数学通报丛书

趣味的数学问题

中国数学会数学通报編委会編

科学技术出版社

趣味的数学問題

中国数学会数学通报編委会編

科学技术出版社

1960年·北京

趣味的数学問題
中国数学会数学通报編委会編
*
科学技术出版社出版
（北京市西直門外郭家溝）
北京市書刊出版業營業許可証出字第091號
北京市五三五工厂印刷
新华書店科技發行所發行　各地新华書店經售
*
开本：850×1168 $\frac{1}{32}$ 印張：$2\frac{5}{8}$ 字数：57,000
1960年 1 月第 1 版　1960年 1 月第 1 次印刷
印数：28,077

总号：1455 統一書号：13051・296
定价：（ 9 ）3角3分

出版者的話

数学通报自創刊以来，發表了不少对讀者进修数学、扩大数学知識領域有帮助的文章，特别是發表了不少有关中等学校数学教学的文章，受到了讀者的欢迎，并經常收到讀者来信要求将这些文章分类編成單行本出版。数学通报編委会为了滿足讀者这一需要，特将該刊自創刊号起至1959年中的文章，选其質量較好的并按性質分成数学知識介紹和中等数学教学两部分出書。前一部分已选編成"綫性代数多項式"、"实数極限近似計算"、"几何作圖非欧几何邏輯初步"、"概率和数理統計"、"关于电子数字計算机的一些問題"、"初等数学史"、"趣味的数学問題"和"中等数学習題解答集"；后一部分已选編选成"中学数学教学的一般問題"、"初中数学教材和教法分析"和"高中数学教材和教法分析"。

这十一本書的內容，有适合初等数学的，或适合在初等数学基础上进一步提高的，因此，具有相当高中数学水平的讀者、中等学校数学教师、大、中学生及数学爱好者均可閱讀。

"趣味的数学問題"是这套丛書中的一本。

目　次

三 角 七 巧 板

赵 訪 熊

要学好三角学，首先必須掌握六个三角函数的定义和几个基本的三角恒等式．当然，死記公式不是好办法．只有通过具体的反复的运用，才能把它們眞正掌握起来．为了这个目的，作者設計一种数学玩具，叫做“三角七巧板”．現在把它介紹給讀者們．

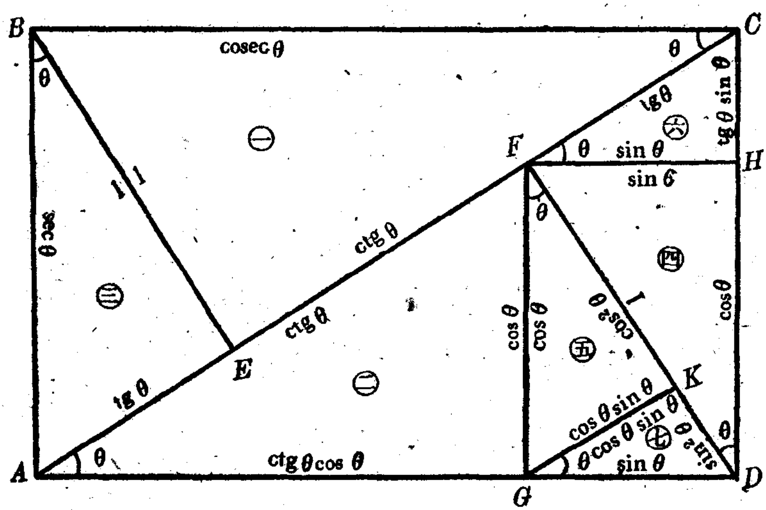

圖 1

“三角七巧板”的制法是：拿一塊長方形的厚紙或木板，把它分成七个相似直角三角形．長方形的長和寬的比是任意的，例如在本文的圖 1 里，这个比是 8:5．假定在圖 1 里用 A、B、C、D 表示長方形的四个頂点．作对角綫 AC 把長方形分成两个相等的直角三角形．从另外两个頂点 B 和 D 分别作垂直綫 BE 和 DF 到 AC 上，再从 F 作垂直綫 FG 到 AD 上和垂直綫 FH

到 CD 上，最后从 G 作垂直綫 GK 到 DF 上，这样我們就得到了如圖 1 上所画的七个相似直角三角形. 我們还給它們从大到小分别編上号碼. 沿着所作的綫段把長方形板分成七塊三角形板以后，在每塊板的較小的銳角上注明 θ 来代表这个角，而在每条边上，便依照圖上所示，注明代表边長的 1 或者三角函数；在每塊三角板的背面也同样地注明角 θ 和边長. 这样，一副由七塊相似直角三角形板組成的"三角七巧板"就算完成了.

