

“缀术”

张荣兴 © 著

用于多凸凹圆、椭圆、双曲、
抛物方阵式的

GOUCHENG JI YINGYONG

构成及应用

ZHUISHU

Yongyu Duotuaoyuan Tuoyuan Shuangqu Paowu
Fangzhenshi De Goucheng Ji Yingyong



西南交通大学出版社

◎ 责任编辑/刘莉东

“缀术”

用于多凸凹圆、椭圆、双曲、
抛物方阵式的

GOUCHENG JI YINGYONG

构成及应用

封面
设计

何东琳设计工作室

JADE.HE

DESIGN STUDIO



ISBN 7-81057-733-6



9 787810 577335 >

ISBN 7-81057-733-6/0·052

定价: 20.00元

“缀术”用于多凸凹圆、椭圆、双曲、 抛物方阵式的构成及应用

张荣兴 著

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

“缀术”用于多凸凹圆、椭圆、双曲抛物方阵式的构成及应用 / 张荣兴 著. — 成都: 西南交通大学出版社, 2003.10

ISBN 7-81057-733-6

I. 缀... II. 张... III. 古典数学 - 应用 - 解析几何 IV. 0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 064197 号

**“缀术”用于多凸凹圆、椭圆、双曲
抛物方阵式的构成及应用**

张荣兴 著

*

责任编辑 刘莉东

封面设计 何东琳设计工作室

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031 发行部电话: 87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn

西南交通大学印刷厂印刷

*

开本: 787mm × 1092mm 1/32 印张: 10.625

字数: 223 千字

2003 年 10 月第 1 版 2003 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 7-81057-733-6/O · 052

定价: 20.00 元

内 容 摘 要

本书主要内容:方阵指数;多凸凹圆极半径方阵幂三角函数系,多凸凹椭圆方阵幂三角函数系,多凹凸双曲反方阵幂函数系,多凸凹基抛物方阵幂函数系;通过这四种函数系推导出八种系数及各种包容性方阵式。

目 录

绪 论	1
第一章 多凸凹圆面极半径方阵幂三角函数系	
第一节 多凸凹圆面极半径	
方阵幂三角函数系的成立	4
第二节 “缀术”用于多凸凹圆面系数	10
第三节 多凸凹球体积系数	17
第二章 有关多凸凹圆面系数的方阵式	
第一节 多凸凹球体积方阵式	25
第二节 多凸凹圆面积方阵式	27
第三节 多凸凹圆锥体积方阵式	29
第四节 多凸凹圆锥侧面积及全面积方阵式	31
第五节 多凸凹圆柱体方阵式	36
第六节 多凸凹圆台体积方阵式	39
第七节 多凸凹圆台侧面积及全面积方阵式	43
第三章 多凸凹球解体方阵式	
第一节 多凸凹球帽体积及帽锥全体积方阵式	49
第二节 多凸凹球帽锥的锥部侧表面积	
及锥部的全表面积方阵式	55
第三节 多凸凹球台体积方阵式	61

第四节	多凸凹球台母体积方阵式	63
第四章	多凸凹椭圆方阵幂三角函数系的成立	
第一节	多凸凹椭圆方阵幂三角函数系	68
第二节	多凸凹椭圆面积方阵式	74
第三节	多凸凹椭球体方阵式	78
第五章	与多凸凹椭圆有关的方阵式	
第一节	多凸凹椭圆柱体积方阵式	84
第二节	多凸凹椭圆锥体积方阵式	86
第三节	多凸凹椭圆台体积方阵式	90
第六章	多凸凹椭球解体方阵式	
第一节	多凸凹椭球帽体积及 帽锥全体积方阵式	97
第二节	多凸凹椭球台体积方阵式	103
第三节	多凸凹椭球台母体积方阵式	106
第七章	多凹凸双曲反方阵幂函数系	
第一节	多凹凸双曲反方阵幂 函数系的成立	110
第二节	多凹凸双曲面系数	114
第三节	多凹凸正双曲面积方阵式	121
第四节	多凸凹反双曲面积方阵式	123
第五节	多凹凸正双曲柱体积方阵式	126
第六节	多凸凹反双曲柱体积方阵式	128
第八章	多凸凹圆凹凸正、反双曲体积方阵式	
第一节	多凹凸双曲体系数	133
第二节	多凸凹圆凹凸正双曲体积方阵式	139
第三节	多凸凹圆凸凹反双曲体积方阵式	141

