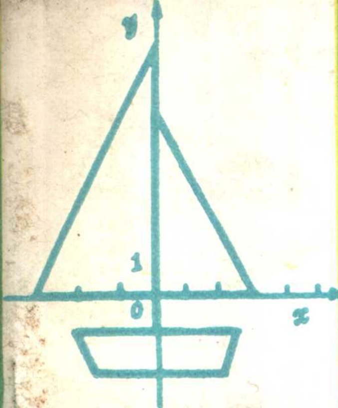
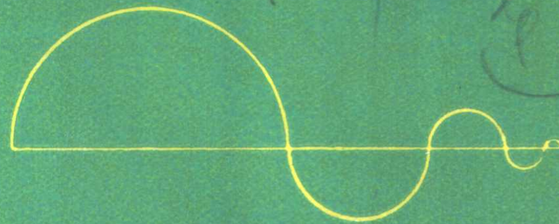
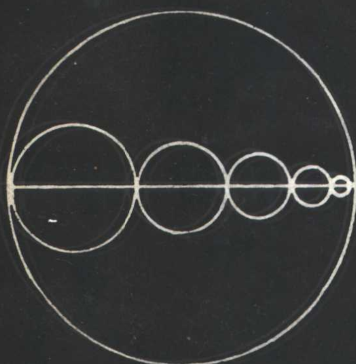
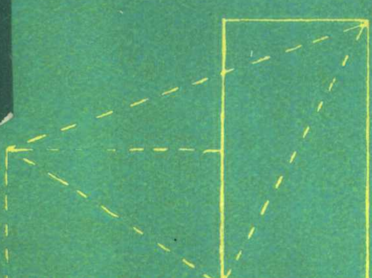
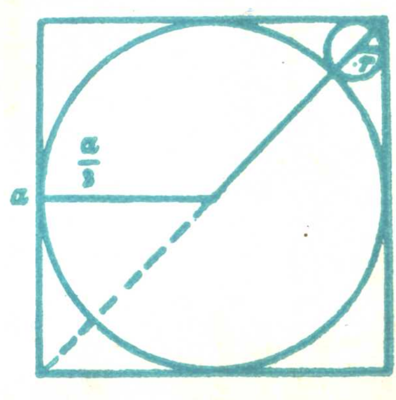





中学数学实验教材

第五册　下

北京师范大学出版社

中学数学实验教材

第五册（下）

中学数学实验教材编写组　编

北京师范大学出版社

中学数学实验教材
第五册（下）
中学数学实验教材编写组编
*
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北赵县印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/12　印张：6.625　字数：138千
1985年5月第1版　1985年5月第1次印刷
印数：1—10,000
统一书号：7243·268　定价：0.82元

前　　言

这一套中学数学实验教材，内容选取的原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用。

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要。

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产、特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观。

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普通实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法。比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识。对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的

精简或删减。

全套教材共分六册。第一册是代数。在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出算律，把数扩充到有理数和实数系。灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式。第二册是几何。由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形，圆，基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容。第三册是函数。数形结合引入坐标，研究多项式函数、指数、对数、三角函数、不等式等。第四册是代数。把数扩充到复数系，进一步加强多项式理论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计的初步知识。第五册是几何。引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆锥曲线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识。第六册是微积分初步。突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分。

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系。教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数（包括概率统计）、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排。

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章。突出由算术到代数，由实验几何到论证几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四

个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用。这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性。

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织"中学数学实验教材编写组"，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验教学教材的设想》编写的。第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导在北京景山学校，北京师院附中，上海大同中学，天津南开中学，天津十六中学，广东省实验中学，华南师院附中，长春市实验中学等校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一《中学数学实验教材》，正式出版，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物。在编写和修订过程中，项武义教授曾数次详细修改过原稿，提出过许多宝贵意见。

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书。在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好。

