双重孔隙介质油层研究的控制论方法

齐与峰　　章　欣

（石油勘探开发科学研究院）

摘　要

文中找到一种发展数学模型和辨识裂缝性油层性质的方法，使用特征值分析及多变量最小平方配比法，在有界封闭地层任意工作条件下得到了描述压力场在非均质地层中变化规律的实用而明晰的公式，在三维空间中，基于这些公式可辨识一些重要的油层特性，如分断块的孔隙体积，井间的压力传导能力，断层位置等，或用常规观察数据或用试井资料，对其可辨识条件及解的存在及唯一性可得到证明。

引　言

油层参数辨识本身实际上并非一个新问题，为此，工程师们曾长年应用数学模型解释试井资料——压力恢复曲线和井间干扰试验，前者用于确定井周围特性，后者辨识井间情况。然而油层更详细的描述需要复杂的公式及辨识方法，特别是当人们欲获得井外知识时，就显得特别重要。这里我们打算发展和应用数学模型，详细描述非均质地层中压力传导规律并在各种复杂工作条件下提供应用。

文[1]提示了一种用于建立二维条件下的计算公式的方法，并建立了一种辨识井间参数的有效方法。文[2]对该法的可辨识条件进行了讨论。本文是以往工作在天然裂缝性油藏和三维空间中的推广。

将熟知的偏微分方程组对空间离散化改写成一套常微分方程组，按先排完岩块中未知量再排裂缝中未知量的方法得到比10对角矩阵还要复杂的系数矩阵 A，因为油来自岩块及裂缝的量是未知的，虽然矩阵 A 结构很复杂，但它有两个重要性质：(1) 矩阵 A 任一行其元素之和为零；(2) 矩阵 A 非对称，但它与实对称矩阵相似。基于这些性质可证明一个定理和三个推论：“若矩阵 A 满足上述两个性质，则它的所有特征值是非正实数，并互不重复”。推论：(1) 矩阵 A 的指数函数元素可表示为 $e^{\lambda_k t}$ 的线性（λ_k—第 k 个特征根）形式；(2) 头一个特征值为零，相应线性形中的系数与油藏总孔隙体积倒数成正比；(3) 若节点 i 和 j 不位于同一水力学系统，则相应矩阵 A 指数函数的元素为零。

遵循这些结论可导出常微分方程组的分析解，因此可得到原偏微分方程组的近似解。若只想确定井底压力时，所导出的公式与单重介质公式相似，因为此时基岩和裂缝中压力相等。

用观测数据和输出量构成二次平方泛函指标，经极小化之后得到许多有用特性，如井间流动系数几何平均值等。

描述微分方程式

双重孔隙介质中流体渗流运动描述方程大家都很熟悉,

$$\nabla\cdot(a_1\nabla P_1)+\tau(P_2-P_1)=b^1\frac{\partial P_1}{\partial t}+Q_i^1\delta(x-x_i)$$

$$\nabla\cdot(a_2\nabla P_2)+\tau(P_1-P_2)=b^2\frac{\partial P_2}{\partial t}+Q_i^2\delta(x-x_i) \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial P_1}{\partial \bar{n}}\right|_\Gamma=\left.\frac{\partial P_2}{\partial \bar{n}}\right|_\Gamma=0;\quad P_1(0)=P_2(0)=C,$$

但它的求解及应用却很困难，一些学者曾经研究利用控制论辨识其中分布参数的方法，虽做了许多有益的工作，但在实用中都是失败的，因为缺乏对其唯一性定解条件的了解。相反，另一些工作，在均质地层及简单条件下求解(1) 式利用简单模型解释试井和干扰测试资料，然而试井方法只能了解井周围情况。至于干扰试井，或因过于昂贵，或因模型过于简单，或者难于大规模推广或者未发挥它应有的作用而降低了它的实用价值。我们的工作则介于两者之间，先在非均质条件下求解方程组 (1)， 然后或用于解释试井资料或用于处理日常生产数据达到研究井间油层性质的目的。

先把原方程对空间离散化，按先基质后裂缝中未知量标准办法安排次序，于是得一常微分方程组。

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{P}^1 \\ \dot{P}^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 & \tau \\ \tau & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

设 N 为节点总数; P^1, P^2 分别为基质和裂缝中节点压力向量; $\dot{P}^1$ 及 $\dot{P}^2$ 是它们对时间的导数; $A_1\,A_2\in R^N\times{}^N$是由基质和裂缝岩性组成的参数矩阵; τ 为窜流系数子块; 子块 $B_1=diag(b_1^1, b_2^1, \cdots, b_N^1)$, $B_2=diag(b_1^2, b_2^2, \cdots, b_N^2)$; $C=diag\,(C_1, C_2)$, $C_1=diag(C_I^1)$, $C_2=diag(C_I^2)$。常向量 $C_I^1=\left(-\dfrac{1}{\Delta V}\right)$, 当 $I=I_{li}$ 时; 向量 $C_I^2=\left(-\dfrac{1}{\Delta V}\right)$, 当 $I=N+I_{li}$ 时; 否则 C_I^1, C_I^2 为零。定义编号 $I=i_1+(j_1-1)M_y+(k_1-1)M_{xy}$ 这里 i_1, j_1, k_1 为节点坐标编号, I 为节点序号 M_y 是 y 轴方向节点总数; M_{xy} 是 xy 平面节点总数, I_{li} 指 l 井之第 i 个射孔节点编号; $l=1, 2, \cdots L$ 为井号, L 是总井数; $i=1, 2, \cdots m_l$, m_l 是 l 井中最大射孔个数; $\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$ 是节点体积, 定义 q^1, q^2 分别是基质及裂缝中出油节点组成的节点产量向量，未射孔时为零。

