新世纪财经院校经济数学教辅用书

# 高等数学

## 习题集

GAODENG SHUXUE XITIJI

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

新世纪财经院校经济数学教辅用书

# 高等数学
# 习题集

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学习题集/上海财经大学应用数学系编．—上海：上海财经大学出版社，2004.2

（新世纪财经院校经济数学教辅用书）

ISBN 7-81098-019-X/O·000

Ⅰ．高…　Ⅱ．上…　Ⅲ．高等数学-高等学校-习题　Ⅳ．013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 003643 号

GAODENG SHUXUE XITIJI

**高 等 数 学 习 题 集**

上海财经大学应用数学系　编

责任编辑　刘光本　封面设计　周卫民

上海财经大学出版社出版发行

（上海市武东路 321 号乙　邮编 200434）

网　　址：http://www.sufep.com

电子邮箱：webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

上海译文印刷厂印刷

上海浦江装订厂装订

2004 年 2 月第 1 版　2004 年 2 月第 1 次印刷

890 mm×1240 mm　1/32　12 印张　334 千字

印数：0 001—4 000　定价：24.00 元

# 前　言

数学教育是素质教育,数学训练是思维的体操。高等数学的理论和知识是学生未来进一步学习和研究的必要而且极为重要的基础。所以,如何提高学生的高等数学水平是非常重要的。众所周知,高等数学的严谨激人奋发,而高等数学的抽象又令人望而却步,数学的概念更是不太容易理解和接受。做一些高等数学的题目不失为一个良好的方法,以诱发学习《高等数学》的兴趣,从而能较好地理解抽象的概念,提高运用数学的思维和技巧。高等数学题目的解题训练还可以达到熟能生巧的功效。正是为了这个目的,配合正常的财经类《高等数学》的教学,我们编写了这本习题集。本书每章首先归纳了有关内容,选编了典型例题。在编写的过程中,我们反复琢磨,参照研究生入学考试的题型和难度认真选题。所以,该习题集既可以做一般教学的参考之用,也可以成为有志考研者的良师益友。

参加编写的有:张震峰(第一、二、三章),罗万钧(第四、五、六、十三章),魏枫(第七、八、九、十章),殷承元(第十一、十二章)。罗万钧副教授做了大量的组织工作。上海财经大学应用数学系主任陈启宏教授、冉启康书记、杨晓斌副主任为此作了不少指导,付出了心血。我系高等数学教研室的同事们也给予了很多帮助。上海财经大学出版社给予了我们很大的支持,特别是刘光本同志的认真编辑和一丝不苟的校对给本书润色不少,在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促,加上我们的水平有限,定会存在不足之处,恳请广大读者和同仁不吝赐教。

**编　者**

2003 年 12 月 28 日

于上海财经大学

# 目　　录

# 第一章　函数与极限

## 一、内容提要

### （一）函数

1. 函数

设 $D$ 是一个数集，如果对于 $D$ 中的任一 $x$ 值，变量 $y$ 按照一定的对应法则有一个确定的值与之对应，则称变量 $y$ 是 $x$ 的函数，记作 $y=f(x)$，$x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量. 自变量的取值范围称为定义域，记作 $D_f$；$y$ 的取值范围称为函数的值域，记作 $Z_f$.

2. 反函数

函数 $f(x)$的定义域为 $D$，值域为 $Z$，对 $Z$ 中任意的 $y$，至少可以确定一个 $x\in D$(适合 $f(x)=y$) 与之对应，由此构成的函数称为 $f(x)$ 的反函数，记作 $f^{-1}(x)$.

3. 复合函数

如果 $y=f(u)$，$u\in D_f$，$u=\varphi(x)$，$x\in D_\varphi$，且 $D_f\cap D_\varphi\neq\varnothing$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，其中 $u$ 为中间变量.

4. 函数的定义域

用解析式表示的函数，其定义域应使解析式在实数范围内有意义.

偶次根式要求被开方数大于、等于零.