**第九章 多凸凹椭圆凹凸正、
反双曲体积方阵式**

第一节 多凸凹椭圆凹凸正双曲体积方阵式····· 149

第二节 多凸凹椭圆凸凹反双曲体积方阵式····· 154

第十章 多凸凹基抛物方阵幂函数系

第一节 多凸凹基抛物方阵幂函数系的成立····· 161

第二节 多凸凹抛物面系数····· 164

第三节 多凸凹抛物面方阵式····· 168

第四节 多凸凹抛物柱体积方阵式····· 169

第十一章 多凸凹抛物体

第一节 多凸凹抛物体系数····· 174

第二节 多凸凹圆凸凹抛物体方阵式····· 178

第三节 多凸凹椭圆凸凹抛物体体积方阵式····· 180

第十二章 多凸凹圆周、圆柱侧面及全面、球表面方阵式

第一节 多凸凹圆周长方阵式····· 186

第二节 多凸凹圆柱侧面积及全面积方阵式····· 191

第三节 多凸凹球表面积方阵式····· 196

第十三章 多凸凹椭圆周、柱侧面及

全面、椭球表面方阵式

第一节 多凸凹椭圆周长方阵式····· 204

第二节 多凸凹椭圆柱侧表面积及
全表面积方阵式····· 209

第三节 多凸凹椭球表面积方阵式····· 212

第十四章 多凸椭圆环凸凹椭圆胎

第一节 多凸椭圆环凸凹椭圆胎体积方阵式····· 221

第二节 多凸椭圆环凸凹椭圆胎表面积方阵式····· 227

第三节	多凸椭圆环凸凹圆胎体积方阵式·····	232
第四节	多凸椭圆环凸凹圆胎表面积方阵式·····	238
第十五章	多凸圆环凸凹椭圆胎	
第一节	多凸圆环凸凹椭圆胎体积方阵式·····	248
第二节	多凸圆环凸凹椭圆胎表面积方阵式·····	254
第三节	多凸圆环凸凹圆胎体积方阵式·····	260
第四节	多凸圆环凸凹圆胎表面积方阵式·····	265
第十六章	多凸凹圆凹凸、凸凹正、 反双曲体侧表面积方阵式	
第一节	多凸凹圆凹凸正双曲体侧表面积 及全表面积方阵式·····	274
第二节	多凸凹圆凸凹反双曲体侧表面积 及全表面积方阵式·····	283
第十七章	多凸凹椭圆凹凸、凸凹正、 反双曲体侧表面积方阵式	
第一节	多凸凹椭圆凹凸正双曲体侧表面积 及全表面积方阵式·····	293
第二节	多凸凹椭圆凸凹反双曲体侧表面积 及全表面积方阵式·····	302
第十八章	多凸凹圆、椭圆凸凹抛物体表面积方阵式	
第一节	多凸凹圆凸凹抛物体表面积方阵式·····	313
第二节	多凸凹椭圆凸凹抛物体表面积方阵式·····	320
习题答案·····		330

绪 论

1.《缀术》的失传^①。《缀术》是算经十书之一，南北朝时祖冲之撰。北宋元丰七年(1084年)刻各种算经时，《缀术》等资料已失传。据《隋书·律历志》、《缉古算经》序和《九章算术》(李淳风注)、《缀术》中可能记有精密圆周率和正确的球体体积法等成就。

祖冲之的儿子祖暅(xuān)，把祖冲之的数学著作收集起来，编成六卷，书名叫做《缀术》。一百多年后，唐初的国立学校有一所叫“算学”，以“算经十书”为教材，其中就有祖冲之的《缀术》一书曾传到朝鲜和日本。祖冲之死后五百多年，北宋时有数学家楚衍，对“缀术”很有研究，曾协助王安石变法的著名科学家沈括，也曾见到过《缀术》。此后儒家思想盛行，大讲唯心主义，比较艰深的《缀术》更无人理会，竟逐渐失传了。这真是我国民族文化的一大损失！

祖冲之的数学专著《缀术》已失传，《隋书》中写道：“…祖冲之…所著书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理”。这是我们数学史上的一个重大损失。

^① 陈通鑫等编：《数学小词典》

2. “缀术”的发现^①。是从 2 次圆面系数的推导无意中
发现,如下式。

$$m_2 = 4 \left\{ 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \frac{(2 \cdot i)^2 - 1}{[2(i+1)][2(i+1)+1]} - \dots \right\}$$

式中含有前项缀后项的形式,可以连续缀下去,这就是“缀术”
来历。古人用“缀术”两字来描述的计算形式,其字义与实际计
算形式切实相符,这也就是“缀术”的发现。

3. 本书历经多年艰苦努力,利用发现的“缀术”进行了全
新的创作,得出各种应用系数及方阵指数,如:

- (1) 圆面系数: $m_k, m_{\frac{k}{k-1}}, m_{\frac{k}{k+1}}, m_{\frac{k}{2k-1}}, \dots$ 。
- (2) 球体系数: $C_k, C_{\frac{k}{k-1}}, C_{\frac{k}{k+1}}, C_{\frac{k}{2k-1}}, \dots$ 。
- (3) 双曲面系数: $B_k, B_{\frac{k}{k-1}}, B_{\frac{k}{k+1}}, B_{\frac{k}{2k-1}}, \dots$ 。
- (4) 双曲体系数: $D_k, D_{\frac{k}{k-1}}, D_{\frac{k}{k+1}}, D_{\frac{k}{2k-1}}, \dots$ 。
- (5) 抛物面系数: $E_{\frac{1}{k}}, E_{\frac{k-1}{k}}, E_{\frac{k+1}{k}}, E_{\frac{2k-1}{k}}, \dots$ 。
- (6) 抛物体系数: $F_{\frac{1}{k}}, F_{\frac{k-1}{k}}, F_{\frac{k+1}{k}}, F_{\frac{2k-1}{k}}, \dots$ 。
- (7) 极半径系数: $R_k, R_{\frac{k}{k-1}}, R_{\frac{k}{k+1}}, R_{\frac{k}{2k-1}}, \dots$ 。
- (8) 双曲面横半轴系数: $a_k, a_{\frac{k}{k-1}}, a_{\frac{k}{k+1}}, a_{\frac{k}{2k-1}}, \dots$ 。
- (9) 方阵指数: $k, \frac{k}{k-1}, \frac{k}{k+1}, \frac{k}{2k-1}, \dots$ 。

将上述不同的系数及方阵指数而构成不同的包容性方阵

^① 张荣兴.《数学的实践与认识》,2002 年,6 期,990 页

式。本书共有十八章有 59 种包容性公式,每一种包容 28 个公式,共 1 652 个可应用的公式,这是一部几何形状非常丰富,使用价值很高的基础数学书。必将使我国基础数学水平推向一个新的高度,对我国科技事业,将有推动作用。建议在大学一、二年级学习掌握,也可作为自学丛书。在学习上多体会它的推导和构成及应用,以便提高数学水平。

第一章 多凸凹圆面极半径 方阵幂三角函数系

第一节 多凸凹圆面极半径 方阵幂三角函数系的成立

多凸凹圆面极半径方阵幂三角函数系,它是在方形中存在的多凸凹圆面极半径方阵幂三角函数,当指数 k 为偶数时,其方阵函数系的自变量在同一区间 $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 上连续;当指数 k 为奇数时,其方阵函数系的自变量在同一区间 $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 上连续. 其方阵幂三角函数系的表现次序由第一方阵函数系起,各方阵函数系的方阵指数为 $k, \frac{k}{k-1}, \frac{k}{k+1}, \frac{k}{2k-1}, \dots$, 所构成全部方阵函数系.

设,多凸凹圆系的半径 $R=1$,多凸凹圆面极半径方阵幂三角函数系的方阵指数 $k, \frac{k}{k-1}, \frac{k}{k+1}, \frac{k}{2k-1}, \dots$ 的 $k=(2, 4, 6, \dots, 2n)$ 的自然偶数,其方阵函数系的自变量在同一区间 $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 上连续,而方阵指数的 $k=(3, 5, 7, \dots, 2n+1)$ 自然奇数时,其方阵函数系的自变量在同一区间 $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 上连

续,则多凸凹圆系的方阵幂三角函数系成立.

$${}_k R_\theta = R(\cos^k \theta + \sin^k \theta)^{-\frac{1}{k}} \quad (1.1)$$

$${}_{k-1} R_\theta = R(\cos^{\frac{k}{k-1}} \theta + \sin^{\frac{k}{k-1}} \theta)^{-\frac{(k-1)}{k}} \quad (1.2)$$

$${}_{k+1} R_\theta = R(\cos^{\frac{k}{k+1}} \theta + \sin^{\frac{k}{k+1}} \theta)^{-\frac{(k+1)}{k}} \quad (1.3)$$

$${}_{2k-1} R_\theta = R(\cos^{\frac{k}{2k-1}} \theta + \sin^{\frac{k}{2k-1}} \theta)^{-\frac{(2k-1)}{k}} \quad (1.4)$$

... ..

