高等院校计算机专业教育改革推荐教材

# 计算机科学中的离散结构

王元元 张桂芸 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等院校计算机专业教育改革推荐教材

# 计算机科学中的离散结构

王元元　张桂芸　编著

机械工业出版社

本书是按照教育部离散数学教学大纲，参考 ACM & IEEE CC2001 和 CCC2002（中国计算机科学与技术学科教程）的教改要求编写的。本书涵盖了经典的“离散结构”或“离散数学”课程的主要内容，包括集合论基础、逻辑代数、形式系统与形式推理、组合论基础、图论基础、关系与函数、计算理论基础和抽象代数学基础。具有内容系统全面、阐述浅显易懂、编排合理新颖、使用灵活方便的特点。

本书可用作高等院校计算机科学与技术专业及计算机软件学院本科生、专科生的离散数学课程的教材，以及毕业生考研复习用书；也可作为计算机教育工作者、相关专业技术人员的参考读物。

**图书在版编目（CIP）数据**

计算机科学中的离散结构/王元元，张桂芸编著.
—北京：机械工业出版社，2004.1
高等院校计算机专业教育改革推荐教材
ISBN 7-111-12939-3

Ⅰ. 计… Ⅱ. ①王…②张… Ⅲ. 离散数学—高等
学校—教材 Ⅳ. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 073748 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策　　划：胡毓坚
责任编辑：时　静
责任印制：闫　焱

北京中加印刷有限公司印刷・新华书店北京发行所发行

2004 年 1 月第 1 版・第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16・19.75 印张・488 千字
0001－5000 册
定价：28.00元

凡购本图书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646

# 高等院校计算机专业教育改革推荐教材
# 编委会成员名单

# 编 者 的 话

计算机科学技术日新月异的飞速发展和计算机科学技术专业教育的相对滞后，已是不争的事实。

有两个发人深省的现象：一是，由于非计算机专业的学生既具有一门非计算机专业的专业知识，又具有越来越高的计算机应用技术水平，从而使计算机专业的学生感受到一种强烈的冲击和压力；二是，创建软件学院的工作已有近两年的历史，但软件学院的计算机专业教育的定位仍在探讨之中。

我们认为计算机科学与技术专业（以下简称计算机专业）教育的改革势在必行，正确认识和划分计算机专业教育的层次，对该专业的教育改革无疑是一个非常重要的问题。我国的计算机专业教育主要分三个层次。一般说来，这三个层次通常分布在以下三类高等院校：

第一层次主要以具有计算机一级学科博士学位授予权的教育部属重点高等院校为代表（包括具有两个博士点的大学）。这一类大学本科着重培养理论基础比较坚实、技术掌握熟练、有一定研究和开发能力的计算机专业学科型人才，其中部分学生（约占本科生的10%）可攻读博士学位。

第二层次主要以具有一个计算机二级学科专业博士点的教育部属高等院校为代表。这一类高等院校本科着重培养有一定的理论基础、技术掌握比较熟练、有一定的研究或开发能力的计算机专业人才，其中一部分培养成学科型人才，另一部分培养成应用型人才，一小部分学生（约占本科生的5%）可攻读博士学位。

第三层次主要以具有计算机二级学科专业硕士点的省属高等院校为代表。这一类高等院校本科面向企业应用，侧重培养对计算机技术或部分计算机技术掌握比较熟练，有一定的开发、应用能力的计算机专业应用型人才，其中很小一部分学生（约占本科生的2.5%）可攻读博士学位。

国家教育部、计委批准的或省教育厅批准的示范性软件学院，就其培养目标和办学特色而言，分别与第二层次中应用型人才培养部分以及第三层次比较接近，但在如下方面有所不同：将软件工程课程作为专业教学重点，更加强调英语教学，更加重视实践能力培养，并对两者有更高的要求。

我们本着对高等院校的计算机专业状况的认识，主要面向与上述第二、第三两个层次对应的院校及与之相近的软件学院，总结多年的计算机专业的教改经验，在一定程度上融入了ACM& IEEE CC2001 和 CCC2002（中国计算机科学与技术学科教程）的教改思路，组织我国一直投身于计算机教学和科研的教师，编写了这套“高等院校计算机专业教育改革推荐教材”（以下简称“推荐教材”）。自然，“推荐教材”中所贯穿的改革思路和做法，也是针对上述第二、第三两个层次对应院校的计算机专业学生。这些思路和做法可概括成以下三句话：

