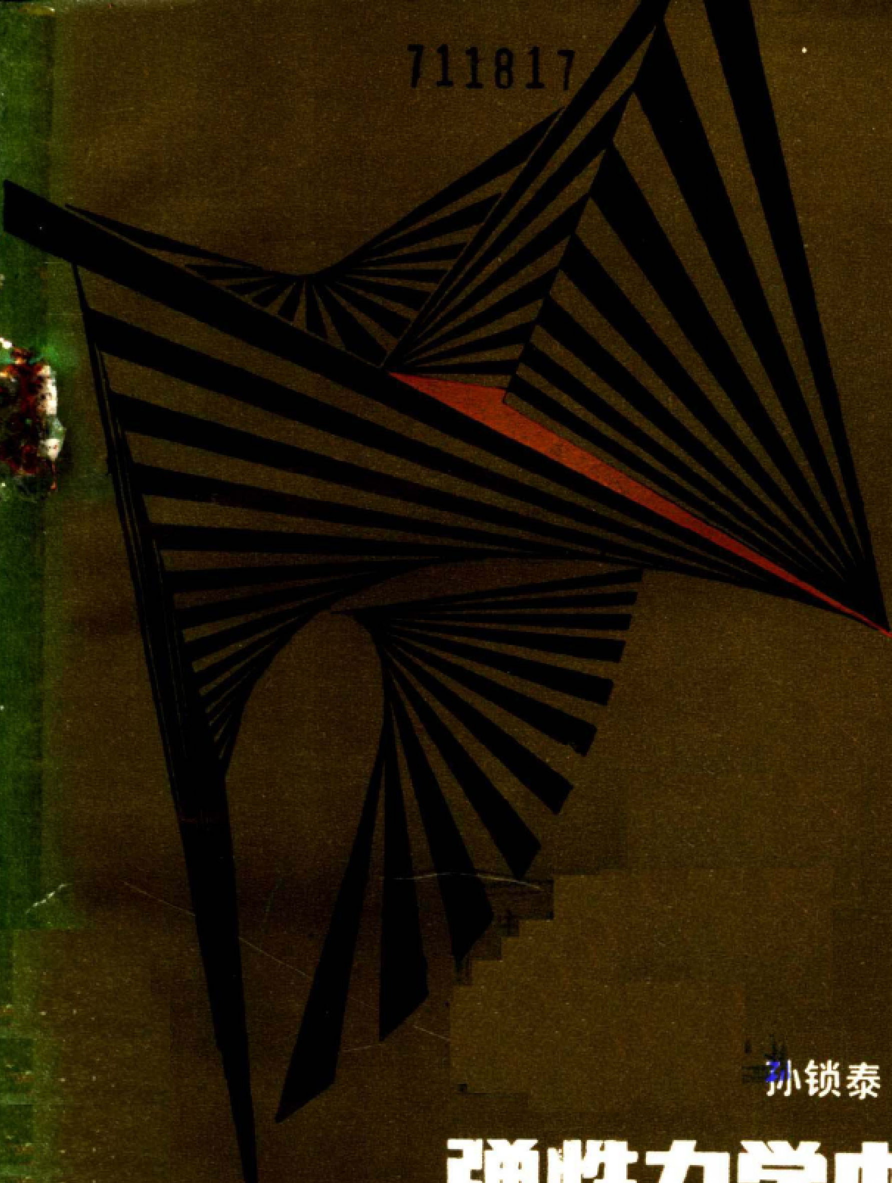

孙锁泰 编著

弹性力学中的变分原理导引

东南大学出版社

封面设计：王鸣义

ISBN-7-81023-244-4

O·32　　定价：1.60元

弹性力学中的变分原理导引

孙锁泰 编著

东南大学出版社

内 容 提 要

全书内容分五章。逐章介绍变分方法的基本概念。即经典变分原理、弹性力学中的几个能量原理、泛函变分问题的近似计算方法、变分问题近似解法在固体力学方面的一些应用以及广义变分原理的简介。本书末附有部分课外练习及思考题。