中学数学实验教材编写组

目　　录

第五章　向量的坐标运算　直线与圆

§1　向量的坐标运算

1.1　直角坐标系与向量的坐标

在初中，我们已学习了平面直角坐标系，其要点如下：选定一个长度单位，建立两条具有公共原点且互相垂直的数轴（图5—1），通常一条为水平的数轴，称为横轴或X轴，它的正向是由左到右，另一条是和它垂直的轴称为纵轴或Y轴，它的正向是从下到上。X轴、Y轴总称为坐标轴、坐标轴的交点O称为坐标系的原点，这样我们就说在平面上建立了直角坐标系OXY，这个平面就叫做坐标平面，在坐标平面上任取一点P，过P引X轴、Y轴的垂线，设垂足分别是M、N，如果M在X轴上的坐标为x，N在Y轴上的坐标为y，那么我们就说P点的坐标是（x，y），记作$P(x, y)$，x称为横坐标，y称为纵坐标。

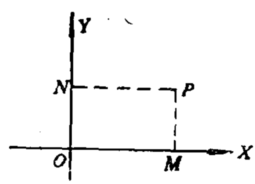


图5—1

在建立直角坐标系OXY的平面上（图5—2），我们沿X轴与Y轴的正方向分别取单位向量$\overrightarrow{e_x}$、$\overrightarrow{e_y}$，由共面向量

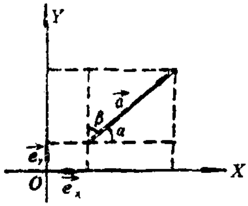


图 5—2

定理可知，对坐标平面上任一向量 $\vec{a}$，存在唯一的有序实数偶 (a_x, a_y) 使

$$\vec{a}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y, \quad (1)$$

(a_x, a_y) 就叫做 $\vec{a}$ 在直角坐标系 OXY 上的坐标，记作

$$\vec{a}=(a_x, a_y). \quad (2)$$

实质上（2）式是（1）式的缩写；其中 a_x 叫做 $\vec{a}$ 在 X 轴上的坐标分量，a_y 叫做 $\vec{a}$ 在 Y 轴上的坐标分量。

定理 在坐标平面上，如果 $\vec{a}=(a_x, a_y)$，则

$$a_x=\vec{e}_x\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cos\langle\vec{e}_x, \vec{a}\rangle, \quad (3)$$

$$a_y=\vec{e}_y\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cos\langle\vec{e}_y, \vec{a}\rangle.$$

证明：已知

$$\vec{a}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y,$$

则

$$\vec{e}_x\cdot\vec{a}=\vec{e}_x\cdot(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y)=a_x\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x+a_y\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_y\cdot\vec{a}=\vec{e}_y\cdot(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y)=a_x\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y.$$

由于 $\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$ 是单位向量，且 $\vec{e}_x\perp\vec{e}_y$，所以，

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x=\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y=1, \quad \vec{e}_x\cdot\vec{e}_y=\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x=0,$$

于是得到

$$a_x=\vec{e}_x\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cos\langle\vec{e}_x, \vec{a}\rangle,$$

$$a_y = \vec{e_y} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cos\langle \vec{e_y}, \vec{a} \rangle.$$

〔证毕〕

这个定理说的是，向量$\vec{a}$在X轴和Y轴上的坐标分量分别是$\vec{a}$在坐标轴上的垂直投影量。

显然，$\vec{o}=(0, 0)$，$\vec{e_x}=(1, 0)$，$\vec{e_y}=(0, 1)$。

令$\langle \vec{e_x}, \vec{a} \rangle = \alpha$，$\langle \vec{e_y}, \vec{a} \rangle = \beta$

α、β一起决定了$\vec{a}$的方向，α，β叫做$\vec{a}$的方向角，$\cos\alpha$，$\cos\beta$叫做$\vec{a}$的方向余弦，上述定理表达了向量的长度、方向与它的坐标之间的关系，甚为重要，请同学要把它牢牢记住。