但 (2) 式中 q^1, q^2 向量均是未知的，因为来自基岩还是裂缝的流量是未知的，但是全井产量已知同一井内基质及裂缝中的压力相同，满足约束条件

$$P_{lj}^1=P_{lj}^2=P_{wl} \tag{3}$$

此处 P_{wl} 是 l 井的流动压力，定义 $\omega=\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\dfrac{0.208\sqrt{\Delta x\Delta y}}{R_w}$ 于是得节点产量

$$q_{li}^1=K_{li}^1\Delta z_i(P_{li}^1-\bar{P}_l)/\omega+K_{li}^1\Delta z_iQ_l/K_lH_l$$

$$q_{li}^2=K_{li}^2\Delta z_i(P_{li}^2-\bar{P}_l)/\omega+K_{li}^2\Delta z_iQ_l/K_lH_l$$

K^1_{li},K^2_{li}分别为l井基质及裂缝之渗透率在i点的值；$\bar{P}_l=\sum_{i=1}^{m_l}(K^1_{li}P^1_{li}+K^2_{li}P^2_{li})\Delta z_i/K_lH_l$

$K_lH_l=\sum_{i=1}^{m_l}(K^1_{li}+K^2_{li})\Delta z_i$ 记为向量形式

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q \\ Q \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$D_k=diag(f^k_I)\in R^{N\times N}$, $k=1,2$, $f^k_I=-K^k_{li}\Delta z_i/\Delta VK_lH_l$ 当 $I=I_{li}$ 时成立，否则 $f^k_I=0$，列向量 Q 其元素 Q_I 或为零（当 $I\neq I_{li}$ 时）或 $Q_I=Q_l$，即等于 l 井的全井产量，矩阵

$$G_{11}=(g^1_{I,J});\quad G_{12}=(g^2_{I,J})\in R^{N\times N},$$

$$G_{21}=(\phi^1_{I,J});\quad G_{22}=(\phi^2_{I,J})\in R^{N\times N}.$$

$I,J=1,2,\cdots N$，关于矩阵 G 的非零元素，

$$g^1_{Ili,Ili}=-K^1_{li}\Delta z_i\left(1-\frac{K^1_{li}\Delta z_i}{K_lH_l}\right)\Big/\omega\Delta V;$$

$g^1_{Ili,Ilj}=K^1_{li}\Delta z_iK^1_{lj}\Delta z_j/\omega\Delta VK_lH_l$; $g^2_{Ili,Ilj}=K^1_{li}\Delta z_iK^2_{lj}\Delta z_j/\omega\Delta VK_lH_l$

$$\phi^2_{Ili,Ili}=-K^2_{li}\Delta z_i\left(1-\frac{K^2_{li}\Delta z_i}{K_lH_l}\right);$$

$\phi^1_{Ili,Ilj}=K^2_{li}\Delta z_iK^1_{lj}\Delta z_j/\omega\Delta VK_lH_l$; $\phi^2_{Ili,Ilj}=K^2_{li}\Delta z_iK^2_{lj}\Delta z_j/\omega\Delta VK_lH$

$$(i,\ j=1,2,\cdots,m_l)$$

这里要强调 $g^1_{Ili,Ilj}$ 及 $\phi^2_{Ili,Ilj}$ 中 i 不等于 j，因为主对角上元素另行计算。

分析矩阵 G 的元素得知它是一个实对称阵并且其中任一行元素之和均为零。

$$\sum_{J=1}^{2N}G_{I,J}=0,\quad (\text{对 } I \text{ 中任一值成立}) \tag{5}$$

将(4)式代入(2)式，得

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{P}^1 \\ \dot{P}^2 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q \\ Q \end{bmatrix} \tag{6}$$

这里 A 是对称矩阵定义为

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & \tau \\ \tau & A_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \tag{7}$$

另外，合并 B_1 及 B_2 为 $B=diag(b^1_1,b^1_2,\cdots,b^1_N,b^2_1,\cdots,b^2_N)$ 于是（6）式化简为

$$\begin{bmatrix} \dot{P}^1 \\ \dot{P}^2 \end{bmatrix}=\bar{A}\begin{bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{bmatrix}+B^{-1}D\begin{bmatrix} Q \\ Q \end{bmatrix} \tag{8}$$

此时 $\bar{A}$ 是不对称的，$\bar{A}=B^{-1}A$，加入初值条件

$$P^1(0)=P^2(0)=Ce \tag{9}$$

（$e\in R^N$ 单位列向量，C 为一常数）后，则（8）式是可以求解的。这是双重介质中渗流运

动另一描述形式，它的求解将在下面讨论。

求解问题

方程（8）中系数矩阵 $\bar{A}\in R^{2N\times 2N}$ 不再是规则的对称10对角阵，但由矩阵 G 的性质及文[1]中讨论的结果我们可以断定矩阵 $\bar{A}$ 有如下的性质：（1）矩阵 $\bar{A}$ 中任一行元素之和为零（因而 $\bar{A}$ 不是满秩阵）；（2）矩阵 $\bar{A}$ 与实对称矩阵 A 相似；（3）矩阵 $\bar{A}$ 的秩为 $2N-1$。

