数学分析习题集

题解

曹 敏 谦

5

上海交通大学应用数学系

数学分析习题集

题　　解

曹　敏　谦

上海交通大学应用数学系

封面设计：童品苗 张建元

校　　对：孙薇荣 裘义端

数学分析习题集
题　　解

上海交通大学印刷厂印刷

内部教材　书号：8013

本解答系根据李荣涷译 Б.П. 吉米多维奇著"数学分析习题集"(修订本)而作。第五分册包括第三章的习题。

目　　录

第三章 不定积分

§1. 最简单的不定积分

1°　不定积分的概念　若$f(x)$为连续函数及

$$F'(x)=f(x),$$

则
$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

式中C为任意常数。

2°　不定积分的基本性质:

(а) $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$;　　(б) $\int d\Phi(x)=\Phi(x)+C$;

(в) $\int Af(x)dx=A\int f(x)dx$　($A=$常数);

(г) $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$。

3°　最简积分表:

I. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$　$(n\neq-1)$;

II. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$　$(x\neq0)$;

III. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg} x+C,\\-\operatorname{arc\,ctg} x+C;\end{cases}$

IV. $\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$;

V. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\-\arccos x+C;\end{cases}$

VI. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm1}|+C$;

VII. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0)$; $\int e^x dx = e^x + C$;

VIII. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

IX. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

X. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

XI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

XII. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$;

XIII. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$;

XIV. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$。

4° 积分的基本方法

(a) 引入新变数法 若

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

则
$$\int f(u)du = F(u) + C, \text{式中 } u = \varphi(x)。$$

(б) 分项积分法 若

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

则
$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx。$$

(в) 代入法 假设

$x = \varphi(t)$，式中 $\varphi(t)$ 及其导函数 $\varphi'(t)$ 为连续的，

则得
$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt。$$

(г) 分部积分法　若 u 和 v 为 x 的可微分函数，则

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du。$$

为了简便计，这一章答案中要加的任意常数都省略了。

利用最简积分表，求出下列积分(1628–1653 题)：

1628. $\int (3-x^2)^3 dx$。

解：$I = \int (27-27x^2+9x^4-x^6)dx = 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$。

1629. $\int x^2(5-x)^4 dx$。

解：$I = \int (625x^2 - 500x^3 + 150x^4 - 20x^5 + x^6)dx$

$= \frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7$。

1630. $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)dx$。

解：$I = \int (1-6x+11x^2-6x^3)dx$

$= x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4$。

1631. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$。

解：$I = \int \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = x - \frac{1}{x} - 2\ln|x|$。

1632. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)dx$。

解：$I = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2}$。

1633. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$。

解: $I=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}$。

1634. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$。

解: $I=\int\left(x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)dx$

$=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}$。

1635. $\int\frac{(1-x)^3dx}{x\sqrt[3]{x}}$。

解: $I=\int(x^{-\frac{4}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}})dx$

$=-3x^{-\frac{1}{3}}-\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$

$=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)$。

1636. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$。

解: $I=\int(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}=\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}$。

1637. $\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx$。

解: $I=\int(2-2\sqrt{2}\sqrt[3]{3}x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}})dx$

$=2x-\frac{12}{5}\sqrt{2}\sqrt[3]{3}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}x^{\frac{2}{3}}$

$=2x-\frac{12}{5}(72x^5)^{\frac{1}{6}}+\frac{3}{2}(9x^2)^{\frac{1}{3}}$。

1638. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$。

解: $I=\int\frac{1}{x^3}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}$。

1639. $\int\frac{x^2\,dx}{1+x^2}$。

解: $I=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\operatorname{arc\,tg}x$。

1640. $\int\frac{x^2\,dx}{1-x^2}$。

解: $I=\int\left(\frac{1}{1-x^2}-1\right)dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x$。

1641. $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx$。

解: $I=\int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx=x+2\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$。

1642. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$。

解: $I=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$

$=\arcsin x+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$。

1643. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$。

解: $I=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$

$=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|$。

1644. $\int(2^x+3^x)^2dx$。

解: $I=\int(4^x+2\cdot6^x+9^x)dx=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2\cdot6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}$。

1645. $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$。

解: $I=\int\left(2\cdot5^{-x}-\frac{1}{5}\cdot2^{-x}\right)dx$

$$=-\frac{2}{\ln 5}\cdot5^{-x}+\frac{1}{5\ln 2}\cdot2^{-x}$$

$$=-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x。$$

1646. $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$。

解: $I=\int(e^{2x}-e^x+1)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x$。

1647. $\int(1+\sin x+\cos x)dx$。

解: $I=x-\cos x+\sin x$。

1648. $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$。

解: $I=\int\sqrt{\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x}\,dx$

$$=\int|\cos x-\sin x|dx=\sqrt{2}\int\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx。$$

由于

$$\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$=\begin{cases}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & \text{当 } 2n\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{4}<2n\pi+\frac{\pi}{2},\\ -\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & \text{当 } 2n\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{4}<2n\pi+\frac{3\pi}{2},\end{cases}$$

$(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$,

故若$\varphi(x)$为$\sqrt{1-\sin 2x}$的一个原函数，则

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+A_n, & \text{当 } 2n\pi-\dfrac{3\pi}{4}\leqslant x<2n\pi+\dfrac{\pi}{4},\\ -\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+B_n, & \text{当 } 2n\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant x<2n\pi+\dfrac{5\pi}{4},\end{cases}$$