- 适度调整电子技术基础、计算机理论基础和系统软件的教学内容。
- 全面强化计算机工具软件、应用软件的教学要求。
- 以应用为目标大力展开软件工程的教学与实践。

电子技术基础、计算机理论基础、系统软件教学关系到学生的基本素质、发展潜力和日后的应变能力。“推荐教材”在调整它们的教学内容时的做法是：适度压缩电子线路、数字

电路和信号系统的教学内容，变三门课程为两门，并插入数字信号处理的基础内容；合并“计算机组成原理”、“微型计算机接口技术”和“汇编语言”为“计算机硬件技术基础”一门课程；注意适当放宽“离散数学”课程的知识面，使之与 CCC2002 的要求基本接轨，但适度降低其深度要求；更新系统软件课程的教学内容，以开放代码的 Linux 作为操作系统原理的讲授载体，更加关注系统软件的实践性和实用性。

为了提高计算机专业人才的计算机应用能力，全面强化计算机工具软件、实用软件的教学要求是十分重要的，这也是上述改革思路的核心。为此，“系列教材”的做法是：强化程序设计技术，强化人机接口技术，强化网络应用技术。

为强化程序设计技术，“推荐教材”支持在单片机环境、微机平台、网络平台的编程训练；支持运用程序设计语言、程序设计工具以及分布式对象技术的编程训练。大大加强面向对象程序设计课程的组合（设计了三门课程：面向对象的程序设计语言 C++，面向对象的程序设计语言 Java 和分布式对象技术），方便教师和读者的选择。

为强化人机接口技术，“推荐教材”设计了“人机交互教程”，“计算机图形学”和“多媒体应用技术”等可供选择的、有层次特色的课程组合。

为强化网络应用技术，“推荐教材”设计了“计算机网络技术”，“计算机网络程序设计”，“计算机网络实验教程”和“因特网技术及其应用”等可供选择的、新颖丰富的课程组合。

将软件工程课程作为专业教学重点，以应用为目标大力展开软件工程的教学与实践，是“推荐教材”改革思路的又一亮点。为改变以往软件工程课程纸上谈兵的老毛病，“推荐教材”从工程应用出发，理论联系实际，突出建模语言及其实现工具的运用，设计了“软件工程的方法与实践”，“统一建模语言 UML 导论”和“ROSE 对象建模方法与技术”等可供选择的、创新独特的软件工程课程组合。对于各类软件学院，“推荐教材”的这一特色无疑是很有吸引力的。

强调实践也是计算机学科永恒的主题，对计算机应用专业的学生来说更是如此。重应用和重实践是“推荐教材”的一个整体特点。这一特点，一方面有利于解决本文开始所指出的计算机专业学生较之非计算机专业学生，在应用开发工作中上手慢的问题；另一方面，使计算机专业的学生能在更大范围内、更高层面上掌握计算机应用技术。这一特点正是许多高等院校计算机专业教育改革追求的一个目标，也是国家教育部倡导软件学院的初衷之一。

“推荐教材”由基础知识、程序设计、应用技术、软件工程和实践环节等五个模块组成。各模块有其对应的培养目标与功能，从而构架出一个创新的、完整的计算机应用专业的课程体系。模块化的设计，使各学校可根据学生及学校的特点做自由的选择和组合，既能达到本专业的总体要求，又能体现具有特色的个性发展。整套教材的改革脉络清晰，结构特色鲜明，值得各高等院校在改革教学内容、编制教学计划、挑选教材书目时借鉴和参考。当然，很多书目也适合很多相关学科的计算机课程用作教材。

“推荐教材”的组成模块和书目详见封底。显然它不能说是完备的（实践环节模块更是如此），其改革的思路、改革的举措也可能有值得探讨的地方。我们衷心希望得到计算机教育界同仁和广大读者的批评指正。

高等院校计算机专业教育改革推荐教材

编委会

# 前　言

“离散”与“连续”是数量关系中一对极为深刻的矛盾，它们之间的对立与统一是数学发展的重要原动力之一。“离散”是“连续”的否定，即“不连续”；而“连续”则是指事物、数量的一种属性，这种属性使它们容易被分割或结合，并且不会因分割或结合而丧失它们原有的本性。例如，实数是连续的，整数则是离散的；二次函数是连续的，二次函数值的计算则是离散的。