在这样一副三角七巧板中，每塊板的边長間的每一个几何关系，都代表三角函数間的一个恒等式. 而把几塊三角板拚成簡單的几何圖形后，又可以看出新的三角恒等式来. 初学三角学的讀者們，不妨自己做一副"三角七巧板"来玩玩，通过游戏来溫習和逐步掌握三角函数的定义和基本的恒等式.

那么，"三角七巧板"是怎样使用的呢？

第一，弄明白每塊三角板各边的長度为什么要这样标出，是六个三角函数定义的很好溫習. 例如拿起三角板（一），在这塊三角板上 θ 角的对边是 1. 那么为什么斜边是 $\operatorname{cosec}\theta$？答案是：斜边比对边按定义是 $\operatorname{cosec}\theta$，对边既然是 1，斜边自然就应該是 $\operatorname{cosec}\theta$ 了. 同样地，我們也可以理解为什么邻边是 $\operatorname{ctg}\theta$，等等.

第二，利用勾股弦定理和其他几何定理，可以从圖 1 看出下列的三角恒等式：

1. 从三角板(四)，根据勾股弦定理，可以得出恒等式：$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. 又从三角板（四）中的斜边等于三角板（五）中 θ 的邻边和三角板（七）中 θ 的对边的和，也可以得出这个恒等式.

2. 从三角板(三)，根据勾股弦定理，可以得出恒等式：$1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta$.

3. 从三角板(一)，根据勾股弦定理，可以得出恒等式：$1+\operatorname{ctg}^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$.

4. 从三角板(一)和（三）合成的直角三角形，根据勾股

弦定理，可以得出恒等式：

$$(\mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta)^2=\sec^2\theta+\mathrm{cosec}^2\theta.$$

5． 从長方形上下两边相等，可以得出恒等式：

$$\mathrm{cosec}=\sin\theta+\mathrm{ctg}\,\theta\cos\theta.$$

6． 从長方形左右两边相等，可以得出恒等式：

$$\sec\theta=\cos\theta+\mathrm{tg}\,\theta\sin\theta.$$

7． 从三角板(一)和(三)合成的直角三角形的面积的两种求法，可以得出恒等式：$\sec\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta=\mathrm{tg}\,\theta+\mathrm{ctg}\,\theta$.

証明恒等式 2—7，是三角学中的很好的練習．

第三，把(四)、(五)和(七)三塊三角板拚成梯形(圖 2)，可以看出倍角公式：

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta,$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta.$$

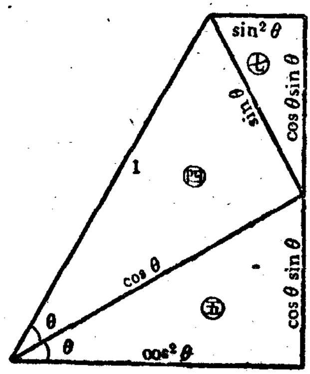

圖 2

这副七巧板可以拚成另外两个相似梯形，即由三角板(一)、(二)和(四)拚成的梯形和由三角板(三)、(五)、(六)和(七)拚成的梯形．这两个梯形与圖 2 的梯形也是相似的．从这两个梯形也可以看出 $\sin 2\theta$ 及 $\cos 2\theta$ 的公式．

从三角板(一)、(二)和(四)拚成的梯形，可以看出：

$$\sin 2\theta=\frac{2\cos\theta}{\mathrm{cosec}\theta},\quad \cos 2\theta=\frac{\mathrm{ctg}\,\theta\cos\theta-\sin\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta}.$$

从三角板(三)、(五)、(六)和(七)拚成的梯形，可以看出：

$$\sin 2\theta=\frac{2\sin\theta}{\sec\theta},\quad \cos 2\theta=\frac{\cos\theta-\mathrm{tg}\,\theta\sin\theta}{\sec\theta}.$$

第四，把七巧板內任意两塊三角板叠在一起(圖 3)，根据相似三角形对应边之比的相等，可以看出三角函数間的比例关

系.圖 3 是由三角板（一）和(四）叠成的. 从圖 3 可以看出：

$$\frac{\operatorname{cosec}\theta}{1}=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\cos\theta}.$$

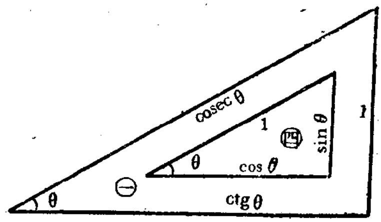

圖 3

三角板(三)和(四)叠在一起，可以看出：

$$\frac{\sec\theta}{1}=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sin\theta}.$$

第五，在每塊三角板上，沒有注明 θ 的另一个銳角是 θ 的余角 $\theta'=90^\circ-\theta$.