文[1]中曾证明过，对满足上述三条性质的矩阵，以下定理和推论成立。

定理：满足性质(1)～(3)的矩阵其特征值为互不相等的非正实数，其中只有一个为零。

推论一：满足性质(1)～(3)的矩阵其指数函数阵，$e^{\bar{A}t}=(e^{\bar{A}t}_{I,J})\in R^{2N\times 2N}$，$I,J=1,2,\cdots 2N$，它的元素可表为

$$e^{\bar{A}t}_{I,J}=\sum_{K=1}^{2N}S_{IK}S_{JK}e^{\lambda_K t}\frac{k_J}{k_I}.\quad\left(k_I=\sqrt{\frac{b_I}{b_{2N}}}\right)\tag{10}$$

这里 S_{IK} 为正交矩阵的元素，$\lambda_K(K=1,2,\cdots 2N)$ 是矩阵 $\bar{A}$ 的特征值[1]。

推论二：若矩阵 $\bar{A}$ 满足性质(1)～(3)，则其矩阵 $\bar{A}$ 指数函数阵 $e^{\bar{A}t}$，任一行元素之和恒于1。

$$\sum_{J=1}^{2N}e^{\bar{A}t}_{I,J}\equiv 1,\quad (I=1,2,\cdots,2N)\tag{11}$$

推论三：设 $\lambda_1=0$，则（10）式中头一项系数

$$S_{I1}=(b_I\varDelta V/V)^{\frac{1}{2}}\tag{12}$$

$V=\sum_{I=1}^{2N}b_I\varDelta V$，故 V 为全油田弹性容量系数，包括基岩、裂缝，视情况也包括水域。将(12)代入(10)式后

$$e^{\bar{A}t}_{I,J}=\frac{b_J\varDelta V}{V}+\sum_{K=2}^{2N}S_{IK}S_{JK}e^{\lambda_K t}\frac{k_J}{k_I}\tag{13}$$

这是个重要的基本解，名为压力转移函数，即 J 处单位压力异常转移到 I 处经过 t 时刻剩余量。该式在形式上与文[1]中同类公式相近，但其实质则大不相同。这里含有裂缝与岩块间压力互相影响的复杂过程，详情另行讨论。

一个油田经常拥有许多井，各井的工作制度互不相同，下面先从简单情况讨论起，待澄清概念后，再进入复杂情况。

控制理论中对（8）式已给出了通解式，若自 t_0 时刻起算

$$\begin{bmatrix}P^1\\P^2\end{bmatrix}=e^{\bar{A}(t-t_0)}\begin{bmatrix}P^1(t_0)\\P^2(t_0)\end{bmatrix}+\int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)}B^{-1}D\begin{bmatrix}Q(\tau)\\Q(\tau)\end{bmatrix}d\tau\tag{14}$$

$P^1(t_0)$ 及 $P^2(t_0)$ 向量均指 t_0 时刻基质及裂缝中压力场。但当自初始时刻起算时，因为初始压力相同，这时，利用式(11)可得

$$\begin{bmatrix} \dot{P}^1 \\ P^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{P}^1(0) \\ P^2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \cdot B^{-1} D \begin{bmatrix} \dot{Q}(\tau) \\ Q(\tau) \end{bmatrix} d\tau \tag{15}$$

当产量向量恒定时，积分后得

$$\begin{bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^1(0) \\ P^2(0) \end{bmatrix} + W\ B^{-1} D \begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} \tag{16}$$

矩阵

$$W = \left(\frac{w_{I,J} t}{V} b_J\ \Delta V - \sum_{K=2}^{2N} S_{IK} S_{JK} (1 - e^{\lambda_k t}) \frac{\sqrt{b_J}}{\lambda_K \sqrt{b_I}} \right)$$

$\omega_{I,J} = 1$（不论 I, $J = 1, 2, \cdots, 2N$ 中的任何值）；$W \in R^{2N \times 2N}$ 是解矩阵。显然，当时间 t 足够长时，

$$W = \left(\omega_{I,J} \frac{b_J \Delta V}{V} t - \sum_{K=2}^{2N} S_{IK} S_{JK} \frac{\sqrt{b_J}}{\lambda_K \sqrt{b_I}} \right)$$

这是拟稳态结果。这就是说当产量恒定时，尽管对于非均质地层也仍存在拟稳态阶段，此时油田各处压力下降速度相同。

各井产量随时间变化时，引入新的矩阵函数

$$G(t-\tau) = \int e^{\bar{A}(t-\tau)} d(t-\tau) \tag{17}$$

由绝对收敛级数

$$e^{\bar{A}(t-\tau)} = E + \bar{A}(t-\tau) + \frac{\bar{A}^2 (t-\tau)^2}{2!} + \cdots + \frac{\bar{A}^K (t-\tau)^K}{K!} + \cdots$$

的逐项积分得

$$G(t-\tau) = (t-\tau)E + \bar{A}\frac{(t-\tau)^2}{2!} + \cdots + \bar{A}^K \frac{(t-\tau)^{K+1}}{(K+1)!} + \cdots$$