其中A_n及B_n为待定常数，由$\varphi(x)$的连续性来决定。

A_0本可以任意选取，为确定起见，取$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，则

$$A_0=0,$$

于是

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-0}\varphi(x)=\sqrt{2}+A_0=\sqrt{2},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\varphi(x)=-\sqrt{2}+B_0。$$

由$\varphi(x)$的连续性得$B_0=2\sqrt{2}$。

同理考虑$\varphi(x)$在$x=\dfrac{5\pi}{4}$及$x=\dfrac{9\pi}{4}$的连续性，可得

$$A_1=4\sqrt{2}\quad 及 \quad B_1=6\sqrt{2}。$$

一般地，考虑$\varphi(x)$在$x=2n\pi-\dfrac{3\pi}{4}$及$x=2n\pi+\dfrac{\pi}{4}$的连续性可得

$$A_n=4n\sqrt{2},\ B_n=(4n+2)\sqrt{2}\quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)。$$

由此得

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+4n\sqrt{2},\\ \qquad\qquad \text{当 } 2n\pi-\dfrac{3\pi}{4}\leqslant x<2n\pi+\dfrac{\pi}{4},\\ -\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+(4n+2)\sqrt{2},\\ \qquad\qquad \text{当 } 2n\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant x<2n\pi+\dfrac{3\pi}{4}。\end{cases}$$

将此合并得

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sgn}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$+2\sqrt{2}\left[\frac{1}{\pi}\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\right],$$

其中$[u]$表示u的整数部分。

如果把积分常数也写出来，则有

$$\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx=\varphi(x)+C。$$

注：本题不能简单地用下述解法

$$I=\int|\sin x-\cos x|\,dx=\int(\sin x-\cos x)\operatorname{sgn}(\sin x-\cos x)\,dx$$
$$=-(\cos x+\sin x)\operatorname{sgn}(\sin x-\cos x)+C$$
$$=(\cos x+\sin x)\operatorname{sgn}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C,$$

这样做破坏了原函数的连续性。

1649. $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx$。

解： $I=\int(\csc^2 x-1)\,dx=-\operatorname{ctg}x-x$。

1650. $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$。

解： $I=\int(\sec^2 x-1)\,dx=\operatorname{tg}x-x$。

1651. $\int(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)\,dx$。

解： $I=a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x$。

1652. $\int\operatorname{th}^2 x\,dx$。

解： $I=\int(1-\operatorname{sech}^2 x)\,dx=x-\operatorname{th}x$。

1653. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$。

解: $I=\int(1+\operatorname{csch}^2 x)\,dx=x-\operatorname{cth} x$。

1654. 证明：若

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

则
$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0)。$$

证: 令 $u=ax+b$，则

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=\frac{1}{a}\frac{d}{dx}F(u)=\frac{1}{a}F'(u)\frac{du}{dx}$$

$$=F'(u)=f(u)=f(ax+b)。$$

故
$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C。$$

求出下列积分(1655-1673 题)：

1655. $\int \frac{dx}{x+a}$。

解: $I=\ln|x+a|$。

1656. $\int(2x-3)^{10}\,dx$。

解: 由于 $\int x^{10}\,dx=\frac{x^{11}}{11}$，故据 1654 题，

$$I=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}(2x-3)^{11}=\frac{1}{22}(2x-3)^{11}。$$

1657. $\int\sqrt[3]{1-3x}\,dx$。

解: 由于 $\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$，故据 1654 题，

$$I=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}。$$

1658. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$。

解: $I=-\frac{1}{5}\cdot 2\sqrt{2-5x}=-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$。

1659. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$。

解: $I=\int (5x-2)^{-\frac{5}{2}}dx=\frac{1}{5}\left[-\frac{2}{3}(5x-2)^{-\frac{3}{2}}\right]$

$$=-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}。$$

1660. $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx$。

解: $I=-\int \frac{(x-1)^{\frac{2}{5}}}{x-1}dx$

$$=-\int (x-1)^{-\frac{3}{5}}dx=-\frac{5}{2}(x-1)^{\frac{2}{5}}。$$

1661. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$。

解: $I=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\ \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)。$$

1662. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$

解:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1-\frac{3}{2}x^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{2}\ \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right|$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right|。$$

1663. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$。

解: $I=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\sqrt{1-\frac{3}{2}x^2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)。$$

1664. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$。

解: $I=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}\right|,$$

即 $I=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}|$。

1665. $\int(e^{-x}+e^{-2x})dx$。

解: $I=-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$。

1666. $\int(\sin 5x-\sin 5\alpha)dx$。

解: $I=-\frac{1}{5}\cos 5x-x\sin 5\alpha$。

1667. $\int\frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$。

解: $I=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$。

1668. $\int\frac{dx}{1+\cos x}$。

解: $I=\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$。

1669. $\int\frac{dx}{1-\cos x}$。

解: $I=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}=-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$。

1670. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$。

解: $I=\int\frac{d\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$

$=\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$(用 1668 题)$=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$。

1671. $\int[\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]\,dx$。

解: $I=\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x+1)+\operatorname{sh}(2x-1)]$。

1672. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$。

解: $I=2\int\operatorname{sech}^2\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right)=2\operatorname{th}\frac{x}{2}$。