如果在坐标平面上（图5—3），以O为起点引$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，则$A$点的位置被$\vec{a}$所唯一确定，这时，我们称$\overrightarrow{OA}$为点$A$的位置向量。换句话说，$A$点的位置向量也就是确定$A$点相对于原点位置的向量。

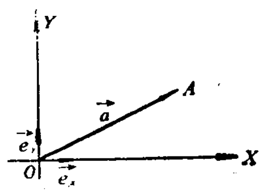


图5—3

设$\overrightarrow{OP} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$

则$\overrightarrow{OP}$的坐标（x，y）也就是P点的坐标；反之，P点的坐标（x，y）也就是位置向量$\overrightarrow{OP}$的坐标。由此可见，给

定了原点O和两个互相垂直的单位向量$\vec{e_x}$，$\vec{e_y}$，坐标系也就完全确定了，因而，坐标系OXY也可用〔O：$\vec{e_x}$，$\vec{e_y}$〕来表示，$\vec{e_x}$，$\vec{e_y}$叫做坐标系的基向量。

为了方便，在本书中我们约定，当点用大写字母标记时，它相对于原点的位置向量用相应的小写字母来标记，例如P点的位置向量记为$\vec{p}$，A点的位置向量记为$\vec{a}$等等。

例：向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的方向与绝对值如图5—4所示，求$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的坐标。

解：设$\vec{a}=(a_x, a_y)$，$\vec{b}=(b_x, b_y)$，$\vec{c}=(c_x, c_y)$，

$$\because \quad a_x=\vec{e_x}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cos\langle\vec{e_x},\vec{a}\rangle$$

$$=2\cos 45^\circ$$

$$=\sqrt{2},$$

$$a_y=|\vec{a}|\cos\langle\vec{e_y},\vec{a}\rangle$$

$$=2\cos 45^\circ$$

$$=\sqrt{2},$$

$$\therefore \quad \vec{a}=(\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

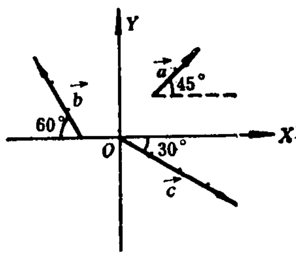


图 5—4

$$\because \quad b_x=|\vec{b}|\cos\langle\vec{e_x}, \vec{b}\rangle=3\cos(180^\circ-60^\circ)=-3\cos 60^\circ$$

$$=-\frac{3}{2},$$

$$b_y=|\vec{b}|\cos\langle\vec{e_y}, \vec{b}\rangle=3\cos(90^\circ-60^\circ)=3\cos 30^\circ$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

$\therefore\quad \vec{b}=\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$.

$\because\quad c_x=|\vec{c}|\cos\langle\vec{e}_x,\ \vec{c}\rangle=4\cos30°=2\sqrt{3}$,

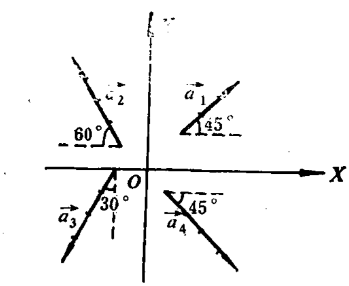
$c_y=|\vec{c}|\cos\langle\vec{e}_y,\ \vec{c}\rangle=4\cos(30°+90°)=-4\sin30°$

$=-2$,

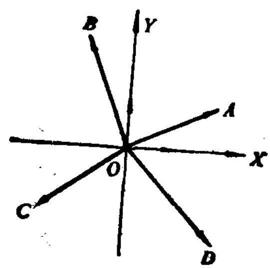
$\therefore\quad \vec{c}=(2\sqrt{3},\ -2)$.