“离散结构”的研究对象是：离散数量关系以及离散系统结构的数学模型及建模方法。因而，讲授“离散结构”的课程又常称为“离散数学”

作为“离散数学”课程教材的《计算机科学中的离散结构》，其内容无疑应当包括两个方面的基础理论知识，这就是：研究计算机这一离散结构本身的数学模型及数学方法，以及研究计算机应用对象的离散结构的数学模型及建模方法。本教材由以下几个主要部分组成：

一、离散结构的研究中所需的基本数学知识：集合论基础和两个常用数学基本原理（第1、2两章）。

二、研究计算机离散结构本身的数学模型及数学方法。

1. 作为计算机运算基础的逻辑代数（第3、4两章）。

2. 作为计算机表示基础的形式化、形式系统技术（第5章）。

3. 作为计算机科学中的“力学”，讨论计算机计算能力的计算理论（第12章）。

三、研究计算机应用对象的离散结构的数学模型及建模方法。

1. 离散结构的计数模型及递归关系模型（第6、7两章）。

2. 离散结构的图模型（第8、9两章）。

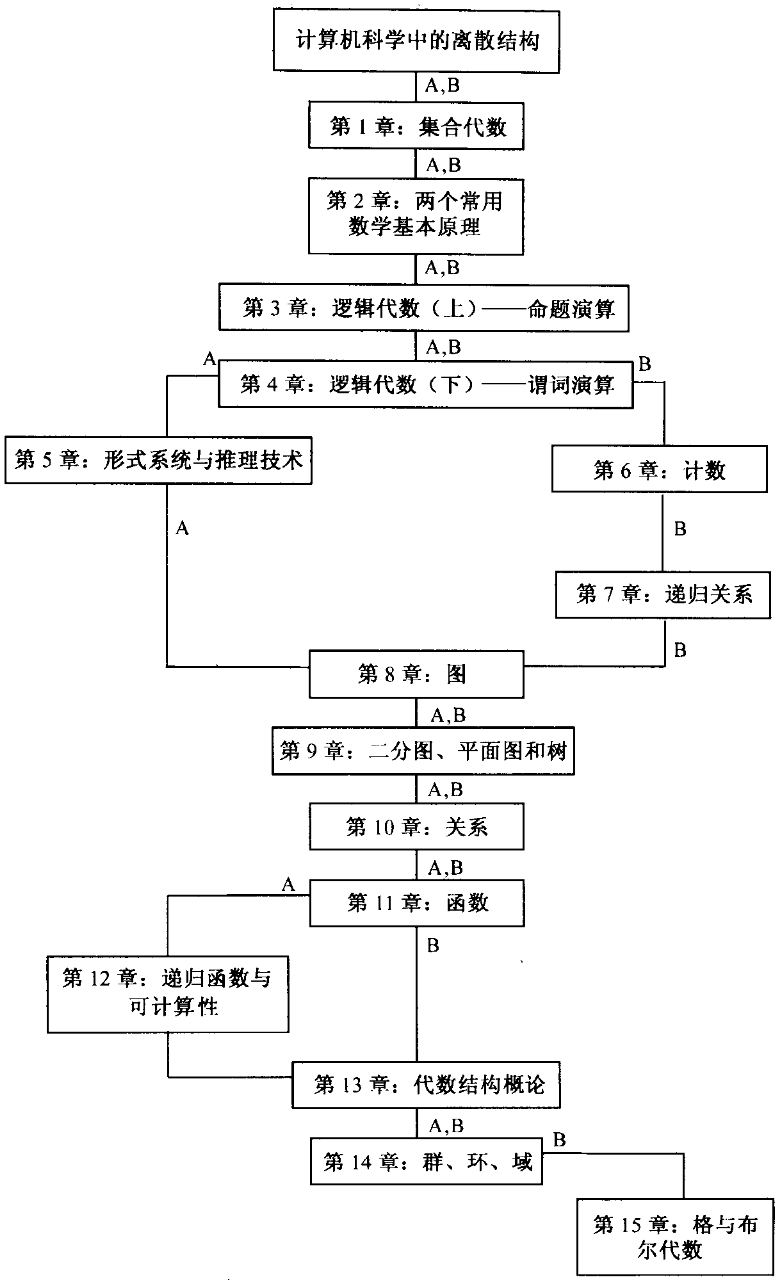
3. 离散结构的一般关系模型及函数模型（第10、11两章）。

4. 离散结构的抽象代数模型（第13、14、15三章）。

不难看出《计算机科学中的离散结构》完全覆盖了经典的“离散结构”或“离散数学”课程的主要内容，是一本适用于高等院校计算机科学与技术专业本科生、专科生，以及计算机软件学院本科生的“离散数学”课程的、充满改革气息的全新教材。