分式要求分母不等于零.

对数函数要求真数大于零.

反三角函数也有特殊限定：$\arcsin x$，$\arccos x$，要求 $|x|\leqslant 1$.

三角函数$\tan x$，$\sec x$，要求 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；

$\cot x$，$\csc x$，要求 $x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

多项函数的定义域是每一项函数定义域的交集.

分段函数的定义域是各段函数定义区间的并集.

反函数的定义域是直接函数的值域.

5. 初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六种函数称为基本初等函数.

基本初等函数经过有限次四则运算和复合，且只能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

6. 函数的几何特性

(1) 有界性

若存在 $M>0$，使对任意 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 是 $D$ 上的有界函数. 否则，称 $f(x)$ 在 $D$ 上无界.

几个常见的有界函数：

$$|\sin x|\leqslant 1,\ |\cos x|\leqslant 1,\ |\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2},\ |\arccos x|\leqslant\pi,$$

$$|\arctan x|<\frac{\pi}{2},\ |\operatorname{arccot} x|<\pi,\ \left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1.$$

(2) 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义，且对于 $I$ 中任意两点 $x_1$，$x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的单调递增(减) 函数. 区间 $I$ 称为单调递增(减) 区间.

单调递增(减)函数的反函数仍然是单调递增(减)函数.

(3) 奇偶性

若函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称，且对于 $D$ 内任意一点 $x$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

奇函数的图像对称于原点.

偶函数的图像对称于 $y$ 轴.

奇函数的反函数是奇函数.

(4) 周期性

设函数 $y=f(x)$ 在 $D$ 上有定义,若存在常数 $T>0$,对 $\forall x\in D$,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期函数,其中最小的 $T$ 称为函数 $f(x)$ 的周期.

若 $f(x)$, $g(x)$ 是分别以 $T_1$, $T_2$ 为周期的周期函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 也是周期函数,其周期 $T$ 是 $T_1$, $T_2$ 的最小公倍数.

(二) 极限

1. 数列极限

(1) 数列

数列是无穷有序的数组,而其第 $n$ 项称为一般项;数列 $\{a_n\}$ 中取无穷项且保持原有次序而构成的数列称为 $\{a_n\}$ 的子列.

(2) 极限

数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时,有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

(3) 性质

a. 惟一性　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$, 则 $a=b$.

b. 有界性　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\{a_n\}$ 有界.

c. 归并性　数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件为其任一子列收敛.

d. 单调有界定理　单调有界数列必有极限.

e. 夹挤定理　设三个数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$,如果 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

2. 函数极限

(1) 极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$, 当 $|x|>M$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(2) 左、右极限

右极限：$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

左极限：$f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在的充分必要条件是其左右极限存在且相等.

(3) 性质

a. 惟一性　设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$，则 $A = B$.

b. 局部有界性　设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 $U_0(x_0, \delta)$ 内有界.

c. 保号性　设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0\ (< 0)$，则在 $U_0(x_0, \delta)$ 内有 $f(x) > 0\ (< 0)$.

d. 夹挤定理　若在 $U_0(x_0, \delta)$ 内有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

e. 四则运算　$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

3. 无穷小量

(1) 无穷小量与无穷大量

若 $\lim\limits_{x \to (\ \ )} f(x) = 0$，则称函数 $f(x)$ 当 $x \to (\quad)$ 时是无穷小量.

若 $\lim\limits_{x \to (\ \ )} f(x) = \infty$，则称函数 $f(x)$ 当 $x \to (\quad)$ 时是无穷大量.

在同一过程中,若 $f(x)$为无穷小量,且 $f(x) \neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量;若 $f(x)$ 为无穷大量,则$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量.

(2) 性质

有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量;

有限个无穷小量的积仍是无穷小量;

无穷小量与有界量的积是无穷小量.

(3) 无穷小量的比较

设 $\alpha$, $\beta$ 是同一过程 $x \to (\quad)$中两个无穷小量.