练　　习

1．求图中向量的坐标。



（第 1 题）



（第 2 题）

2．已知$A(4,\ 2)$，$B(-2,\ 5)$，$C(-4,\ -3)$，$D(4,\ -4)$。试用基向量$\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$表示它们相对于原点的位置向量。

3．已知$\overrightarrow{OA}=(3,\ -1)$，$\overrightarrow{OB}=(2,\ 3)$。试写出$A$、$B$两点的坐标，

1.2 用向量坐标进行向量运算

已知向量$\vec{a}=(a_x, a_y)$，$\vec{b}=(b_x, b_y)$ 则

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y})+(b_x\vec{e_x}+b_y\vec{e_y})$$
$$=(a_x+b_x)\vec{e_x}+(a_y+b_y)\vec{e_y},$$

即 $$\vec{a}+\vec{b}=(a_x, a_y)+(b_x, b_y)$$
$$=(a_x+b_x, a_y+b_y).$$

同样可证：

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x, a\ )-(b_x, b_y)=(a_x-b_x, a_y-b_y).$$

这就是说向量的和与差的坐标等于各向量相应坐标的和与差。

已知$\vec{a}=(a_x, a_y)$ 和一实数λ，则

$$\lambda\vec{a}=\lambda(a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y})=\lambda a_x\vec{e_x}+\lambda a_y\vec{e_y}$$

即 $$\lambda\vec{a}=\lambda(a\ , a_y)=(\lambda a_x, \lambda a_y).$$

这就是说向量倍积的坐标等于该向量相应的坐标与倍数的乘积。

已知 $\vec{a}=(a\ , a_y)$，$\vec{b}=(b_x, b_y)$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y})\cdot(b_x\vec{e_x}+b_y\vec{e_y})$$
$$=a_xb_x\vec{e_x}\cdot\vec{e_x}+a_xb_y\vec{e_y}\cdot\vec{e_x}+a_yb_x\vec{e_y}\cdot\vec{e_x}$$
$$+a_yb_y\vec{e_y}\cdot\vec{e_y}$$

由于 $\vec{e_x}\cdot\vec{e_x}=\vec{e_y}\cdot\vec{e_y}=1$ $\vec{e_x}\cdot\vec{e_y}=\vec{e_y}\cdot\vec{e_x}=0$

所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x,\ a_y)\cdot(b_x,\ b_y)=a_xb_x+a_yb_y$$

这就是说两个向量内积的坐标等于两向量相应坐标的乘积的和。

例1　已知 $\vec{a}=(5,\ -3)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$。

求 $\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$3\vec{a}+2\vec{b}$。

解：$\vec{a}+\vec{b}=(5,\ -3)+(3,\ 2)=(8,\ -1)$。

$\vec{a}-\vec{b}=(5,\ -3)-(3,\ 2)=(2,\ -5)$。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(5,\ -3)\cdot(3,\ 2)=5\times3+(-3)\times2=9$。

$$\begin{aligned}3\vec{a}+2\vec{b}&=3(5,\ -3)+2(3,\ 2)\\&=(15,\ -9)+(6,\ 4)=(21,\ -5)。\end{aligned}$$

例2　已知 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$。求 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标（图5—5）。

解：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)\\&=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)\end{aligned}$$

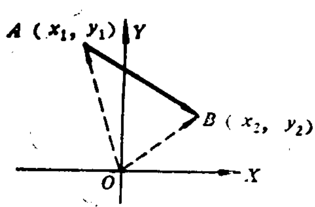


图 5—5

由例2我们可得到如下运算法则：

一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标。

例3 已知 $A(3,4)$，$B(-2,7)$。

求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$；它们的坐标之间有什么关系？

解： $\overrightarrow{AB}=(-2-3,\ 7-4)=(-5,\ 3)$。

$\overrightarrow{BA}=(3-(-2),\ 4-7)=(5,\ -3)$。

显然它们的相应的坐标分量是互为相反数。实际上

$$\overrightarrow{BA}=(-1)\overrightarrow{AB}=(-1)(-5,\ 3)=(5,\ -3)。$$

例4 已知三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=r$。$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\langle\vec{b},\vec{c}\rangle=\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=120°$（图5—6），求证：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$。