众所周知“离散数学”课程是计算机科学与技术专业的核心基础课程，IEEE&ACM的CC2001教程以及CCC2002（中国计算机科学与技术学科教程）更是以十分显著的方式强调了这一点。《计算机科学中的离散结构》的内容正是按照国家教委离散数学教学大纲，参考CC2001教程和CCC2002教程的教改要求进行选材和编排的。

由于离散数学课程所涉及的概念、方法和理论，大量地应用在计算机科学与技术专业的专业基础和专业课程中；它所提供的训练，十分有益于学生抽象概括能力、逻辑思维能力、归纳构造能力的提高，十分有益于学生严谨、规范、理论联系实际的科学态度的培养。因此，为加强计算机科学与技术的基础理论教学，适度拓宽离散数学课程的教学内容是可取的。在这一点上，《计算机科学中的离散结构》是一本很值得读者选择的教材，因其具有内容系统全面、阐述浅显易懂、编排合理新颖、使用灵活方便的特点。不准备讲授全部内容的教师，还可以根据本校的具体情况，按照以下两个思路来筛选素材（参见下图）：




一、希望注重计算机科学理论基础知识教学的，可选用 A 线路，即选择第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 4 章、第 5 章、第 8 章、第 9 章、第 10 章、第 11 章、第 12 章、第 13 章、第 14 章依次讲授。

二、希望强调计算机应用技术基础知识教学的，可选用 B 线路，即选择第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 4 章、第 6 章、第 7 章、第 8 章、第 9 章、第 10 章、第 11 章、第 13 章、第 14 章、第 15 章依次讲授。

《计算机科学中的离散结构》包含了大约可在 120 个学时内讲授的内容；如果选用 A

线路或选用 B 线路实施教学，那么可以在 80～100 学时内完成教学计划。如果全部或部分删除标记*的内容，那么完成教学计划的时数可控制在 60～70 学时。全书每一节的末尾编排了丰富的习题，难度也有一定的层次。