若 $\lim\limits_{x \to (\ )} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$,则称 $\alpha$ 是 $\beta$ 的高阶无穷小量,记 $\alpha = 0(\beta)$.

若 $\lim\limits_{x \to (\ )} \dfrac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$,则称 $\alpha$ 与 $\beta$ 是同阶无穷小量. 特别地,$A = 1$ 时,称 $\alpha$ 与 $\beta$ 是等价无穷小量,记作 $\alpha \sim \beta$.

若 $\lim\limits_{x \to (\ )} \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$,则称 $\alpha$ 是 $\beta$ 的低阶无穷小量.

4. 极限的计算

(1) 代入法——利用函数的连续性..

(2) 因式分解——去掉零因子.

(3) 分子、分母同除最高阶的无穷大量——去掉无穷大因子.

(4) 分子或分母有理化.

(5) 利用两个重要极限

$$\lim_{(\ ) \to 0} \frac{\sin(\quad)}{(\quad)} = 1;\ \lim_{(\ ) \to 0} [1 + (\quad)]^{\frac{1}{(\ )}} = \mathrm{e}.$$

(6) 利用"无穷小量与有界量之积为无穷小量".

(7) 利用等价无穷小量代换.

当 $x \to (\quad)$ 时,$\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, 则 $\lim\limits_{x \to (\ )} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to (\ )} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

常用等价无穷小量代换有：$x \to 0$ 时，$\sin x$，$\arcsin x$，$\tan x$，$\arctan x$，$\ln(1+x)$，$e^x-1 \sim x$，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$(1+\beta x)^\alpha - 1 \sim \alpha\beta x$，$a^x - 1 \sim x\ln a$.

(8) 利用变量替换.

常用的变量替换是令 $x = \frac{1}{t^k}$，$k$ 为自然数.

(9) 利用夹挤定理和单调有界定理.

(10) 洛必达法则(第三章学习).

(三) 函数的连续性

1. 连续的概念

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点连续的几个等价定义

a. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$；

b. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$；

c. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$.

(2) 左、右连续

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 左连续；

若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 右连续.

(3) 连续函数

若 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内任意点都连续，称 $f(x)$ 在开区间 $(a, b)$ 内连续；

若 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内连续，在 $x = a$ 右连续，在 $x = b$ 左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；

若 $f(x)$ 在其定义域内连续，称 $f(x)$ 为连续函数.

2. 间断点

若 $f(x)$ 在 $U_0(x_0, \delta)$ 内有定义，而在 $x_0$ 点不连续，则称 $x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点.

第一类间断点—— $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 都存在的间断点.

若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，间断点 $x_0$ 称为可去间断点；

若 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，间断点 $x_0$ 称为跳跃间断点.

第二类间断点—— $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 中至少有一个不存在.

若 $f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$ 中有一个为 $\infty$，则称 $x_0$ 为无穷间断点.

3. 连续函数的运算性质

连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍是连续函数；

连续函数经过有限次复合仍是连续函数；

初等函数在其定义区间内连续，即为连续函数.

注意：分段函数必须考察其分段点的连续性，以确定间断点和连续区间.

4. 闭区间上连续函数的性质

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则

(1) 有界定理：$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

(2) 最值定理：$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 $M$ 和最小值 $m$.

(3) 介值定理：对 $\forall c$，$m<c<M$，至少有一点 $\xi\in[a, b]$，使 $f(\xi)=c$.

(4) 零值定理：若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少有一点 $\xi\in(a, b)$，使 $f(\xi)=0$（即方程 $f(x)=0$ 在 $(a, b)$ 内至少有一个根).

## 二、典型例题

**例 1** 设函数 $f(x+1)=x^2-x-1$，求 $f(x)$.

**解** (一) 令 $t=x+1$，$x=t-1$，代入 $f(x+1)$ 得

$$f(t)=(t-1)^2-(t-1)-1=t^2-3t+1$$

所以 $f(x)=x^2-3x+1$.

