个子区域上为双曲型的，在其余点(不一定构成子区域)上为抛物型的，则称方程(1.1)在区域 Ω 中为退化双曲型方程；

若方程(1.1)在区域 Ω 的一个子区域上为椭圆型的，而在其余点为抛物型的，则称方程(1.1)在区域 Ω 中为退化椭圆型方程.

这里需特别指出的是，方程的类型一般只与其最高阶导数项有关.

如果一个二阶方程(1.1)在区域 Ω 中具有确定的类型，则可以通过自变量变换将它化为标准型. 双曲型方程的标准形式是

$$u_{xx} - u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = f, \tag{1.2}$$

或

$$u_{xy} + Au_x + Bu_y + Cu = f; \tag{1.3}$$

椭圆型方程的标准形式是

$$u_{xx} + u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = f, \tag{1.4}$$

抛物型方程的标准形式是

$$u_{xx} + Bu_y + Cu = f. \tag{1.5}$$

显然，弦振动方程、调和方程、热传导方程分别具有方程(1.2)，(1.4)，(1.5)的形式.

将二阶方程的一般形式(1.1)化成各种标准型的方法在一般的数学物理方程书中都有详细的叙述，以下我们只举一些例子来说明如何灵活运用这些方法，以及必须注意的问题.

例 1.1 将 Tricomi 方程 $$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.6}$$
在上、下半平面分别化成标准型.

解 方程(1.6)的特征方程为 $y\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}x^2=0$，

当 $y>0$ 时，它可写成 $\mathrm{d}x\pm \mathrm{i}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y=0$，

其首次积分为 $x\pm \mathrm{i}\frac{2}{3}y^{3/2}=c$，于是可作变换

$$\begin{cases}\xi = x, \\ \eta = \dfrac{2}{3}y^{3/2}.\end{cases} \tag{1.7}$$

经计算可知
$$\begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi}, \\ u_{yy} = (u_\eta y^{\frac{1}{2}})_y = u_{\eta\eta} y + \dfrac{1}{2} u_\eta y^{-\frac{1}{2}} \\ \quad = y\left(u_{\eta\eta} + \dfrac{1}{3\eta} u_\eta \right). \end{cases}$$
于是方程(1.6)在上半平面 $y>0$ 内可化为
$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta} u_\eta = 0. \tag{1.8}$$

又当 $y<0$ 时,方程(1.6)的特征方程为 $\quad dx \pm \sqrt{-y}\, dy = 0$,
其首次积分为 $x \pm \dfrac{2}{3}(-y)^{3/2} = c$,引入变换
$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{2}{3}(-y)^{3/2}, \\ \eta = x + \dfrac{2}{3}(-y)^{3/2}. \end{cases} \tag{1.9}$$
可计算得
$$\begin{cases} u_x = u_\xi + u_\eta, \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}; \\ u_y = (u_\xi - u_\eta)(-y)^{\frac{1}{2}}, \\ u_{yy} = (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})(-y) - (u_\xi - u_\eta) \cdot \dfrac{1}{2}(-y)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$
于是,方程(1,6)在下半平面 $y<0$ 内可化为
$$4y u_{\xi\eta} - \frac{1}{2}(u_\xi - u_\eta)(-y)^{-\frac{1}{2}} = 0,$$
$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0. \tag{1.10}$$

注　本例中 $y=0$ 为变型线,当点 (x,y) 从上半平面趋于 x 轴时,方程(1.8)中的 $\eta \to 0$,则方程(1.8)的系数趋于无限大;又当点 (x,y) 从下半平面趋于 x 轴时,方程(1.10)中的 $\xi - \eta \to 0$,故方程(1.10)的系数趋于无限大. 所以标准型(1.8)及(1.10)只是在开的上半平面内或开的下半平面内有效.

1.1.2　含多个自变量的二阶线性偏微分方程的分类

当方程中自变量的个数大于 2 时,它已不能像仅含两个自变量的二阶方程那样,能在一个区域中将方程化成标准型. 但仍可以利用其系数构成的矩阵对方程进行分类. 含多个自变量的二阶方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{1.11}$$

其中 a_{ij}不同时为零，$a_{ij}=a_{ji}$. 作矩阵 $A=(a_{ij})$，并记它的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则对任一点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$有如下的分类：

若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均不为零，且同号，则称方程(1.11)为椭圆型方程；

若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均不为零，其中 $n-1$ 个有相同符号，另一个的符号与此相反，则称方程(1.11)为双曲型方程；

若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均不为零，且有不少于两个的特征根具有正号，不少于两个的特征根具有负号(显然，此时要求 $n\geqslant 4$)，则称方程(1.11)为超双曲型方程；

若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中有一个为零，其余同号，则称方程(1.11)为抛物型方程.

注 1　上面列出的分类只包含了一部分情形，还有许多情况未包括在内. 如果考虑到在一个区域中自变量变化的各种变型、退化情形的出现，则方程的分类问题是相当复杂的.