由于作者水平所限，书中疏漏、错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

作　者

# 目　录


编者的话

前言

第 1 章　集合代数 …… 1

1.1　集合的概念与表示 …… 1

1.1.1　集合及其元素 …… 1

1.1.2　集合的表示 …… 2

1.1.3　外延性公理与子集合 …… 3

1.2　集合运算 …… 4

1.2.1　并、交、差、补运算 …… 4

1.2.2　幂集运算和广义并、交运算 …… 7

1.2.3　集合的笛卡儿积 …… 9

1.3　集合的归纳定义 …… 11

1.3.1　集合归纳定义的意义 …… 11

*1.3.2　集合定义的自然数 …… 13

1.4　练习 …… 14

第 2 章　两个常用数学基本原理 …… 17

2.1　归纳原理 …… 17

2.1.1　结构归纳原理 …… 17

2.1.2　数学归纳原理 …… 18

2.2　鸽笼原理 …… 21

2.2.1　鸽笼原理的基本形式 …… 22

*2.2.2　鸽笼原理的加强形式 …… 24

2.3　练习 …… 25

第 3 章　逻辑代数（上）——命题演算 …… 27

3.1　命题与逻辑联结词 …… 27

3.1.1　命题 …… 27

3.1.2　逻辑联结词 …… 29

3.1.3　命题公式 …… 31

3.1.4　语句的形式化 …… 32

3.2　逻辑等价式和逻辑蕴涵式 …… 34

3.2.1　重言式 …… 34

3.2.2　重要的逻辑等价式和逻辑蕴涵式 …… 34

*3.2.3　对偶原理 …… 37

3.3　范式 …… 38

3.3.1　析取范式和合取范式 …… 39

3.3.2　主析取范式与主合取范式 …… 40

*3.3.3 联结词的扩充与归约 ······42
3.4 练习 ······44
**第 4 章 逻辑代数（下）——谓词演算** ······48
4.1 谓词演算基本概念 ······48
4.1.1 个体与个体域 ······48
4.1.2 谓词与谓词填式 ······49
4.1.3 量词及其辖域 ······50
4.1.4 谓词公式及语句的形式化 ······51
4.2 谓词演算永真式 ······54
4.2.1 谓词公式的真值规定 ······54
4.2.2 重要的谓词演算永真式 ······55
4.2.3 关于永真式的几个基本原理 ······57
* 4.3 谓词公式的前束范式 ······59
4.4 练习 ······60
***第 5 章 形式系统与推理技术** ······63
5.1 谓词演算形式系统 FC ······63
5.1.1 FC 的基本构成 ······63
5.1.2 系统内的推理：证明与演绎 ······64
5.1.3 FC 的重要性质 ······65
5.2 自然推理形式系统 ND ······69
5.2.1 ND 的基本构成 ······70
5.2.2 ND 的系统内推理及性质 ······72
5.3 练习 ······79
**第 6 章 计数** ······82
6.1 计数基本原理 ······82
6.1.1 加法原理和乘法原理 ······82
6.1.2 包含排斥原理 ······83
6.2 排列与组合 ······85
6.2.1 排列的计数 ······85
6.2.2 组合的计数 ······86
6.3 重集的排列与组合 ······88
6.3.1 重集的排列 ······88
6.3.2 重集的组合 ······90
6.3.3 禁位排列的计数 ······92
6.4 练习 ······94
**第 7 章 递归关系** ······96
7.1 一个重要的递归关系 ······96
7.2 递归关系的求解 ······98
7.2.1 递归关系的迭代求解 ······98

7.2.2 常系数线性齐次递归关系的求解 …… 100
*7.2.3 一些特殊递归关系的求解 …… 103
7.3 练习 …… 106
第 8 章 图 …… 108
8.1 图的基础知识 …… 109
8.1.1 图的基本概念 …… 109
8.1.2 结点的度 …… 110
8.1.3 子图、补图及图同构 …… 111
8.2 路径、回路及连通性 …… 112
8.2.1 路径与回路 …… 112
8.2.2 连通性 …… 114
* 8.2.3 连通度 …… 116
8.3 欧拉图与哈密顿图 …… 117
8.3.1 欧拉图及欧拉路径 …… 117
8.3.2 哈密顿图及哈密顿通路 …… 118
8.4 图的矩阵表示 …… 122
8.4.1 邻接矩阵 …… 122
8.4.2 路径矩阵与可达性矩阵 …… 124
8.5 练习 …… 125
第 9 章 二分图、平面图和树 …… 130
9.1 二分图 …… 130
9.1.1 二分图的基本概念 …… 130
9.1.2 匹配 …… 131
9.2 平面图 …… 134
9.2.1 平面图的基本概念 …… 134
9.2.2 欧拉公式和库拉托夫斯基定理 …… 136
*9.2.3 着色问题 …… 140
9.3 树 …… 142
9.3.1 树的基本概念 …… 142
9.3.2 生成树 …… 144
9.3.3 根树 …… 147
9.4 练习 …… 153
第 10 章 关系 …… 156
10.1 二元关系 …… 156
10.1.1 关系的基本概念 …… 156
10.1.2 关系的基本运算 …… 159
10.1.3 关系的基本特性 …… 164
10.1.4 关系特性闭包 …… 166
10.2 等价关系 …… 169