(二) 将右边凑成以 $x+1$ 为变量的形式

$$\begin{aligned}f(x+1)&=(x^2+2x+1)-3(x+1)+1\\&=(x+1)^2-3(x+1)+1\end{aligned}$$

所以 $f(x)=x^2-3x+1$.

**例 2** 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<1\\ x & x\geqslant 1\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}x+2 & x<0\\ x^2-1 & x\geqslant 0\end{cases}$,求 $f[\varphi(x)]$.

**解** $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)} & \varphi(x)<1\\ \varphi(x) & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$

(1) 当 $\varphi(x)<1$ 时,

或 $x<0$, $\varphi(x)=x+2<1$,即 $x<-1$.

或 $x\geqslant 0$, $\varphi(x)=x^2-1<1$,即 $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(2) 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时,

或 $x<0$, $\varphi(x)=x+2\geqslant 1$,即 $-1\leqslant x<0$.

或 $x\geqslant 0$, $\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$,即 $x\geqslant\sqrt{2}$.

综上所述,$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2} & x<-1\\ x+2 & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1} & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1 & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$.

**例 3** 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x & |x|<1\\ x^2+x & 1\leqslant|x|\leqslant 2\end{cases}$.

求 $g(x)=f(2x)+f(2-x)$ 的定义域.

**解** $f(x)$的定义域为$[-2,2]$,

则 $f(2x)$ 的定义域:$-2\leqslant 2x\leqslant 2$. $-1\leqslant x\leqslant 1$.即$[-1,1]$.

而 $f(2-x)$ 的定义域:$-2\leqslant 2-x\leqslant 2$. $0\leqslant x\leqslant 4$.即$[0,4]$.

所以 $g(x)$ 的定义域为$[-1,1]\cap[0,4]=[0,1]$.

**例 4** $F(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)\cdot f(x)$.其中 $a>0$, $a\neq 1$.且 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有定义,对任何$x$, $y$恒有$f(x+y)=f(x)+f(y)$.试证 $F(x)$ 为偶函数.

**证明** 设 $g(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$.

则 $g(-x)=\dfrac{1}{a^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^x}{1-a^x}+\dfrac{1}{2}$

$$=-1+\frac{1}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-g(x),$$

故 $g(x)$ 为奇函数.

又 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,令 $y=0$,得 $f(x)=f(x)+f(0)$,得 $f(0)=0$, $f(x)+f(-x)=f(x-x)=f(0)=0$,所以 $f(x)$ 为奇函数,故 $F(x)=g(x)f(x)$ 为偶函数.

**例 5** 设 $x_1=1$, $x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1}$, $\cdots$, $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**解** (一) $x_2-x_1=\dfrac{x_1}{1+x_1}>0$,于是 $x_2>x_1$.

设 $x_n>x_{n-1}$,

则 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n}{1+x_n}-\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0$,

$\{x_n\}$ 单调递增.

又因为 $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}<2$,则 $\{x_n\}$ 有界,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设其为 $l$,于是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right),$$

即 $l=1+\dfrac{l}{1+l}$,$l=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,由题设 $l$ 非负,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(二) 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,同上得 $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$.

$$|x_n-l|=\left|\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)-\left(1+\frac{l}{1+l}\right)\right|$$

$$= \frac{|x_{n-1}-l|}{|(1+x_{n-1})(1+l)|}$$

$$< \frac{|x_{n-1}-l|}{2(1+l)} < \cdots < \frac{|x_1-l|}{2^{n-1}(1+l)}$$

$$= \frac{\frac{l}{1+l}}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2},$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}(1+l)^2}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-l)=0$，

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**例 6** 求极限 $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}$.