注 2　即使在一个区域中方程类型不变，一般也不一定能通过自变量变换将含多变量的二阶方程化成标准型，仅在一些特殊情形下(如常系数等)可以将方程的主部化到高维调和方程或高维波动方程的情形.

注 3　为了将方程形式化简，有时也引入一些未知函数的变换，这种方法得根据具体问题灵活运用.

例 1.2　试证：若方程(1.11)为常系数椭圆型方程，它必能通过自变量与未知函数的变换化成 $\Delta u+cu=0$ 的形式.

证明　设方程(1.11)中的系数矩阵(a_{ij})为正定，则存在正交矩阵 U，使 $UAU'=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，记 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$，变换 $y=Ux$ 使方程(1.11)变成

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + cu = f. \tag{1.12}$$

记 $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$，则 $\bar{A}=UAU'$，所以(1.12)式即为

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + cu = f,$$

令 $z_i=\lambda_i^{-\frac{1}{2}} y_i(i=1,\cdots,n)$，可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{b}}_i \frac{\partial u}{\partial z_i} + cu = f,$$

再令 $v=u\exp\left(\frac{1}{2}\sum \bar{\bar{b}}_i z_i\right)$，上式即化成

$$\Delta v + c_1 v = f_1, \tag{1.13}$$

其中 $c_1=c-\sum \frac{1}{4}\bar{\bar{b}}_i^2$, $f_1=f\exp\left(\frac{1}{2}\sum \bar{\bar{b}}_i z_i\right)$. 证毕.

例 1.3 若方程(1.11)为区域 Ω 中的变系数双曲型方程,则对 $P\in\Omega$,在点 P 的某一邻域中一定可将方程(1.11)的二阶项部分化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\sum_{i,j=2}^{n} p_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j},$$

其中(p_{ij})为 $n-1$ 阶负定矩阵.

证明 按双曲型方程的定义可知,矩阵$(a_{ij}(P))_{i,j=1,\cdots,n}$的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均不等于零,且 $n-1$ 个同号,另一个取异号,不妨设 $\lambda_1>0,\lambda_2,\cdots,\lambda_n<0$. 今若常系数正交矩阵 U 满足 $UA(P)U'=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,则通过变换 $y=Ux$ 可以将方程化成

$$\sum_{i,j=1}^{n}\bar{a}_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i\partial y_j}+\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+cu=f, \tag{1.14}$$

其中$(\bar{a}_{ij})$在点 P 为对角阵,$\bar{a}_{11}(P)=\lambda_1>0$,故在点 P 的邻域 Ω_1 中 $\bar{a}_{11}(y)>0$,今在 Ω_1 中用 $\bar{a}_{11}$除(1.14)式,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+2\sum_{i=2}^{n}a_i\frac{\partial^2 u}{\partial y_i\partial y_1}+\sum_{i,j=2}^{n}\bar{\bar{a}}_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i\partial y_j}+\sum_{i=1}^{n}\bar{\bar{b}}_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+\bar{c}u=\bar{\bar{f}}. \tag{1.15}$$

现在再将自变量换成 $z_1,\cdots,z_n$,其中 $z_1=y_1$,$z_l(l\geqslant 2)$由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z_l}{\partial y_1}+2\displaystyle\sum_{i=2}^{n}a_i\frac{\partial z_l}{\partial y_i}=0,\\ z_l\Big|_{y_1=y_{1P}}=y_l\end{cases} \tag{1.16}$$

决定. 由于该变换在点 P 的 Jacobi 行列式为

$$\left|\frac{\partial(z_1,\cdots,z_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\right|=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\ *&1&&0\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\ *&0&&1\end{vmatrix}=1,$$

所以在点 P 的邻域 $\Omega_2\subset\Omega_1$ 中定义了一个可逆变换 $T:z=z(y)$. 对方程(1.15)施行变换 T 后,得到

$$\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial z_i\partial z_j}+\sum_{i=1}^{n}q_i\frac{\partial u}{\partial z_i}+ru=g, \tag{1.17}$$

其中

$$p_{11}=\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial z_1}{\partial y_1}+2\sum_{i=2}^{n}a_i\left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial z_1}{\partial y_i}+\frac{\partial z_1}{\partial y_i}\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)+\sum_{i,j=2}^{n}\bar{\bar{a}}_{ij}\frac{\partial z_1}{\partial y_i}\frac{\partial z_1}{\partial y_j}=1,$$

$$\begin{aligned}p_{1l}&=\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial z_l}{\partial y_1}+2\sum_{i=2}^{n}a_i\left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial z_l}{\partial y_i}+\frac{\partial z_1}{\partial y_i}\frac{\partial z_l}{\partial y_1}\right)+\sum_{i,j=2}^{n}\bar{\bar{a}}_{ij}\frac{\partial z_1}{\partial y_i}\frac{\partial z_l}{\partial y_j}\\ &=\frac{\partial z_l}{\partial y_1}+2\sum_{i=2}^{n}a_i\frac{\partial z_l}{\partial y_i}=0.\end{aligned}$$