从三角板（一）可以看出： $\operatorname{tg}\theta'=\operatorname{ctg}\theta$, $\sec\theta'=\operatorname{cosec}\theta$.

从三角板（四）可以看出： $\cos\theta'=\sin\theta$, $\sin\theta'=\cos\theta$.

从三角板（三）可以看出： $\operatorname{ctg}\theta'=\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{cosec}\theta'=\sec\theta$.

第六，解直角三角的应用問題的时候，可以利用合适的三角板求出未知边的長度. 例如已知角 θ 和邻边的長度 a 求对边和斜边的長度. 选出邻边是 1 的三角板（三)，(三）上的对边是 $\operatorname{tg}\theta$，斜边是 $\sec\theta$； 由比例知道所求对边的長度是 $a\operatorname{tg}\theta$，斜边的長度是 $a\sec\theta$.

第七，把（一)、(三)、(四)、(五）和（七）五塊三角板拚成像圖 4 所示的圖形. 請注意，有阴影的三塊三角板(四)、(五）和（七）是叠在三角板（一）和（三）上面的. 假定 O 点是直角坐标原点，三角板（四）的斜边在 X-軸上，三角板(五)和(七)合成的三角形的斜边在 Y-軸上. 这样 $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\sec\theta$、$\operatorname{cosec}\theta$ 就可以在以 θ 为角的矢徑上量出，而 $\operatorname{tg}\theta$ 及 $\operatorname{ctg}\theta$

就可以在 $x=+1$，$y=+1$ 的 直綫上量出.

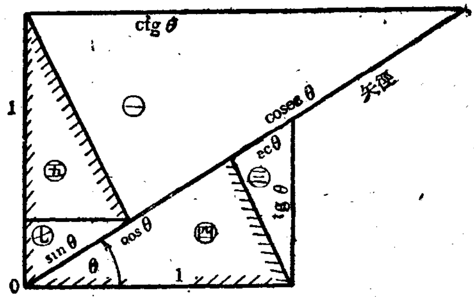

圖 4

几何学告訴我們：固定斜边的直角三角形的頂点的軌迹，是以斜边为直徑的圓，于是我們就得到下列三角函数圖的原理.

把圖 4 中由三角板（五）和（七）合成的三角形的斜边放大到 10 厘米，用它做直徑作圓，就是圖 5 中的 $\sin\theta$ 圓. 同样，把圖 4 中的三角板（四）的斜边放大到 10 厘米，用它做直徑作圓，就是圖 5 中的 $\cos\theta$ 圓. 此外再照圖 5 上所画的那样，作 $\mathrm{tg}\,\theta$ 和ctg 方框以及角度圓. 比較圖 4 和圖 5，那就可以看到；方框竪綫右边表明長度的均匀刻度是代表对应的 $\mathrm{tg}\,\theta$ 的値，而方框竪綫左边表明長度倒数的刻度就代表$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta}$即 $\mathrm{ctg}\theta$的値，我們把它叫做倒数尺；同样，方框横綫下方表明長度的均匀刻度是代表对应的 $\mathrm{ctg}\theta$的値，而方框横綫上方表明長度倒数的刻度就代表$\frac{1}{\mathrm{ctg}\theta}$即 $\mathrm{tg}\,\theta$ 的値，我們也把它叫做倒数尺. 这就是为什么我們在方框外面写上 $\mathrm{tg}\,\theta$ 方框，而在方框里面写上 $\mathrm{ctg}\,\theta$ 方框 的 原故.