于是，当 $t = \tau$ 时 $G(0) = 0$。

由矩阵的积分和微分的定义，可以导出以下的分部积分式：

$$\int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} B^{-1} D \begin{bmatrix} Q(\tau) \\ Q(\tau) \end{bmatrix} d\tau = G(t)\ B^{-1} D \begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} + \int_0^t G(t-\tau) B^{-1} D \begin{bmatrix} \dot{Q}(\tau) \\ \dot{Q}(\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

成立，于是得

$$\begin{bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^1(0) \\ P^2(0) \end{bmatrix} + W\ B^{-1} D \begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} + \int_0^t W(t-\tau)\ B^{-1} D \begin{bmatrix} \dot{Q}(\tau) \\ \dot{Q}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \tag{18}$$

(18)式是变系数抛物型偏微分方程组在最广泛条件下的近似解，给出了圆满的结果。

在研究系统辨识问题时，井点的压力是可以测量的，设测量值向量 $y_0(t) = (y_{01}(t), y_{02}(t), \cdots, y_{0l}(t))^T$ $y_{0l}(t)$ 等分别表示 l 井在 t 时刻测量的流动压力，相应，计算流动压力向量为 $y(t)$。为获得计算流动压力，先引入一个降维矩阵 $H = (H^1, H^2) \in R^{L \times 2N}$。

$$H^1_{l,J} = \begin{cases} 0 & (J \neq J_{li} \text{ 时}) \\ K^1_{lj} \Delta z_j / K_l H_l \end{cases}, \quad H^2_{l,J} = \begin{cases} 0 & (J \neq N + J_{lj} \text{ 时}) \\ K^2_{lj} \Delta z_j / K_l H_l \end{cases}$$

用 H 左乘(18)式并利用定义

$$\bar{P}_l = \sum_{i=1}^{m_l} (P^1_{li} K^1_{li} + P^2_{li} K^2_{li}) \Delta z_i / K_l H_l$$

$$\bar{S}_{l,K} = \sum_{i=1}^{m_l} \frac{\Delta z_i}{K_l H_l} \left[\frac{S_{Ili,K}}{\sqrt{b_{Ili} \Delta V}} K^1_{li} + \frac{S_{N+Ili,K}}{\sqrt{b_{N+Ili} \Delta V}} \right]$$

得流动压力向量为，

$$y(t) = \bar{P}(t) - \bar{W}\bar{Q}(0) - \int_0^t \bar{W}(t-\tau)\dot{Q}(\tau)d\tau - \eta\bar{Q}(t) \tag{19}$$

$\bar{P}(t) = (\bar{P}_1(t), \bar{P}_2(t), \cdots, \bar{P}_L(t))^T$ 是地层压力向量；$\bar{Q}(0) = (Q_1(0), Q_2(0), \cdots, Q_L(0))^T$ 是初始产量向量；$\dot{Q}(\tau) = (\dot{Q}_1(\tau), \dot{Q}_2(\tau), \cdots, \dot{Q}_L(\tau))^T$ 为产量导数向量；$\eta = diag(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_L)$ 是产油指数矩阵。(19)式中，

$$\bar{W} = \left(\frac{t}{V} \omega_{l,P} - \sum_{K=2}^{2N} \frac{\bar{S}_{lK} \bar{S}_{PK}}{\lambda_K} (1 - e^{\lambda_K t}) \right) \in R^{2N \times 2N} \tag{20}$$

$l, P = 1, 2, \cdots L$，记井号；$\omega_{l,P} \equiv 1$，最后完成了降维和计算流压的任务。剩下一个问题是对参数 $\bar{S}_{lK}$、λ_K 诸量物理意义分析。

对几个参数的分析

今后我们称 $\Omega_{l,P} = \sum_{K=2}^{2N} \frac{\bar{S}_{l,K} \bar{S}_{P,K}}{-\lambda_K}$ 是从 P 到 l 的压力传导系数，它的意义是 P 井单位产量引起 l 井中压力稳定变化。可以证明[1]，若 l, P 不在同一水力学系统则 $\Omega_{l,P} = 0$。显然它与 P 到 l 井之间连通情况有关（渗透率的高低，流场的情况）确定 $\Omega_{l,P}$ 之后可了解井间连通程度，$\Omega_{l,P}$ 越大则连通程度越好，它等于零时，说明 l，P 井间有岩性尖灭或有断层分隔。定量地使用 $\Omega_{l,P}$ 将在以后讨论。现在先从讨论 λ_K 开始。

定义矩阵 $C^{-1} = diag\ (k_1, k_2, \cdots, k_{2N})$ 及 $C = diag\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \cdots, \frac{1}{k_{2N}}\right) \in R^{2N \times 2N}$ 经相似变换后矩阵 $\bar{A}$ 变为

$$\bar{\mathrm{A}} = C^{-1} \bar{A} C = \left(\frac{A_{I,J}}{\sqrt{b_I b_J}} \right) \in R^{2N \times 2N} \tag{21}$$

$$\mathrm{S}^{-1} \bar{\mathrm{A}} S = diag\ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{2N}).$$