本书内容简洁，概念清晰，可作为高等工科院校本科生和研究生的教材或教学参考书，也可供固体力学青年教师及有关科研人员自学参考之用。

责任编辑　徐步政

弹性力学中的变分原理导引

孙锁泰　编著

东南大学出版社出版

南京四牌楼2号

江苏省新华书店发行　　南京人民印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32　印张7.625　字数171千

1989年5月第1版　　1989年5月第1次印刷

印数：1—2000册

ISBN-7-81023-244-4

O·32　　　　定价：1.60元

前　言

在工程实践中，常常需要确定某一函数$z=f(x)$的极大值或极小值，这种计算分析在微积分学里为大家所熟悉。但是除此之外，我们经常还要确定另一类特殊的量，即所谓泛函的极大值或极小值。凡有关寻求泛函的极大值或极小值的问题，都叫做变分问题。

弹性力学中的一个重要内容就是能量原理。此处的能量原理实际上是通过能量的概念，把能量当作泛函，将力学、几何和物理关系所提供的解决问题的途径转变为一种求泛函极大值或极小值的变分问题，所以能量原理亦称为变分原理。国内外的力学工作者都十分重视这个原理，因为这可以是许多理论分析和近似解法的出发点。自从本世纪里兹提出直接近似解法之后，这方面的研究和应用出现了高潮。这个高潮在深度上和广度上都达到了新的水平，影响到力学和数学的许多分支，应当引起我们的足够注意和重视。

我国的力学工作者在变分原理的研究工作上是非常认真、非常刻苦的，近年来发表了许多文章乃至长篇巨著，在赶超世界先进水平方面出现了十分可喜的形势，无疑这对我们是很大的鼓舞。

我们为机械类专业和固体力学专业硕士研究生所开讲的"弹性力学"课中，曾讲过变分原理有关内容。编著本书的目的是希望提供一本变分原理的简明读物，其中包括变分法的基本概念，古典变分问题、变分问题的直接解法和变分方法在固体力学中的某些应用。另外，根据教学需要，笔者把当前一些尚有争论的内容也写进去了，望读者注意，并欢迎指

正。

具备工科大学高等数学基础的低年级学生就能顺利阅读本书，个别引用的术语或符号稍作说明也能理解。因此本书作为高等工科院校本科二年级学生的教材是很合适的，当然也可作为工科硕士研究生的参考教材。

在本书的编写过程中，曾得到江苏工学院有关老师和研究生的支持，谨致衷心谢意。

孙锁泰

目　　录

第一章　变分方法的基本概念

§ 1-1 泛函和泛函的极值问题

一、函数和泛函

大家知道，随一个或几个自变量变化的变数为函数。而泛函是随一个或几个函数变化的变数。即泛函是函数的函数。

例如，对于变量x的某一变化域中的每一个x值，y有一值与之相对应。亦即变数y对应于变量x的关系成立，则称变量y是变量x的函数，记为$y=y(x)$。

如果对于某一类函数$y(x)$中的每一个函数$y(x)$，变量J有一值与之相对应，亦即变量J对应于函数$y(x)$的关系成立，则称变量J是函数$y(x)$的泛函，记为$J=J[y(x)]$。

因此，可以说，函数是变量和变量的关系，泛函是变量和函数的关系。

我们把这种建立在函数和变量之间的关系叫做泛函关系。例如，$C=\{y(x)\}$是在区间$[a, b]$上分段连续的函数集，设

$$J=\int_a^b y(x)dx$$

或

$$I=\max_{a<x<b} y(x)$$

则J和I的值便取决于所选择的$y(x)$，为明确其依赖关系，可以将J，I分别写成$J[y(x)]$和$I[y(x)]$。$J[y]$和$I[y]$便是以$C=\{y(x,\}$为定义域的两个泛函。