三角函数圖的使用完全根据圖 4 的原理. 用市上出售的透明 15 厘米尺，使尺上的 0 点与圖 5 上的原点 O 重合，移动尺的另一头，使尺边通过角度圓上給定的角度（这时候尺边就相当于圖 4 中的矢徑），就可以求得这个角度的 各个三 角 函 数

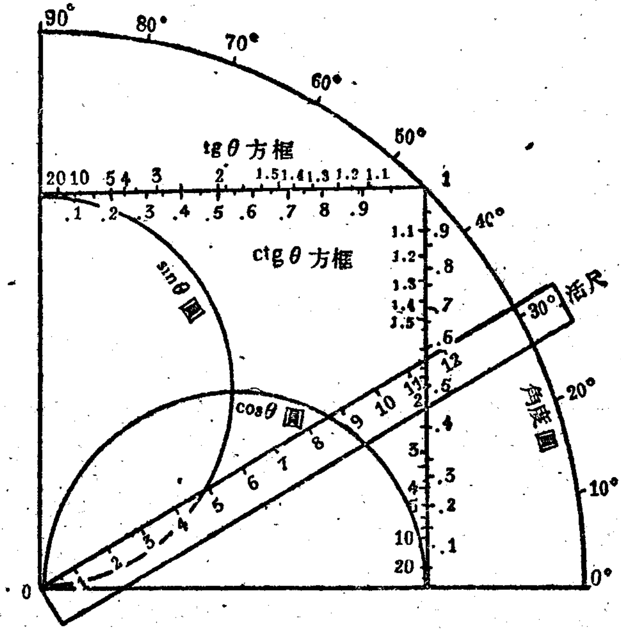

圖 5

了，例如求30°的各个三角函数，在尺边与sin θ 圓相交处，从活尺上可以讀出 sin30°＝0.50，又利用方框上的倒数尺可以讀出 0.50 的倒数＝2，这便是 cosec 30° 的值；在尺边与 cos θ 相交处，从活尺上可以讀出 cos30°＝0.87，利用倒数尺又可以讀出 0.87 的倒数＝1.15，这便是 sec 30° 的值；在尺边与方框的相交处，从 tg θ 方框讀出 tg30°＝0.58，又从 ctgθ 方框讀出它的倒数 ctg30°＝1.73．利用这个圖还可以求出反三角函数的值。

綫　画

裘　光　明

I、什么叫做綫画

綫画是由有限个点和有限条綫所組成的圖形，圖形中的点叫做綫画的頂点，綫叫做綫画的边；作为綫画，則圖形还必須滿足这样几个条件：（1）每个頂点至少是一条边的端点，（2）每条边都有两个頂点(可以重合)作为端点（因此每条边都是直綫段或者曲綫段），（3）各条边都不自行相交也不彼此相交．

平面几何和立体几何中所遇到的很多由点和綫組成的圖形都是綫画，但是上述三个条件把某些圖形排除了出去．条件（1）是說綫画中不能有孤立的頂点；条件（2）是說綫画中的边必須有端点(因此直綫或者圓都不是綫画)，也不能只有一个端点(因此射綫也不是綫画)，这时必須注意，两个端点可以重合因此圓和圓上的一个点所組成的圖形是一个綫画，看圖1；条件（3）是說，相交的綫除非把所有交点都算在頂点之內，同时把这条或这几条綫适当地算做若干条边，才能是一个綫画．

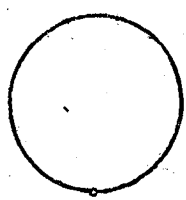

圖 1

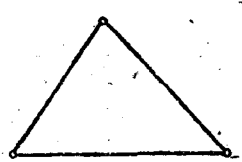

圖 2

綫画的例子可以举出很多．三角形看做由三个頂点和三条边所組成的圖形时就是一个綫画(圖2)．两个相交的圓，当把

它看做是由两个交点和以这两个点为端点的四条弧所組成的圖形时(圖 3)，也是一个綫画．四边形只算它的頂点和边时是一个綫画，添上两条对角綫就不是綫画了，但是假如我們把对角綫的交点也算做頂点而且把每条对角綫都算做由交点分成的两条边，則它又是綫画了(圖 4)．又例如电車或者公共汽車路綫圖一般也都是綫画．

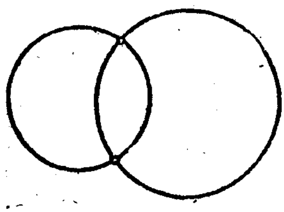

圖 3

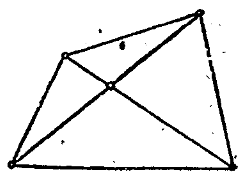

圖 4

因此，假如要說得严謹一些，綫画是两种元素(頂点和边)的集合，这两种元素之間只有唯一的关系：頂点是边的端点．通常把綫看成由点組成的事，在綫画中絲毫不起作用，所以我們在以后討論綫画时总是把边也(像頂点一样)当做独立的对象来处理的．为了說話方便，我們不妨把綫画中頂点和边之間的上述唯一的关系叫做連接关系，当頂点是边的端点时，我們就說頂点連接边，也說边連接頂点；同时还把連接同一个頂点的边說成連接的边，在相反的情形則說它們是不連接的．