① 当极角 θ 给定后 ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), 依次取 $k=2, 4, 6, \dots, 2n$ 偶次时, 可得到一系列的凸凹圆面极半径 ${}_k R_\theta, {}_{k-1} R_\theta, {}_{k+1} R_\theta, {}_{2k-1} R_\theta, \dots$ 等函数. 如取定 k , 则 ${}_k R_\theta, {}_{k-1} R_\theta, {}_{k+1} R_\theta, {}_{2k-1} R_\theta, \dots$ 又是极角 θ 的函数. 当 θ 从 0 到 2π 变化一周, 可描画出具体的多凸凹圆曲线, 如图 1.1 实线部分.

② 当 θ 给定后 ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 依次取 $k=3, 5, \dots, 2n+1$ 奇次时也得一系列的极半径 ${}_k R_\theta, {}_{k-1} R_\theta, {}_{k+1} R_\theta, {}_{2k-1} R_\theta, \dots$ 等函数. 当 θ 从 0 至 $\frac{\pi}{2}$ 变化 $\frac{1}{4}$ 周, 可描画出具体的 $\frac{1}{4}$ 多凸凹圆曲线, 如图 1.1 第一象限所示的虚线部分.

证明

引用定理①(关于连续函数四则运算), 并根据题设已知条件, 多凸凹圆面极半径方阵幂三角函数系 $f[(\cos^k \theta + \sin^k \theta)^{-\frac{1}{k}}], f[(\cos^{\frac{k}{k-1}} \theta + \sin^{\frac{k}{k-1}} \theta)^{-\frac{(k-1)}{k}}], f[(\cos^{\frac{k}{k+1}} \theta + \sin^{\frac{k}{k+1}} \theta)^{-\frac{(k+1)}{k}}], f[(\cos^{\frac{k}{2k-1}} \theta + \sin^{\frac{k}{2k-1}} \theta)^{-\frac{(2k-1)}{k}}], \dots$, 在同一区间 ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 及 ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 上连续. 则它们的和、差、积、商在此区间也连续.

① 清华大学数学教研组编:《高等数学上册》

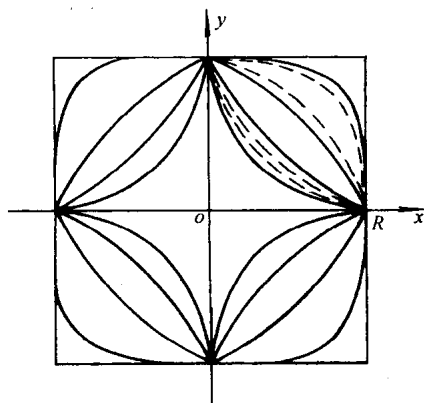


图 1.1 多凸凹圆曲线系

这里, 仅就多凸凹圆极半径方阵幂三角函数系的“积”情况加以证明, 其他三种情况的证明方法完全相仿. 而“积”的情况也只选择一种加以证明, 其他“积”情况的证明方法也相仿.

我们所要证明的是, 对于多凸凹圆极半径方阵幂三角函数系在同一区间 $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 及 $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 上的任何点 $(\cos^k \theta_0 + \sin^k \theta_0)^{-\frac{1}{k}}$, $(\cos^{\frac{k}{k-1}} \theta_0 + \sin^{\frac{k}{k-1}} \theta_0)^{-\frac{(k-1)}{k}}$, $(\cos^{\frac{k}{k+1}} \theta_0 + \sin^{\frac{k}{k+1}} \theta_0)^{-\frac{(k+1)}{k}}$, $(\cos^{\frac{k}{2k-1}} \theta_0 + \sin^{\frac{k}{2k-1}} \theta_0)^{-\frac{(2k-1)}{k}}$, ... 处都成立等式

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \{ f[(\cos^k \theta + \sin^k \theta)^{-\frac{1}{k}}] \cdot f[(\cos^{\frac{k}{k-1}} \theta + \sin^{\frac{k}{k-1}} \theta)^{-\frac{(2k-1)}{k}}] \} = f[(\cos^k \theta_0 + \sin^k \theta_0)^{-\frac{1}{k}}] \cdot f[(\cos^{\frac{k}{k-1}} \theta_0 + \sin^{\frac{k}{k-1}} \theta_0)^{-\frac{(2k-1)}{k}}] \quad (1.5)$$

据已知条件 $f[(\cos^k \theta + \sin^k \theta)^{-\frac{1}{k}}]$, $f[(\cos^{\frac{k}{k-1}} \theta + \sin^{\frac{k}{k-1}} \theta)^{-\frac{(2k-1)}{k}}]$