回顾矩阵 A 的来源，可知它是由三个矩阵迭加而成：$A = A^0 + A^\tau + G$，其中 $\tau(i_1, j_1, k_1)$ 是组成 A^τ 的元素，三对角阵，主对角为负，其它为正，带宽 N。矩阵 G 前边已经谈过是由井底参数组成的，它考虑层间干扰的影响。剩下的 A^0 就可见而知了，该特值 $\lambda_K = \lambda^1_K + \lambda^2_K + \lambda^3_K$，把 A^0 代入(21)式后可得：

$$\lambda^1_K = -\frac{4}{\Delta X^2} C_K \varkappa, \quad (K = 2, \cdots, 2N) \tag{22}$$

$C_K > 1$。$\varkappa$ 名为平均导压系数，从(21)式得

$$C_K \varkappa = \frac{1}{4}\sum_{I=1}^{2N}\Big[\varkappa_{I,I+1}\Big(S_{IK}-\sqrt{\frac{b_I}{b_{I+1}}}S_{I+1,K}\Big)^2+\varkappa_{I,I+Mx}\Big(S_{IK}-\sqrt{\frac{b_I}{b_{I+Mx}}}S_{I+Mx,K}\Big)^2$$

$$+\varkappa_{I,I+Mxy}\Big(S_{IK}-\sqrt{\frac{b_I}{b_{I+Mxy}}}S_{I+Mxy,K}\Big)^2\Big]\geqslant 0$$

式中$\varkappa_{I,I+1}$，$\varkappa_{I,I+Mx}$ 等均为该节点处导压系数。由此看来，特征值为负，是导压系数权衡平均值，因权系数大小不同，而产生了不同的特征值。已知当 $K=1$ 时(12)式成立，代入上式后得 $C_1\varkappa=0$，即头一个特征值为零，这是预料之中的事。另外，将 A^τ 代入（21）式右端，这样可引出

$$\lambda_K^2 = -\sum_{I=1}^{N}\Big[\frac{\tau_I}{b_I}\Big(S_{IK}-\sqrt{\frac{b_I}{b_{I+N}}}S_{I+N,K}\Big)^2\Big]\leqslant 0 \tag{23}$$

τ_I 指第 I 点窜流系数。同样，把(12)式代入(23)就得 $\lambda_1^2=0$。这就是说 $\lambda_1=\lambda_1^1+\lambda_1^2+\lambda_1^3=0$，而且 $\lambda_1^1,\lambda_1^2,\lambda_1^3$ 也均为零。将 G 代入(21)可证明 $|\lambda_K^2|<<|\lambda_K^1|$，所以特征值 λ_K 可近似为 $\lambda_K^1+\lambda_K^2$，前者为导压系数的权衡平均值，后者为窜流系数权衡平均值。合并之后可写为

$$\lambda_K = -\frac{4}{\varDelta X^2}C_K\Big[\varkappa+\varDelta X^2 e_K\cdot\frac{\tau}{b}\Big] \tag{24}$$

将(17)式左乘 H 阵，右乘向量 $B^{-1}D\begin{bmatrix}Q(0)\\Q(0)\end{bmatrix}$ 得降维阵

$$\bar{G}(t)=HG(t)B^{-1}D\begin{bmatrix}Q(0)\\Q(0)\end{bmatrix}\in R^{L\times L} \tag{25}$$

展开式

$$\bar{G}(t)=-\Big[t\,diag\Big(\frac{1}{V_l}\Big)+\mathbb{A}\frac{t^2}{2!}+\mathbb{A}^2\frac{t^3}{3!}+\cdots+\cdots\Big]\begin{bmatrix}Q(0)\\Q(0)\end{bmatrix}$$

式中

$$V_l=\sum_{i=1}^{m_l}\frac{1}{K_lH_l}\Big[\frac{K_{li}^1}{\varDelta V b_{li}^1}+\frac{K_{li}^2}{\varDelta V b_{li}^2}\Big]$$

$\mathbb{A}^K\in R^{L\times L}$ 是降维矩阵，它的元素 $\mathbb{A}_{l,P}^K\geqslant 0$。若 l 到 P 最短途径穿过 $\varDelta$ 个网格，因为矩阵 A 稀疏，经过推导可得：当 $K=\varDelta$ 时

$$(\varDelta X^{2\varDelta}\mathbb{A}_{l,P}^K)=\mathbb{A}_{l_1,Il_1+1}\Big(\prod_{i=1}^{\varDelta-2}A_{Il_1+i,Il_1+i+1}\Big)A_{Il_1}+\varDelta-1,P$$

$$+\mathbb{A}_{l_1,Il_1+N+1}\Big(\prod_{i=1}^{\varDelta-2}A_{Il_1+N+i,Il_1+N+i+1}\Big)\mathbb{A}_{Il}+\varDelta^{-1},P+N$$

依导压系数的定义 $A_{I,I+1}=\varkappa_{I,I+1}\cdot\varDelta X^2$，由此得同导压系数几何平均值的关系式

$$\mathbb{A}_{l,P}^K=(\varkappa)^\varDelta/(\varDelta X)^{2\varDelta}$$

当 $K=\varDelta+1$ 时

$$\Delta_{l,P}^{K} = \Delta_{l,P}^{K-1}\Big(\sum_{i=1}^{\Delta}(A_{Il_1+i,\, Il_1+i} + A_{Il_1+N+i,\, Il_1+N+i})\Big)$$