10.2.1 等价关系与等价类 …… 169
10.2.2 等价关系与划分 …… 170
10.3 序关系 …… 174
10.3.1 序关系和有序集 …… 175
* 10.3.2 良基性与良序集，完备序集 …… 178
*10.3.3 全序集、良序集的构造 …… 180
10.4 练习 …… 181
**第 11 章 函数** …… 188
11.1 函数及函数的合成 …… 188
11.1.1 函数的基本概念 …… 188
*11.1.2 函数概念的拓广 …… 190
11.1.3 函数的合成 …… 192
11.1.4 函数的递归定义 …… 193
11.2 特殊函数类 …… 195
11.2.1 单射的、满射的和双射的函数 …… 195
* 11.2.2 规范映射、单调映射和连续映射 …… 197
11.3 函数的逆 …… 198
*11.4 有限集和无限集 …… 201
11.4.1 有限集、可数集与不可数集 …… 202
11.4.2 无限集的特性 …… 205
11.4.3 有限集和无限集的基数 …… 206
11.4.4 基数比较 …… 207
11.5 练习 …… 209
**第 12 章 递归函数集与可计算性** …… 214
12.1 初等函数集 …… 214
12.1.1 初等函数 …… 214
12.1.2 初等谓词 …… 217
12.2 原始递归函数集 …… 220
12.2.1 初等函数集的不足 …… 220
12.2.2 原始递归式 …… 222
12.2.3 原始递归函数 …… 223
12.3 递归函数集 …… 225
12.3.1 阿克曼函数及其性质 …… 225
12.3.2 $\mu$-递归式 …… 227
12.3.3 递归函数集（$\mu$-递归函数集） …… 227
*12.4 图灵机与可计算函数集 …… 228
12.4.1 图灵机 …… 228
12.4.2 图灵可计算函数 …… 232
12.5 习题 …… 235

第 13 章 代数结构概论 …… 238
13.1 代数结构 …… 238
13.1.1 代数结构的意义 …… 238
13.1.2 代数结构的特殊元素 …… 239
13.1.3 子代数结构 …… 242
13.2 同态、同构及同余 …… 243
13.2.1 同态与同构 …… 243
13.2.2 同余关系 …… 246
*13.3 商代数 …… 248
13.4 练习 …… 250
第 14 章 群、环、域 …… 254
14.1 半群 …… 254
14.1.1 半群及独异点 …… 254
*14.1.2 自由独异点 …… 255
*14.1.3 高斯半群 …… 256
14.2 群 …… 258
14.2.1 群及其基本性质 …… 258
14.2.2 子群、陪集和拉格朗日定理 …… 261
*14.2.3 正规子群、商群和同态基本定理 …… 263
14.3 循环群和置换群 …… 265
14.3.1 循环群 …… 265
*14.3.2 置换群 …… 266
14.4 环 …… 269
14.4.1 环和整环 …… 269
*14.4.2 子环和理想 …… 271
*14.5 域和有限域 …… 273
14.6 练习 …… 277
第 15 章 格与布尔代数 …… 281
15.1 格 …… 281
15.1.1 格——有序集 …… 281
15.1.2 格代数 …… 284
15.1.3 分配格和模格 …… 287
15.2 布尔代数 …… 290
15.2.1 有界格和有补格 …… 290
15.2.2 布尔代数的意义 …… 292
*15.2.3 布尔代数表示定理 …… 294
*15.2.4 布尔表达式与布尔函数 …… 297
15.3 练习 …… 300
参考文献 …… 302

# 第1章 集合代数

集合理论是一门研究数学基础的学科，它试图从一个比“数”更简单的概念——集合（sets）出发，定义数及其运算，进而发展到整个数学。集合理论产生于 16 世纪末。当时，只是由于微积分学的需要，人们仅对数集进行了研究。19 世纪末，即 1876～1883 年间，康托尔（Georg Cantor 1845～1918 年，德国数学家）对任意元素的集合进行了系统的研究。康托尔被公认为集合理论的创始人。

人们称康托尔开创的集合理论为朴素集合论，因为他没有对集合论作完全公理化的描述，从而导致了理论的不一致（产生了悖论）。为弥补朴素集合理论的不足，本世纪初出现了各种公理化集合论体系，为数学奠定了一个良好的基础。更有意义的是，从此集合基本概念不断深入人心，被广泛地应用于数学理论和其他学科的基础研究和实际应用中，集合论的原理和方法成为名副其实的数学基本技术。基于本书的教学目的，本章主要讨论集合基本概念和集合运算，它与第 2 章一起，被视为全书学习所必备的最基本的数学知识和工具，在以后讨论的内容中将不断地运用它们。本章将不涉及公理化集合论体系。

事实上，集合不仅可用来表示数及其运算，更可以用于非数值信息及离散结构的表示和处理。像数据的删节、插入、排序，数据间关系的描述，数据的组织和查询都很难用传统的数值计算来处理，但可以用集合运算来实现。集合论被广泛应用在计算机科学中，如数据结构、操作系统、数据库、知识库、编译原理、形式语言、程序设计、人工智能、信息检索、计算机辅助设计等，这也是本章学习集合理论基础知识的目的。