Ⅱ、綫画中有些什么数学問題

綫画中可以討論的数学問題有不少，而且其中还包括好些有趣的或者著名的数学問題．我們在短短的时間內不可能談得太多，讓我們在这里先举出一些例子，其中有我們准备深入討論的，但是也有我們不預备談得很多甚至不进行討論的．

(1) 綫画的頂点至少連接一条边，但是可以連接多于一

条的边，因此可以从頂点所連接的边数来区分頂点．我們把一个頂点所連結的边数叫做这个頂点的叉数，当一个頂点是一条边的重合的端点时，我們还認为它連結了两条（虽然是重合的）边，即認为它是2叉的．这样，我們看到，圖1和2中的点都是2叉頂点，圖3中的点都是4叉頂点，圖4中四边形的頂点是3叉頂点，对角綫交点是4叉頂点．

頂点的阶可以有奇偶之分，我們特别把叉数是奇数的頂点叫做奇頂点，把叉数是偶数的頂点叫做偶頂点．关于奇頂点有下列簡單而又有用的一个命題：

（1）一个綫画的奇頂点的个数总是偶数．

这个命題不难証明．因为綫画的边都有两个頂点，在就頂点来考虑它所連結的边数时，每条边都計算了两次，所以綫画中所有頂点的叉数之和一定是偶数(等于边数的两倍)．然而偶頂点的叉数之和也是偶数，因而所有奇頂点的叉数之和也非是偶数不可，而这只有在奇頂点的个数是偶数时才可能成立．

（2）綫画可以連成一片，也可以分成几片．为了說明这一点，我們再引用几个名詞．

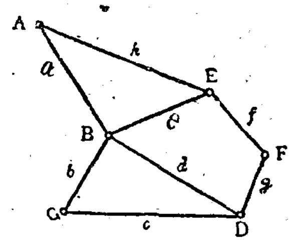

圖 5

一串編好号碼的前后連接的边：a_1、a_2、……、a_n（即每两条号碼相連的边a_i、a_{i+1}都是連接的边），假如其中沒有重复的边，就叫做綫画中的一条路（例如圖5中的$a\,b\,c\,d\,e\,f\,g$）現在不难看到，綫画是否連成一片，就看綫画中的每两个頂点是否都有路相連．

綫画叫做連通的，假如每个頂点都有路相連；否則叫做不連通的．因为不連通的綫画总由几个連通的綫画組成，所以平常討論的总是連通的綫画．（圖1—5中的綫画每一个都是連通的綫画，但是假如把它們画在一个圖上，則就得到由五个連通的綫画組成的一个不連通的綫画）．

（3）一个綫画，假如能把所有的边排成一条路，就叫做一个一笔画．一笔画的命名是因为这时假如順着边在路中的次序用笔来把它們画出，我們可以一次而且不重复地把綫画中所有的边都画出来．

（4）綫画中的一条路，假如看做由它所包含的边和这些边的頂点組成时，它本身也是一个綫画．因此不妨把这些边的頂点叫做路的頂点．路的頂点所連接的路中的边数，叫做頂点的重数（当把路本身看做綫画时，頂点的重数实际上就是它的叉数），假如在圖5的路 $abcdefg$ 中，頂点 A 的重数是1，B 的重数是4，C 的重数是2，D 的重数是3．

綫画中的一条路，假如所有頂点的重数都不超过2，就叫做一条簡單路．不难知道，簡單路的頂点中，除去两端的頂点外，都有重数2可以証明，当綫画的两个頂点有路相連时，一定有簡單路相連．例如圖5中連接頂点 A 和 D 的路 $abcdefg$ 不是簡單路，但是我們可以从其中分出連接頂点 A 和 D 的簡單路 ad 或者 abc 或者 $aefg$．

簡單路作为綫画，它是連通的而且它的所有頂点的叉数都不超过2．反之，連通的綫画当所有頂点的叉数都不超过2时，一定自身就是一条簡單路．

綫画中的一条路，当它的两个端点重合时，叫做一条閉路，例如圖5中的 $abcdeh$ 就是以 A 为重合端点的一条閉路．簡單閉路叫做圈，上述閉路中頂点 B 有重数4，所以不是圈，但是閉路 bcd 是一个圈．明显地，圈中的頂点都有重数2．