以及其它各级的 $\Delta_{l,P}^{K}$ 值。由以上的展开式可以看出，$\Delta_{l,P}^{K}$ 与各流线上的参数的几何平均值有关，当 $K \gg \Delta$ 时，$\Delta_{l,P}^{K}$ 是许多流线上导压系数连乘的和。应特别指出，当 $K < \Delta$ 时，$\Delta_{l,P}^{K} = 0$。

对比(20)及(24)式可得

$$HGB^{-1}D \equiv \overline{W}$$

由恒等式的关系，等式两端同类项系数应该相同，于是得代数方程组：

$$\sum_{K=2}^{2N}\frac{\bar{S}_{lK}\bar{S}_{PK}}{\lambda_K}\cdot\lambda_K^{\Delta+1+j} = \Delta_{l,P}^{\Delta+j}, \qquad (j=0,1,\cdots,2N-2) \tag{26}$$

共 $2N-1$ 个方程式，$2N-1$ 个未知数，而对 $\bar{S}_{lK}\bar{S}_{PK}/\lambda_K$，利用范德蒙德行列式可解出，

$$\frac{\bar{S}_{lK}\bar{S}_{PK}}{\lambda_K} = \sum_{j=0}^{2N-2}\Delta_{l,P}^{\Delta+j}\cdot\bar{D}_{j+1,\,K-1} \tag{27}$$

$\bar{D}_{j+1,\,K-1}$ 是行列式中 $j+1$ 行，$K-1$ 列元素的代数余子式被行列式 D 除，而系数行列式展开后得

$$\sum_{j=0}^{2N-2}\lambda_K^{\Delta+j+1}\cdot\bar{D}_{j+1,\,K-1} = 1, \quad (K=2,3,\cdots,2N)$$

可见 $\bar{D}_{j+1,\,K-1} = C_{j+1,\,K-1}/\lambda_K^{\Delta+j+1}$，其中 $C_{j+1,\,K-1}$ 为待定常数。于是 (26) 式可写为

$$\frac{\bar{S}_{lK}\bar{S}_{PK}}{\lambda_K} = \sum_{j=0}^{2N-2}\Delta_{l,P}^{\Delta+j}C_{j+1,\,K-1}/\lambda_K^{\Delta+j+1}$$

求和，并提出公共系数之后引出：

$$\sum_{K=2}^{2N}\frac{\bar{S}_{lK}\bar{S}_{PK}}{\lambda_K} = \frac{\Delta_{l,P}^{\Delta}}{\lambda_2^{\Delta+1}}\cdot\Omega\Big(R,\frac{H_P}{H}\Big),$$

最后有

$$\sum_{K=2}^{2N}\frac{\bar{S}_{lK}\bar{S}_{PK}}{\lambda_K} = -\frac{\mu e_n}{4\pi KH}\cdot\Omega\Big(R,\frac{H_p}{H}\Big) \tag{28}$$

$\varepsilon_n = (\bar{\varkappa}_{l,p})^{\Delta}/\varkappa^{\Delta}$；$\varkappa_{l,p}$是从 P到 l路经导压系数几何平均值，$\varkappa$ 为全区导压系数算术平均值。由于原油粘度及压缩性是均匀的，故也可把 ε_n 表示为 $\varepsilon_n = (\bar{K}_{l,p})^{\Delta}/(\mathring{\bar{K}})^{\Delta}$。$\mathring{\bar{K}}$ 为全区渗透率均值。$\Omega\Big(R,\frac{H_p}{H}\Big)$ 是一个通用或近似通用的已知函数，它与 l 到 P 点的距离 R 有关，并与完井程度有关。从理论上说来它还与每条连线上渗透率差异比有关。但是，我们在这里的着眼点放在 l, P 之间岩性综合平均值确定上，而不再去细究各条流线上的情况差异，于是把 $\Omega\Big(R,\frac{H_p}{H}\Big)$ 视为通用常数，它的数值今后可以由数值模拟办法确定。

参数辨识方法

参数辨识方法因具体问题而定，下面讨论两种极端情形，简单系统及复杂系统。

若面临一个只有少数井的单一水力系统，则可以采用以下办法。

由观测流压和输出流压构造目标函数，

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}(y(t)-y_0(t))^T(y(t)-y_0(t))\,dt \tag{29}$$

利用公式(19)对各参数求导得梯度公式，

$$\frac{\partial J}{\partial \Omega_{l,J}}=-\int_0^{t_1}[(y_l(t)-y_{0l}(t))(Q_l(0)(1-e^{\lambda_2 t})\int_0^t \dot{Q}_l(\tau)(1-e^{\lambda_2(t-\tau)})d\tau)$$

$$+(y_p(t)-y_{0p}(t))\ \ (Q_p(0)(1-e^{\lambda_2 t})+\int_0^t \dot{Q}_p(\tau)(1-e^{\lambda_2(t-\tau)}))]dt$$

令 $X=1/V$ 则

$$\frac{\partial J}{\partial X}=-\int_0^{t_1}\left[(y_l(t)-y_{l0}(t))\left(t\left(\sum_{l=1}^{L}Q_l(0)\right)+\int_0^t(t-\tau)\left(\sum_{l=1}^{L}\dot{Q}_l(\tau)\right)\right)\right]dt,$$

$$\frac{\partial J}{\partial \eta_l}=-\int_0^{t_1}[(y_l(t)-y_{l0}(t))Q_l(t)dt;\text{及其它。}$$