由此，我们可以给泛函下这样的定义：设$\{y(x)\}$是已给的函数集，如果对于集中任一函数$y(x)$恒有某个确定的变数$J[y]$或$I[y]$与之对应，则说$J[y]$或$I[y]$是定义于集$\{y(x)\}$上的一个泛函。

以上定义，可以推广到依赖多个函数的泛函，也可以推广到多元变量的情形，这在后面将会具体列举出来。

二、容许函数类

对普通函数$f(x)$求极值时，应先指定x的取值范围。讨论泛函$J[y]$的极值问题时，也应说明泛函所依赖的函数$y(x)$是些什么函数。通常把合乎条件可供选择的函数归为一类，叫做容许函数类（又可以叫做可取函数类）。

为叙述方便，我们有时借用x表示多元变量，即$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。这时，把多元函数$f(x_1, x_2)$简记为$f(x)$，相应地，$f(x)$的导数应指各个偏导数。

三、微分和变分

函数$y(x)$的宗量x的增量Δx是指这个变量的某两值之差$\Delta x=x-x_1$。如果x是自变量，则x的微分dx也是增量的一种，即当这种增量很小很小时，$dx=\Delta x$。

泛函$J[y(x)]$的宗量$y(x)$的增量是指两个不同的$y(x)$值之差$y(x)-y_1(x)=\Delta y$。在它很小时称为变分，用$\delta y(x)$或δy来表示，即$\delta y(x)=y(x)-y_1(x)$。这里应当指出$\delta y(x)$也是x的函数，只是$\delta y(x)$在x指定区域中都为微量。并且假

定，宗量$y(x)$是在接近$y_1(x)$的一类函数中任意地改变着的。

函数$y=y(x)$，$y_1=y_1(x)$要怎样才算是相差很小或很接近呢？下面将举例说明。

最简单的理解，在一切x值上，$y(x)$和$y_1(x)$的差（指差的模）都很小，也就是$y=y(x)$，$y_1=y_1(x)$的曲线的纵坐标到处都很接近。图1－1和1－2所画的二曲线都符合这个理解，但差异却很大。

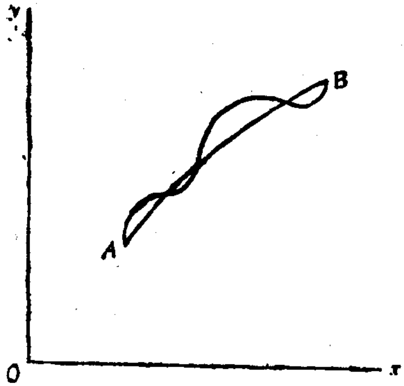

图1－1　只有零阶接近度，没有一阶接近度的接近曲线

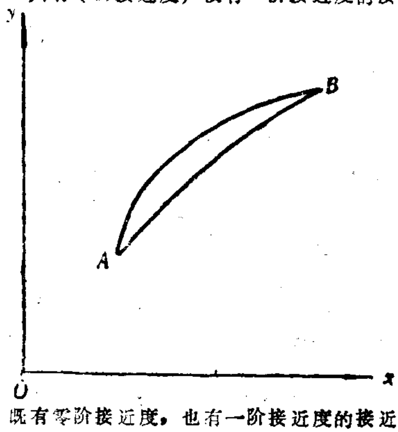

图1-2　既有零阶接近度，也有一阶接近度的接近曲线

实际情况是，曲线图 1－2 中不仅两曲线的纵坐标相近，而且对应点的切线方向也几乎相同。但曲线图 1－1 中则不然，虽然曲线的纵坐标是接近的，但其对应点的切线方向并不接近。图 1－1 的两条曲线，叫做零阶接近度的曲线。在这种接近度的曲线中，$y(x)-y_1(x)$的差值到处很小，但$y'(x)-y'_1(x)$的差值就不很小。图 1－2 的两条曲线叫做一阶接近度的曲线，在这一类接近度的曲线中，$y(x)-y_1(x)$，$y'(x)-y'_1(x)$的差值到处都很小。