所以(1.17)式中的二阶项即为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}+\sum_{i,j=2}^{n}p_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial z_i\partial z_j}.$$

由于在自变量变换下，二阶线性偏微分方程的二阶项系数矩阵(a_{ij})仅作了相似变换，所以矩阵$(p_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$有一个特征根为正，$n-1$ 个特征根为负，故$(p_{ij})_{i,j=2,\cdots,n}$是负定阵．证毕．

在下面的习题中我们给出了一些方程，请将它们化成标准型．应注意的是，将给定方程化成标准型的问题一般不会单独出现，它常常是在讨论某个偏微分方程或相应的定解问题时所需进行的第一步工作．如有这种需要时，我们应能熟练地进行所需的演算．

习　题

1．证明：含两个自变量的二阶线性偏微分方程经过自变量的可逆变换后类型不变．

2．判定下列方程的类型：

(1) $u_{xx}+xyu_{yy}=0$；

(2) $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+u_y=0$；

(3) $u_{xx}-2\sin x\cdot u_{xy}+\cos^2 x\cdot u_{yy}-\cos x\cdot u_y=0$；

(4) $y^m u_{xx}+u_{yy}+au_x+bu_y+cu=0$，$m$ 为正整数；

(5) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$；

(6) $\mathrm{sgn}y\cdot u_{xx}+2u_{xy}+\mathrm{sgn}x\cdot u_{yy}=0$，

其中

$$\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

3．将下列方程化成标准型：

(1) $u_{xx}+x^2u_{yy}=0$，$x>0$；

(2) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$，在第一象限中；

(3) $4u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}-2u_y=0$；

(4) $u_{xx}+yu_{yy}=0$，上、下半平面；

(5) $\sin^2x\cdot u_{xx}-2y\sin x\cdot u_{xy}+y^2u_{yy}$；

(6) $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y=0$.

4．证明：二阶常系数双曲型方程必可通过自变量的变换与未知函数的变换，化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}-\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j^2}+cu=f.$$

5．证明：常系数方程

$$u_{xy}+au_x+bu_y+cu=0$$

必可通过未知函数的变换化成 $v_{xy}+c_1v=0$ 的形式．

6．判定下列方程的类型：

(1) $u_{x_1x_1}+2\sum\limits_{k=2}^{n}u_{x_kx_k}-2\sum\limits_{k=1}^{n}u_{x_kx_{k+1}}=0$；

(2) $u_{x_1x_1} - 2\sum_{k=2}^{n}(-1)^k u_{x_{k-1}x_k} = 0$;

(3) $\sum_{k=1}^{n} u_{x_kx_k} + \sum_{l<k} u_{x_lx_k} = 0$;

(4) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + 3u_x + u_y = 0$.

7. 对 $\mathbf{R}^n$ 中诸点判定方程

$$\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_{ij} - x_ix_j)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + 2\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

的类型，式中

$$\delta_{ij} = \begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

§1.2 特 征 理 论

若在区域 Ω 中给定方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f, \tag{1.18}$$

对 $(x,y)\in\Omega$，若方向 (α_1,α_2) 满足

$$a_{11}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 + a_{22}\alpha_2^2 = 0, \tag{1.19}$$

则称 (α_1,α_2) 为特征方向. 若一曲线 $\varphi(x,y)=0$ 的法线方向 (φ_x,φ_y) 恒为特征方向，则称该曲线为特征曲线，且在特征曲线上成立

$$a_{11}\mathrm{d}y^2 - 2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a_{22}\mathrm{d}x^2 = 0. \tag{1.20}$$

下面我们列举有关方程(1.18)的特征线的一些性质. 当然，这些性质是相互关联的，实际上它们从不同的角度表述了特征线的本质.

(1) 实特征方向的个数决定于方程的类型：

若方程(1.18)在区域 Ω 中为双曲型，则 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$，于是对 Ω 中任一点都有两个特征方向，从而过任一点可以作出两条特征线；

若方程(1.18)在区域 Ω 中为抛物型，则 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$ 在 Ω 中恒成立，于是对 Ω 中任一点都只有一个特征方向，且过任一点只能作出一条特征线；

若方程(1.18)在区域 Ω 中为椭圆型，则 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$，从而方程(1.19)或方程(1.20)无实解，故对 Ω 中任一点都不存在实特征方向，在 Ω 中也不存在特征线.

对于二阶方程类型发生变化的点(变型点)，情形较复杂. 这时，过一点往往可作出两条相切的特征线，而特征方向仍只有一个.

(2) 设 $\Gamma:\varphi(x,y)=0$ 为一给定的曲线，满足 $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$. 若 Γ 不是方程(1.18)的特征曲线，则存在可逆变换 $(x,y)\to(\xi,\eta)$，其中 $\xi=\varphi(x,y)$，使在 Γ 的邻域中方程(1.18)可化成

$$u_{\xi\xi} = bu_{\xi\eta} + cu_{\eta\eta} + du_\xi + eu_\eta + fu + g \tag{1.21}$$