一个連通的綫画，假如在其中找不出一个圈，就叫做一棵树（圖6）．

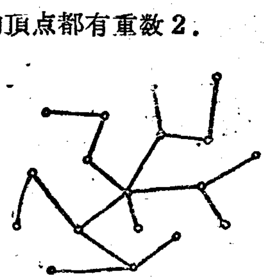

圖 6

（5）在綫画的頂点数和边数之間，一般地說并无显著的关系．但是对于某些特殊的綫画，頂点数和边数却有密切的关系，

譬如对于一棵树說，頂点数 正如等于边数 s 加1：

$$v=s+1.$$

（6）綫画可以画在平面（或其他曲面例如球面）上，也可以画在空間中，可以証明，任意抽象地給一个綫画［即抽象地給出滿足条件（1）至（3）的点和綫的集合］，总可以在空間中具体地把它們画出．但是并不是每一个抽象地給的綫画都能在平面上（或者球面上）画出的，讓我們举出两个著名的例子：

① 5个点和連結每两个点的10条綫組成的一个綫画，不能在平面上画出．我們很容易可以在平面上画出4个点 A、B、C、D 和連結它們每两个的6条綫（圖7），这时平面就被分成

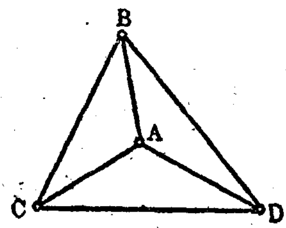

圖 7

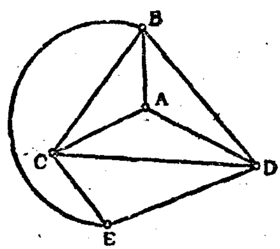

圖 8

了四部分（四个区域），于是不論第5个点 E 画在那一部分里，要不違背条件（1）至（3），总只能画出連結它与3个頂点的3条綫，第4条綫是无法画出的（例如圖8，在其中无法画出連結 A、E 的綫）．

② 6个点分成三个一組的两組，每两个不同組的点都用綫連起来，这样的6个点和9条綫組成一个綫画，这綫画也不能在平面上画出．这与綫画代表一个著名的問題："三家共用三个公用的地方（例如水井、磨坊、畜栏），要从每家筑三条路到这三个地方，不許有交叉的路，間

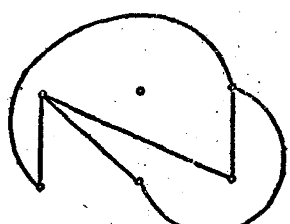
圖 9

如何筑法？从两家各筑三条路是不难的（圖9），但是在筑好以后，地面就被分成了不相連的四塊，这时不論第三家位于那一塊里，都只能筑出到两个地方的路，到第三个地方的路除非搭天桥或者打地洞才能滿足要求，可是这样就离开地面了．

Ⅱ、一　笔　画

綫画中最吸引人的首先是一笔画，这是因为一笔画以各种形式出現在数学游戏中，举些典型的例子如下：

（1）圖4能否一笔画成．

（2）公园中有修成圖10样子的小徑，沿小徑散步的游人能否一次不重复地走遍全部小徑．

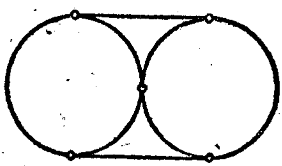

圖 10

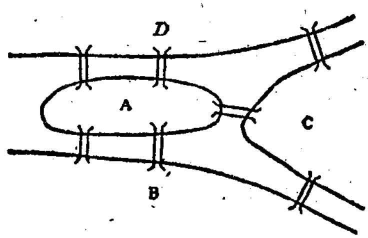

圖 11

（3）在圖11上画的是一条河流的分叉处和河中的一个小島，有七座桥分别把它們接通，問是否能一次不重复地走遍所有七座桥．这是著名的哥尼斯堡（現名加里宁格勒，在苏联）的七座桥的問題．

（4）圖12上画的是一座房屋的平面圖，設每間房都有一个門通到屋外，而且每两間房之間也都有一个門相通．問能否一次不重复地穿过每一个門．

前两个例子是綫画沒有問題，后两个例子形式上不是綫画，但是不难化成綫画．

对于例（3），假如用点 A 表示小島，用点 B、C、D 分别表示河岸，而且用連綫表示对应的桥梁，则圖11就变成了圖13．同