有时要求下列每个差值(的模)都很小。即$\delta y=y_1(x)-y_1(x)$，$\delta y'=y'(x)-y_1'(x)$，$\delta y''=y''(x)-y_1''(x)$，…，$\delta y^{(k)}=y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)$都很小，则称$y=y(x)$，$y_1=y_1(x)$这两条曲线为有$k$阶的接近度的曲线。阶数愈高，曲线接近得愈好。

在以后的变分计算中，我们常常要求有较好的接近度。为此，拉格朗日引进一个小量ε，使

$$\delta y=\varepsilon\eta(x)=y(x)-y_1(x)$$

于是有

$$\delta y'=\varepsilon\eta'(x)=y'(x)-y_1'(x)$$

$$\delta y''=\varepsilon\eta''(x)=y''(x)-y_1''(x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\delta y^{(k)}=\varepsilon\eta^{(k)}(x)=y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)$$

当$\varepsilon\to 0$时，$\delta y,\delta y',\delta y'',\cdots,\delta y^{(k)}$都保证是微量，从而保证了有$k$阶接近度，甚至更高阶的接近度。当然，如果我们在原则上认定$\delta y,\delta y',\delta y'',\cdots,\delta y^{(k)}$是同级微量，即同

样可以用$\delta y, \delta y', \delta y'', \cdots, \delta y^{k}$进行变分，而不必引用$\varepsilon$。有许多变分计算就是在这样一个默认的原则上进行的。

四、函数的连续和泛函的连续

如果对于变量x的微小改变，有相对应的函数$y(x)$的微小改变，则函数$y(x)$是连续的。亦即，如果对于一个任意小的正数ε，可以找到一个正数δ，当$|x-x_1|<\delta$时，能使$|y(x)-y(x_1)|<\varepsilon$恒成立，则说函数$y(x)$在$x=x_1$处连续。

对于泛函亦有类似的定义。

如果对于$y(x)$的微小改变，有相对应的泛函$J[y(x)]$的微小改变，则泛函$J[y(x)]$是连续的，亦即：如果对于一个任意小的正数ε，可以找到一个正数δ，当$|y(x)-y_1(x)|<\delta$，$|y'(x)-y_1'(x)|<\delta$，$\cdots$，$|y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)|<\delta$时，能使$|J[y(x)]-J[y_1(x)]|<\varepsilon$恒成立，则说泛函$J[y(x)]$在$y(x)=y_1(x)$处$k$阶接近地连续的。

五、函数的微分和泛函的变分

函数的微分有两个定义，一个是通常的定义，即函数的增量$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$可以展开为$\Delta x$的线性项和非线性项：

$$\Delta y=A(x)\Delta x+\phi(x,\Delta x)\Delta x$$

其中$A(x)$和Δx无关，$\phi(x,\Delta x)$则和Δx有关，而且$\Delta x\to 0$时，$\phi(x,\Delta x)\to 0$，于是，就称$y(x)$是可微的，其线性部分就称为函数的微分，即$dy=A(x)dx=y'(x)dx$。这是因为根据定义，$A(x)=y'(x)$是函数的导数，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)$$

所以函数的微分是函数增量的主部。这个主部对于Δx来说是线性的。

同样设ε为一小参数，并把$y(x+\Delta x)$对ε求导数，即

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}y(x+\varepsilon\Delta x)=y'(x+\varepsilon\Delta x)\Delta x$$

当$\varepsilon\to 0$时

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}y(x+\varepsilon\Delta x)\Big|_{\varepsilon\to 0}=y'(x)\Delta x=dy(x)$$

这就证明了$y(x+\varepsilon\Delta x)$在$\varepsilon=0$处对ε的导数就等于$y(x)$在x处的微分。这是函数微分的第二个定义。这个定义和拉格朗日处理变分的定义是相类似的。