## 1.1 集合的概念与表示

### 1.1.1 集合及其元素

在中学的数学课程中,大家对集合及其元素的意义已经有所了解，下面我们做些简要的回顾。

**集合**是由确定的、互相区别的、并作整体识别的一些对象组成的总体。

严格地说这不是集合的定义，因为“总体”只是“集合”一词的同义反复。实际上，在集合论中，集合是一个不作定义的原始概念（就像几何学中的点、线、面等概念）。不过，上述关于集合概念的描述，有益于对它的内涵和外延作直观的理解和认识。

**【例 1-1】**

（1）“北洋大学全体学生”为一集合，组成这一集合的对象是北洋大学的学生。

（2）“全体正整数”为一集合，其组成对象是正整数。

（3）“本书中所有汉字”的集合，其组成对象是本书的汉字。

（4）“获 1988 年诺贝尔文学奖的作家”构成一个集合，尽管它只有一个对象——埃及作家纳吉布•马夫兹。“获 2002 年诺贝尔生理学或医学奖的科学家”构成一个集合，它包括英

国科学家悉尼·布雷内，美国科学家罗伯特•霍维茨，英国科学家约翰·苏尔斯顿三名成员。

（5）“解放军理工大学所有学员队”的集合，其组成对象是学员队，而不是学员，因为集合中的对象是整体识别的，尽管学员队又是学员的集合。

（6）“好书的全体”不构成集合，因为难以对每一本书的好坏作出确定的判断。

（7）“方程 $x(x^2-2x+1)=0$ 的所有根”组成一个集合，它只有一个对象 0 和一个（而不是两个）对象 1，因为集合中对象是相互区别的。

（8）“方程 $x^2+x+1=0$ 的根”组成一个集合。当在复数域上讨论时，它由两个对象组成；而当在实数域上讨论时，它不含有任何对象，是一个特定集合。

组成集合的对象称为集合的**成员**或**元素**（members）

请注意，这里“对象”的概念是相当普遍的，可以是任何具体的或抽象的客体，也可以还是集合，因为人们有时以集合为其讨论的对象，而又需涉及它们的一个总体——以集合为其元素的集合。例如，例 1-1（5）中的集合，以学员队集体为其元素；又如集合$\{1, \{1, 2\}, \{1\}, 2\}$，数 1，2 是它的成员，集合$\{1\}$和$\{1, 2\}$也是它的成员。因此，尽管集合与其成员是两个截然不同的概念，但一个集合完全可以成为另一个集合的元素。因此必须注意，$a$ 不同于$\{a\}$，前者为一对象 $a$，后者为仅含该对象 $a$ 的单元素集合；同样，$\{a\}\neq\{\{a\}\}$，$\{\{a\}\}$是仅含$\{a\}$的单元素集。

通常用大写拉丁字母 $A$，$B$，$C$ 等表示集合，用小写字母 $a$，$b$，$c$ 等表示集合的元素。但是，由上可知，这种表示形式不是绝对的。$a$ 作为 $A$ 的元素时，并不排斥 $a$ 作为集合的可能性。同样，集合 $A$ 也可能是别的集合的元素。

元素对于集合的隶属关系是集合理论的另一基本概念。当对象 $a$ 是集合 $A$ 的成员时，称 $a$ **属于** $A$，记为

$$a\in A$$

当对象 $a$ 不是集合 $A$ 的成员时，称 $a$ 不属于 $A$，记为

$$a\notin A$$

对任何对象 $a$ 和任何集合 $A$，或者 $a\in A$ 或者 $a\notin A$，两者必居其一。这正是集合论对其元素的“确定性”要求。

### 1.1.2 集合的表示

集合的表示方式主要有以下三种：

（1）列举法：表示一个集合 $A$ 时，将 $A$ 中元素一一列举，或列出足够多的元素以反映 $A$ 中成员的特征，其表示形式如

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \text{ 或 } A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