$\sin^{\frac{k}{k-1}}\theta)^{-\frac{(k-1)}{k}}], f[(\cos^{\frac{k}{k+1}}\theta + \sin^{\frac{k}{k+1}}\theta)^{-\frac{(k+1)}{k}}], f[(\cos^{\frac{k}{2k-1}}\theta + \sin^{\frac{k}{2k-1}}\theta)^{-\frac{(2k-1)}{k}}], \dots$, 在区间 $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 及 $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 上的任何点 $(\cos^k\theta_0 + \sin^k\theta_0)^{-\frac{1}{k}}, (\cos^{\frac{k}{k-1}}\theta_0 + \sin^{\frac{k}{k-1}}\theta_0)^{-\frac{(k-1)}{k}}, (\cos^{\frac{k}{k+1}}\theta_0 + \sin^{\frac{k}{k+1}}\theta_0)^{-\frac{(k+1)}{k}}, (\cos^{\frac{k}{2k-1}}\theta_0 + \sin^{\frac{k}{2k-1}}\theta_0)^{-\frac{(2k-1)}{k}}, \dots$ 处是连续的, 即等式

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f[(\cos^k\theta + \sin^k\theta)^{-\frac{1}{k}}] = f[(\cos^k\theta_0 + \sin^k\theta_0)^{-\frac{1}{k}}] \quad (1.6)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f[(\cos^{\frac{k}{k-1}}\theta + \sin^{\frac{k}{k-1}}\theta)^{-\frac{(k-1)}{k}}] = f[(\cos^{\frac{k}{k-1}}\theta_0 + \sin^{\frac{k}{k-1}}\theta_0)^{-\frac{(k-1)}{k}}] \quad (1.7)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f[(\cos^{\frac{k}{k+1}}\theta + \sin^{\frac{k}{k+1}}\theta)^{-\frac{(k+1)}{k}}] = f[(\cos^{\frac{k}{k+1}}\theta_0 + \sin^{\frac{k}{k+1}}\theta_0)^{-\frac{(k+1)}{k}}] \quad (1.8)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f[(\cos^{\frac{k}{2k-1}}\theta + \sin^{\frac{k}{2k-1}}\theta)^{-\frac{(2k-1)}{k}}] = f[(\cos^{\frac{k}{2k-1}}\theta_0 + \sin^{\frac{k}{2k-1}}\theta_0)^{-\frac{(2k-1)}{k}}] \quad (1.9)$$

... ..

根据极限运算法则我们得到(选择一种)

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \{f[(\cos^k\theta + \sin^k\theta)^{-\frac{1}{k}}] \cdot f[(\cos^{\frac{k}{2k-1}}\theta + \sin^{\frac{k}{2k-1}}\theta)^{-\frac{(2k-1)}{k}}]\} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f[(\cos^k\theta + \sin^k\theta)^{-\frac{1}{k}}] \cdot \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f[(\cos^{\frac{k}{2k-1}}\theta + \sin^{\frac{k}{2k-1}}\theta)^{-\frac{(2k-1)}{k}}] \\ &= f[(\cos^k\theta_0 + \sin^k\theta_0)^{-\frac{1}{k}}] \cdot f[(\cos^{\frac{k}{2k-1}}\theta_0 + \sin^{\frac{k}{2k-1}}\theta_0)^{-\frac{(2k-1)}{k}}] \end{aligned}$$

上述的证明, 说明了(1.1), (1.2), (1.3), (1.4)式在同一区间上连续.

然后通过数学归纳法从函数系的指数方面进一步证明 (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) 式的成立. 这里选择多凸凹圆系中三角函数 $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 作为多凸凹圆极半径方阵幂三角函数系解剖一点, 就可证明 (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) 式的成立. 设

$$2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} = 1 \quad (1.10)$$

$$2^{\frac{1}{2}-\frac{k-1}{k}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{k}{k-1}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right]^{\frac{k-1}{k}} = 1 \quad (1.11)$$

$$2^{\frac{1}{2}-\frac{k+1}{k}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{k}{k+1}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{k}{k+1}} \right]^{\frac{k+1}{k}} = 1 \quad (1.12)$$

$$2^{\frac{1}{2}-\frac{2k-1}{k}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{k}{2k-1}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{k}{2k-1}} \right]^{\frac{2k-1}{k}} = 1 \quad (1.13)$$

... ..

将上述 (1.10), (1.11), (1.12), (1.13) 式中, 只选其一给予证明, 如式 (1.10)

$$2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} = 1$$

如 $n=1, 2, 3, \dots, r$ 自然数.

当 $k=n+1$ (即 $n=1$) 时, (k 为 >2 的自然数), (1.10) 式成立.

假设 (1.10) 式对 $k \leq n+1$ 时, 都是成立的, 即