有了梯度之后就可以用共轭梯度法求解，详见文[1]。

但对于大型问题这种算法就不适用了。如某油田被许多断层分割，断块之间是否连通，各断块的大小，有无水域等情况均不清楚，各断块原始地层压力也不清楚，只知许多井在试采阶段取得了测试资料及一些地质数据。现在针对这种复杂情况拟定辨识方法。

油田总生产时间最长的井为 t_1，自零时刻起到 t_1 共分割为 k_1 段，尽量做到每一时间段内各井都有流压（或地层压力）观测值，适应定解的要求 $k_1>\frac{L}{2}(L+7)$，另外还要求各井产量不恒定，不等差递增（减）；若在一段时间内出现了产量等差递增或恒定的现象，则还要加多观测量，还要说明，水文勘探资料或长期关井测得压力恢复的后期数据也是可以应用的。倘若在以往的试井工作中已测得了产油指数 K_l 值，可使用等式约束条件 $K_l=\eta_l+\Omega_{l,l}$ $(l=1,2,\cdots,L)$，所测得的原始地层压力均可应用，以减少未知量的个数。下面讨论一个最普遍的复杂情形。

构造目标函数

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}(y(t)-y_0(t))^T D(t)(y(t)-y_0(t))dt \tag{30}$$

$D(t)=diag(\delta_1(t-t_1^k),\ \delta_2(t-t_2^k),\ \cdots,\ \delta_L(t-t_L^k))$；$\delta_l(t-t_l^k)$ 是荻拉克函数；l 是井号；t_l^k 是应第 l 井在第 k 时间步观测流压（或静压）的时间。

定义 $\Omega_{l,p}$ 的允许集，

$$u_\Omega=\{\Omega_{l,p}\,|\,\Omega_{l,p}\geqslant 0;\ \ \Omega_{l,p}=\Omega_{p,l}\};$$

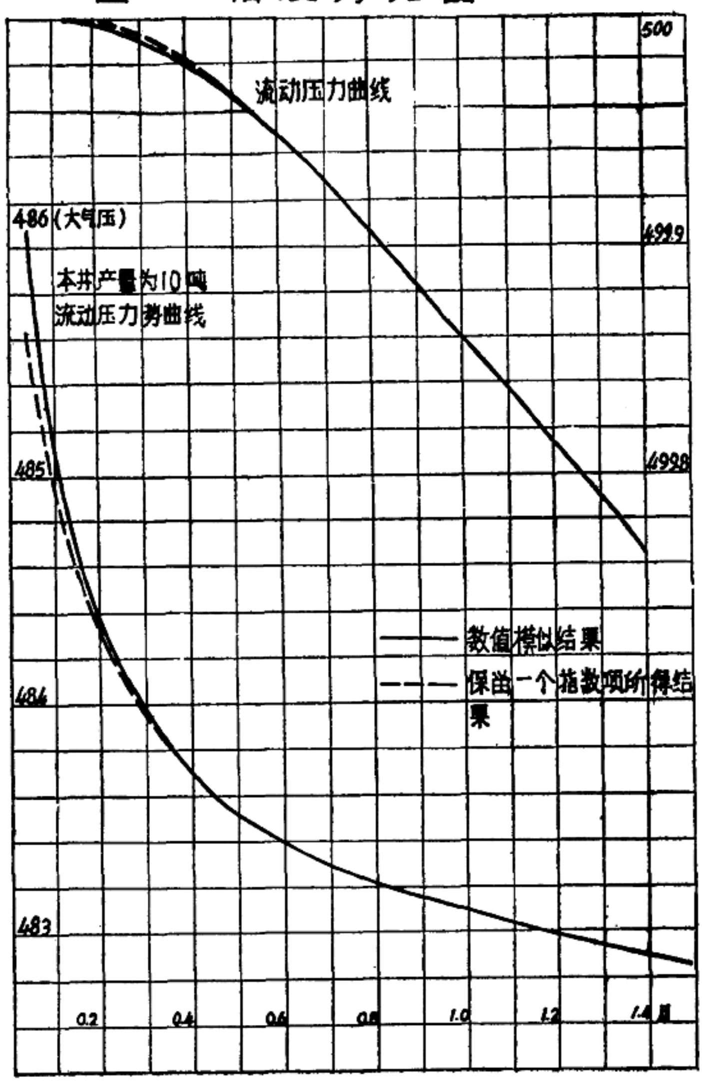
定义 l,P 井所在断块体积参数，$1/V_{l,p}=2_{l,p}$

$$u_a = \left\{ \alpha_{l,p} \;\middle|\; \alpha_{l,p} = \alpha_{p,l} = \begin{cases} 0 & (\Omega_{l,p} = 0 \text{ 时}) \\ \alpha_{ll} = \alpha_{pp} & (\Omega_{lp} \neq 0 \text{ 时}) \end{cases} \right\}$$

若 l 和 P 不在同一断块则 $\alpha_{P,l} = \alpha_{l,P} = 0$，说明并不存在 P,l 断块只有 P 块及 l 块。

特征值 λ_k 彼此之间的差别是很大的，甚至经过一天之后，许多指数项 $e^{\lambda_k t}$ 趋于零。经与数值模拟结果对比后认为，只有除零外的最大一个特征值是最有效的（见图 1），而其它特征值仅当时间极短时（例如压力恢复初期）才能起到作用。本文重点讨论常规观测数据及水文勘探数据的应用，故只保留 λ_2 一项就足够了。但是 λ_2 的值在每个断块是不相同的，故用 λ_{2i} 表示第 i 断块的特征值，于是定义