**解** 令 $\arccos x = t$，则 $x=\cos t$，

原式$= \lim\limits_{t\to\pi^-}\frac{(\pi-t)^2}{1+\cos t} = \lim\limits_{t\to\pi^-}\frac{(\pi-t)^2}{1-\cos^2 t}\cdot(1-\cos t)$

$$= 2\lim_{t\to\pi^-}\frac{(\pi-t)^2}{\sin^2 t} = 2\lim_{t\to\pi^-}\frac{(\pi-t)^2}{\sin^2(\pi-t)} = 2.$$

**例 7** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}$.

**解** $x=0$ 时，$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=1$；

$x\neq 0$ 时，$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{2^n}$.

原式$=\begin{cases} 1 & x=0 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{2^n} & x\neq 0 \end{cases}$

$$=\begin{cases} 1 & x=0 \\ \frac{\sin x}{x} & x\neq 0 \end{cases}$$

**例 8** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

**解** 因为 $0\leqslant\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{(n-1)}{n}\cdot\dfrac{n}{n}\leqslant\dfrac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

**例 9** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

**解** 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\dfrac{x\sin x}{2}$，$e^{x^2}-1\sim x^2$，

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

**例 10** 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$，求常数 $a$，$b$.

**解** $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-(ax^2+bx+1)}{3x+\sqrt{ax^2+bx+1}}=2,$$

故 $\begin{cases}9-a=0\\ -b\div(3+\sqrt{a})=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=9\\ b=-12\end{cases}$

**例 11** 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{n}$ $(x>0)$ 是否连续.

**解** 当 $0<x\leqslant e$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln e^n\left[1+\left(\frac{x}{e}\right)^n\right]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\ln\left[1+\left(\frac{x}{e}\right)^n\right]}{n}$$
$$=1,$$

当 $x>e$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x^n\left[1+\left(\frac{e}{x}\right)^n\right]}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln x + \ln\left[1+\left(\frac{\mathrm{e}}{x}\right)^n\right]}{n} = \ln x.$$

于是 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leqslant \mathrm{e} \\ \ln x & x > \mathrm{e} \end{cases}$

又 $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^-} f(x) = 1$，$\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \mathrm{e}^-} \ln x = 1$，$f(\mathrm{e}) = 1$，

可知 $f(x)$ 在 $x = \mathrm{e}$ 点连续.从而 $f(x)$ 在 $x > 0$ 上连续.

**例 12** 设函数 $f(x)$在$[0, a]$上非负连续,且 $f(0) = f(a) = 0$.则对实数 $l(0 < l < a)$,必有 $\xi \in [0, l)$,使 $f(\xi) = f(\xi - l)$.

**证明** 设 $F(x) = f(x) - f(x+l)$,则$F(x)$在$[0, a-l]$上连续.由于 $f(x)$ 非负,且 $f(0) = f(a) = 0$,则 $F(0) = f(0) - f(l) = -f(l) \leqslant 0$，$F(a-l) = f(a-l) - f(a) = f(a-l) \geqslant 0$.

(1) 若 $F(0) = 0$，则 $\xi = 0$ 即为所求.

(2) 若 $F(a-l) = 0$,则 $\xi = a - l$ 即为所求.

(3) 若 $F(a) = 0$，$F(a-l) \neq 0$.则 $F(a)F(a-l) < 0$.

由零值定理,至少存在一点 $\xi \in (0, a-l) \subset (0, a)$,使 $F(\xi) = 0$.即 $f(\xi) = f(\xi + l)$.

综上(1)(2)(3),可知存在 $\xi \in [0, a-l] \subset [0, a)$,使 $f(\xi) = f(\xi + l)$.

**例 13** 确定 $a$，$b$ 的值,使 $f(x) = \dfrac{x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x = 0$,有可去间断点 $x = 1$.

**解** 因为 $f(x)$在 $x=0$ 处为无穷间断点,即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$.

故$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-a)(x-1)}{x-b} = -\dfrac{a}{b} = 0$.

所以 $a = 0$，$b \neq 0$.

又 $x = 1$ 处为可去间断点,即$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-b}{x(x-1)}$ 存在.

故 $b = 1$，所以 $a = 0$，$b = 1$.