泛函的变分也有类似的两个定义。对于$y(x)$的变分$\delta y(x)$所引起的泛函的增量，定义为

$$\Delta J=J[y(x)+\delta y(x)]-J[y(x)]$$

可以展开为线性的泛函项和非线性的泛函项：

$$\Delta J=L[y(x),\ \delta y]+\phi[y(x),\delta y]\cdot\text{mas}|\delta y|$$

其中$L[y(x),\delta y]$对δy来说是线性的泛函项，亦即

$$L[y(x),\ C\delta y]=CL[y(x),\ \delta y]$$

$$L[y(x),\ \delta y+\delta y_1]=L[y(x),\ \delta y]+L[y(x),\delta y_1]$$

典型的线性泛函为

$$L[y(x),\ \delta y]=\int_{x_1}^{x_2}[p(x,y)\delta y+g(x,y)\delta y'$$

$$+n(x,y)\delta y''+\cdots$$

$$+t(x,y)\delta y^{k}]dx$$

前式中的$\phi[y(x),\ \delta y]\max|\delta y|$是非线性泛函项。但$\phi[y(x),\delta y]$是$\delta y$的同阶或高阶小量。当$\delta y\to 0$时$\max|\delta y|\to 0$，而且$\phi[y(x),\delta y]$也接近于零。于是泛函的增量对于$\delta y$来说是线性的那一部分，即$L[y(x),\delta y]$就叫做泛函的变分，用$\delta J$来表示为

$$\delta J=\{J[y(x)+\delta y]-J[y(x)]\}=L[y(x),\delta y]$$

所以，泛函的变分是泛函的增量的主部，而且这个主部对于变分δy来说是线性的。

同样，也有拉格朗日的泛函变分定义。泛函变分是$J[y(x)+\varepsilon\delta y]$对$\varepsilon$的导数在$\varepsilon=0$时的值。因为根据前述公式，有

$$J[y(x)+\varepsilon\delta y]=J[y(x)]+L[y(x),\varepsilon\delta y]$$

$$+\phi[y(x),\varepsilon\delta y]\times\varepsilon\max|\delta y|$$

而且

$$L[y(x),\varepsilon\delta y]=\varepsilon L[y(x),\ \delta y]$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J[y(x)+\varepsilon\delta y]=L[y(x),\delta y]+\phi[y(x),$$

$$\varepsilon\delta y] \times \max|\delta y|$$

$$+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{\phi[y(x),\varepsilon\delta y(x)]\}\max|\delta y(x)|$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]|_{\varepsilon=0} = L[y(x),\delta y(x)]$$

注意，前一个式中，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\phi[y(x),\varepsilon\delta y] \to 0$，后一项必等于零。这就证明了拉格朗日的泛函变分定义：

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}J[y(x)+\varepsilon\delta y]|_{\varepsilon\to 0}$$

六、极值问题

如果函数$y(x)$在$x=x_0$附近的任意点上的值都不大(小)于$y(x_0)$，即$dy=y(x)-y(x_0)\leqslant 0$ ($\geqslant 0$)时，则函数$y(x)$在$x=x_0$上达到极大(极小)值，而且在$x=x_0$上有

$$dy = 0$$

对于泛函$J[y(x)]$而言，也有类似的定义。

如果泛函$J[y(x)]$在任何一条与$y=y_0(x)$接近的曲线上的值不大(或不小)于$J[y_0(x)]$，也就是，如果$\delta J=J[y(x)]-J[y_0(x)]\leqslant 0$ (或$\geqslant 0$)时，则说泛函$J[y(x)]$在曲线$y=y_0(x)$上达到极大值(或极小值)，而且在$y=y_0(x)$上有

$$\delta J = 0$$

在这里，对于泛函的极值概念有进一步说明的必要。凡说到泛函的极大(或极小)值，主要是指泛函的相对的极大(极小)值，也就是说，就互相接近的许多曲线来研究一个最大(或最小)的泛函值。但是，曲线的接近有不同的接近度。因