（2）描述法：表示一个集合 $A$ 时，将 $A$ 中元素的特征用一个性质来描述，其表示形式如

$$A=\{x \mid P(x)\} \text{ 或 } A=\{x: P(x)\}$$

其中 $P(x)$表示“$x$ 满足性质 $P$”或“$x$ 具有性质 $P$”。$A=\{x \mid P(x)\}$ 或 $A=\{x: P(x)\}$ 的意义是：集合 $A$ 由且仅由满足性质 $P$ 的那些对象所组成，也就是说 $a\in A$ 当且仅当 $a$ 满足性质 $P$（或 $P(a)$真）。

例 1-1 中的集合都是采用这种方式表示的。

（3）归纳法：将在 1.3 节中详细介绍。

**【例 1-2】** 以下是常常要用到的一些集合以及它们的表示。

（1）$\{0, 1\}=\{x \mid x=0$ 或 $x=1\}$

（2）自然数集合 $N=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}=\{x \mid x$ 是自然数$\}$

正整数集合 $I^+=\{1, 2, 3, \cdots\}=\{x \mid x$ 是正整数$\}$

（注意，这里我们所说的自然数集合与中学课本定义的自然数集合略有不同，它使自然数集合有别于正整数集合，自然数集合包括数 0，这是计算机科学的一个通常做法。）

（3）整数集合 $I=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\} = \{x \mid x$ 是正整数，或零，或负整数$\}$

（4）偶整数集合 $E=\{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}=\{x \mid x$ 是偶数$\}$

$= \{x \mid x\in I$ 且 $2 \mid x\}$ （$2 \mid x$ 表示 2 整除 $x$）

（5）前 $n$ 个自然数的集合 $N_n=\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$

$=\{ x \mid x\in N$ 且 $0\leqslant x<n\}$

（6）前 $n$ 个自然数集合的集合 $= \{\{0\},\{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \cdots\}$

$= \{x \mid x=N_n$ 且 $n\in I^+\}$

$= \{ N_n \mid n\in I^+\}$

**定义 1-1** 没有任何元素的特定集合称为**空集**，记为$\varnothing$，即$\varnothing=\{\}=\{x \mid P(x)$恒假$\}$；由全体对象组成的集合称为**全集**，记为 $U$，即 $U = \{x \mid P(x)$恒真$\}$。

**定义 1-2** 空集和只含有有限多个元素的集合称为**有限集**（finite sets），否则称为**无限集**（infinite sets）。有限集合中成员的个数称为集合的**基数**（cardinatity）（无限集合的基数概念将在以后严格定义）。集合 $A$ 的基数表示为$|A|$。

**【例 1-3】** 例 1-2 中（1）、（5）是有限集，其他为无限集。$|\{0, 1\}|=2$，$|\varnothing|=0$，$|\{\varnothing\}|=1$。故$\varnothing$不同于$\{\varnothing\}$，前者是没有任何元素的集合，后者是恰含一个元素——空集的单元素集。

有些常用的集合通常用特定字母符号来表示。如：$N$ 表示所有自然数组成的集合，$I$（或 $Z$）表示所有整数组成的集合，$Q$ 表示所有有理数组成的集合，$R$ 表示所有实数组成的集合，$C$ 表示所有复数组成的集合，$Q+$ 表示所有正有理数组成的集合，$R-$ 表示所有负实数组成的集合，$N_n$ 表示前 $n$ 个自然数的集合。

### 1.1.3 外延性公理与子集合

外延性公理是用于规定集合相等意义的重要约定。

**外延性公理**（extensionality axiom）：集合 $A$ 和集合 $B$ 相等，当且仅当它们具有相同的元素。也就是说，集合 $A$，$B$ 满足 $A=B$，当且仅当对任意元素 $x$，$x$ 属于 $A$ 蕴涵 $x$ 属于 $B$；反之，$x$ 属于 $B$ 蕴涵 $x$ 也属于 $A$。

**【例 1-4】** 根据外延性公理有

$\{0, 1\}=\{1, 0\}=\{x \mid x(x^2-2x+1)=0\}=\{x \mid x=1$ 或 $x=0\}$

因此，外延性公理事实上也确认了集合成员的“相异性”、“无序性”，及集合表示形式的多样性。

**定义 1-3** 集合 $A$ 称为集合 $B$ 的**子集合**（或子集，subsets），如果 $A$ 的每一个元素都是 $B$ 的元素，即，若元素 $x$ 属于 $A$，那么 $x$ 属于 $B$。