图一　精度对比图



$$u_\lambda = \left\{ \lambda_{2i} \left| \lambda_{2i} = \begin{cases} \lambda_{2i} < 0 & (\Omega_{i,j} \neq 0 \text{ 时}) \\ \lambda_{2i} < 0 & (\Omega_{i,j} = 0 \text{ 时}) \end{cases} \right. \right\}$$

为它的允许集。综上所述，待辨识参数允许集 $u_{ad} = u_\lambda \cap u_\alpha \cap u_\Omega$。

定义向量

$$u = (\Omega_{11}, \Omega_{12}, \cdots, \Omega_{1L}, \Omega_{22}, \Omega_{23}, \cdots, \Omega_{LL}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{LL}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \cdots, \lambda_{2L}, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_L)^T$$

这样，系统参数辨识的完整提法是，在允许集 u_{ad} 内找一点 u^*，使目标泛函(29)最小，

$$J(u^*) = \underset{u \in u_{ad}}{mir} J(u) \tag{31}$$

然而求解问题(30)，直接应用共轭梯度法计算量是很大的。下面提出一个快速计算方法。问题(30)等似于一个超定最小二乘解。利用(19)式 $P_l(0) - y_{0l}(t_l^k) = \sum_{j=1}^{L} \alpha_{l,j} \left(t_j^k Q_j(0) + \int_0^{t_l^k} (t-\tau) \right.$

$$\left. \dot{Q}_j(\tau)\, d\tau \right) + \sum_{j=1}^{L} \Omega_{l,j} \left[(1 - e^{\lambda_{2i} t_l^k}) Q_j(0) + \int_0^{t_l^k} (1 - e\lambda_{2i})^{(t_l^k - \tau)}\ \dot{Q}(\tau)\, d\tau \right] + \eta_l Q_l(t_l^k) \tag{32}$$

如果 t_l^k 时刻 l 井没有测压，则把相应方程取消方程所在位置左右端诸项取零。(31)式中 $l = 1, 2, \cdots, L$ 共 L 个方程，再加 k_1 个时间段故可写出 $L \times k_1$ 个方程。定义已知量 $P_w(t_l^k) = -y_{0l}(t_l^k) + P_l(0)$ 及由它组成的向量 P_w。于是(31)式可写为向量形式

$$F(u) = P_w \tag{33}$$

非线性方程组（32），一般来说是个超定方程组。求解时首先要把它线性化，在允许集内给 u 一个猜测 u_0。令 H 为 F 在 u_0 点处的雅可比矩阵，F 的台劳展式

$$F(u) = F(u_0) + F'(u_0)(u - u_0) + \cdots$$

忽略高阶导数项得(32)式的一次近似式：

$$H(u_0)(u_1 - u_0) = P_w - F(u_0) \tag{34}$$

是线性的，但也是超定的，两端同用 H 的转置 H^T 左乘得

$$H^T(u_0) H(u_0)(u_1 - u_0) = H(u_0)^T [P_w - F(u_0)] \tag{35}$$

此时矩阵 $H^T(u_0)H(u_0) \in R^{m \times m}$，$u \in R^m$，（34）式是适定的。矩阵 $H^T(u_0)H(u_0)$ 是对称的，并且可以证明它是正定的。从(34)中求解（$u_1 - u_0$）这样一个最常见的问题，自然办法是很多的。鉴于它的正定对称及稀疏等性质对于大型问题最好采用不完全 LU 分解联用共轭梯度办法[4]。

求解 $u_1 - u_0$ 后仅是第一次迭代，然后用 u_1 作初值，（u_1 换 u_0）重复上一步骤，得 u_2，往返进行下去，直至目标泛函达到最小时为止。但每迭代一步，先要对所得结果，如 u_1, u_2 等作检查，视其是否在允许集内，如果不在允许集内人为地合理地把它移入允许集中。

下面用一个实例说明本方法的应用效果。某裂缝性小油田，无水域，五口井生产观测了流压数据，计算结果，储量 1.058 千万吨，实际值 1.063 千万吨，井间无断层，也同实际情况相符。

本方法目前已形成了大型软件。

符 号 说 明

$Q^{(k)}=\frac{K}{\mu}$；（$k=1$指基岩，$k=2$指裂缝）

K——渗透率；

μ——原油地下粘度；

$b^{(k)}=\phi\beta^{*}$；

ϕ——孔隙度，

β^{*}——流体和岩石的压缩系数；

$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k$；

t——时间；

τ——窜流系数；

$\Delta x,\Delta y,\Delta z$——三度空间中步长；

参 考 文 献

1. 齐与峰，章欣，油层研究的控制论方法。石油学报，1984年10月，第五卷第四期。
2. 齐与峰，章欣，油层动态系统建模与辨识，控制理论和应用，1985年。待发
3. Mordecai Avriel Nonlinear programming. Analysis and Methods Prentice-Hall, Inc. 1976
4. Robert J. Plemmons Large Scale Matrix Problems. North Holland. New York Oxford. 1981.