证明： 设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，以 $\overrightarrow{OA}$ 的方向作为 X 轴的正方向建立坐标系 $[O:\ \vec{e}_x,\ \vec{e}_y]$

则 $\overrightarrow{OA}=(r,\ 0)$。

$$\overrightarrow{OB}=(|\vec{b}|\cos120°,\ |\vec{b}|\cos30°)=\left(-\frac{r}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)。$$

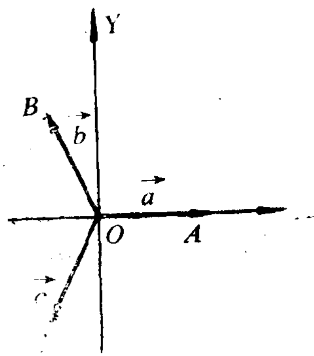


图5—6

$$\overrightarrow{OC}=(|\vec{c}|\cos120°,\ |\vec{c}|\cos150°)=\left(-\frac{r}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)。$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(r,\ 0)+\left(-\frac{r}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)+\left(-\frac{r}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$$

$$=\left(r-\frac{r}{2}-\frac{r}{2},\ 0+\frac{\sqrt{3}}{2}r-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \right)$$

$$=(0,\ 0)。$$

$\therefore\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$。

例5 已知$\square ABCD$，$A(0,1)$、$B(4,3)$、$C(2,5)$，求顶点D的坐标（图5—7）。

解：

因$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$=(0,1)+(2,5)-(4,3)$

$=(-2,3)$。

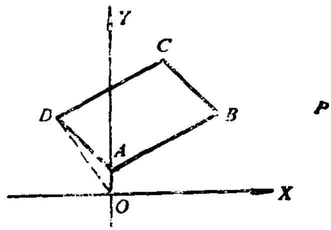


图5—7

所以D的坐标是$(-2,3)$。

练　　习

1．已知$\vec{a}=(-5,3)$，$\vec{b}=(7,-2)$．求$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$4\vec{a}-7\vec{b}$的坐标。

2．已知$\vec{a}=(2,-1)$，$\vec{b}=(-1,1)$．求$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$的坐标，并画图验证。

3．已知$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(3,1)$．试以O为起点画有向线段，分别表示$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$2\vec{a}-3\vec{b}$。

4. 已知$\vec{a}=(1, 2)$，$\vec{b}=(-2, 3)$。求$\vec{a}\cdot\vec{b}$，
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$，
$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$。

5. 已知$\vec{a}=(\sqrt{2}, -1)$，$\vec{b}=(-\sqrt{3}, 3)$。求

（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$；（2）$(4\vec{a}-\vec{b})\cdot(4\vec{a}+\vec{b})$；

（3）$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$。

6. 已知▱$ABCD$的三个顶点$A(0, 0)$，$B(3, 1)$，$C(4, 3)$。试求顶点D的坐标。

7. 已知O是正六边形$ABCDEF$的中心，用向量坐标运算证明：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{o}$。

1.3 垂直与平行向量的坐标关系

已知$\vec{a}$、$\vec{b}$（$\vec{b}\neq\vec{o}$）平行的充要条件是存在一个实数λ使等式

$$\vec{a}=\lambda\vec{b}$$

成立。如果$\vec{a}=(a_x, a_y)$，$\vec{b}=(b_x, b_y)$，那么上面的充要条件用坐标表示，可写为：

$$(a_x, a_y)=(\lambda b_x, \lambda b_y)$$

即
$$\begin{cases}a_x=\lambda b_x,\\ a_y=\lambda b_y.\end{cases}$$

由上式消去λ，上述条件又可写为：