# 中学数学与逻辑

江苏人民出版社

# 中 学 数 学 与 逻 辑

赵 振 威

江苏人民出版社

中学数学与逻辑

赵振威

·

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
淮阴新华印刷厂印刷

1978年9月第1版
1978年9月第1次印刷
印数：1——240,000
书号：13100·016　定价：0.42元

# 前　　言

形式逻辑是一门关于思维形式和规律的科学。它的基本规律，是我们正确思维的最起码要求。伟大领袖和导师毛主席号召我们要学一点逻辑，并明确提出关于逻辑思维的基本要求：概念要明确，判断要恰当，推理要合乎逻辑，证明要有说服力。

逻辑思维的这些基本要求，对于中学数学教学是十分必要的。教学中，无论是讲述数学概念，推导数学公式，还是证明数学定理，解答数学习题，都需要运用形式逻辑的各种思维形式，遵守思维基本规律。学生中间出现的概念模糊不清，判断缺少根据，解题不得要领，证明逻辑混乱等等现象，也是和缺少逻辑知识密切相关的。因此，学一点逻辑，对于加强数学基础知识教学，提高学生分析问题、解决问题的能力，是很有帮助的。

本书试图以唯物辩证法作指导，从中学数学教学的实际需要出发，介绍一些数学中常用的逻辑知识。全书包括三个部分：绪论中分析了数学的抽象性特点，阐述了形式逻辑在数学中的积极作用；第一章至第五章，根据逻辑思维的基本要求，对思维形式（概念、判断、推理、证明）和思维基本规律（同一律、矛盾律、排中律、充足理由律）作比较系统的介绍，并结合中学数学教学中的有关问题，作了比较详细的讨论；结束语，运用一分为二的观点，指出形式逻辑的局限

性，并进一步阐明学习和运用形式逻辑必须以唯物辩证法作指导。每章都附有一定数量的练习题，供读者练习思考。

南京大学莫绍揆教授审阅了本书初稿，对笔者以热忱帮助，悉心指导，提出了极有价值的修改意见。陆明德、毛振濬、黄瑞清等同志，也提出了很多宝贵的建议。在此谨致诚挚的感谢。

由于笔者水平有限，缺点、错误在所难免，恳切希望读者批评指正。

作　者

一九七八年三月

# 目　　录

# 绪　论

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学。它和其它一切科学一样，也是人们在认识自然，改造自然，和大自然作斗争中，由于生产需要而产生，并随着生产的发展而发展起来的，是劳动人民几千年来生产斗争、科学实验知识的结晶。

数学有两个显著的特点：一个是它的实践性，数学来源于生产实践，服务于生产实践；一个是它的抽象性，数学的研究和成果，表现在抽象的形式之中。对此，恩格斯有一段精辟的论述："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。这些材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实。但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边"。（《反杜林论》）

数学的抽象性，是从长期实践经验中得来的。正是这种抽象性，才保证了数学结论的确定性和应用的广泛性。列宁指出："物质的抽象，自然规律的抽象，价值的抽象等等，一句话，那一切科学的（正确的、郑重的、不是荒唐的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。"（《黑格尔〈逻辑学〉一书摘要》）和其他科学相比较，数学的抽象又有着自己的特点。数学的抽象撇开对象的具体内容，仅仅保留空间形式和数量关系。因此，同一个数学概念的现实原型，在质的方面可以具有极大的差异。这个特点在最原始的

数学抽象中，例如自然数和简单几何图形的概念中，已经显示出来了。并且，随着实践活动的发展，数学的抽象程度逐步提高。数学不但研究那些直接从现实世界中抽象出来的空间形式和数量关系，而且还需要在已有数学理论的基础上，形成新概念、新理论。这就表明，数学的抽象不仅表现在广度上，而且表现在不同层次的深度上。恩格斯称数学是“一种研究思想事物（虽然它们是现实的摹写）的抽象的科学”。（《自然辩证法》）这是对数学抽象性的深刻概括。

数学的这种抽象性，使形式逻辑在数学理论的整理和加工过程中，表现了一定的积极作用。形式逻辑是一门关于思维的形式（概念、判断、推理、证明）及其规律（同一律、排中律、矛盾律、充足理由律）的科学，它要求思维过程的准确性和具有条理性。这些要求，对于数学特别是初等数学是合理的、必要的。首先，在数学理论的整理和加工中，无论是概念的表述，还是进行判断、推理，都需要运用形式逻辑的规则，遵循思维的基本规律。第二，数学中的推理论证，能够使我们对数学对象的考察从现实事物的个别的、偶然的状态中解脱出来，便于抓住数学问题的本质联系，从而使数学知识从一些个别的、特殊的经验事实上升到一般，具有普遍性，并把一些个别的、孤立的结果联系起来，使数学知识带上条理性，形成理论系统。第三，在数学理论的探索过程中，需要运用形式逻辑的各种方法（如归纳和演绎，分析和综合，类比和假设等等），需要从一定的概念出发，从刻划被考察对象的基本特性出发，运用逻辑推理，引出进一步的结论来。这样，逻辑推理又成为探求新结果的一个重要步骤。

恩格斯指出：“初等数学，即常数的数学，是在形式逻辑的范围内活动的，至少总的说来是这样”。（《反杜林论》）

从中学数学的内容来看，它所研究的数量关系，主要还是常量，它所讨论的空间形式，也是比较简单的。因此，在唯物辩证法的指导下，学一点逻辑知识，对于搞好中学数学教学是十分必要的。这将有助于我们正确地进行思维，在认识数学对象的过程中达到概念明确，判断恰当，推理合乎逻辑，证明有说服力；也有助于我们深刻理解数学本质，自觉掌握数学规律，提高分析问题和解决问题的能力。

# 第一章　数学概念

## §1　什么是概念

列宁指出：“概念来自本质，而本质来自存在。”（《黑格尔〈逻辑学〉一书摘要》）数学概念是通过社会实践，把大量生动的关于现实世界空间形式和数量关系的材料，经过去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的改造制作工夫得来的。

例如，自然数的概念是从计数的需要产生的。人类在原始社会的时候，以狩猎、捕鱼和采集果实为生。当时，人们关心的问题，是野兽、鱼、果实的有和无。这样，就逐步产生了数量的观念。开始，人们用“扳指头”的办法，用手指头一个一个地数集合中的物体。以后发展到用一只手表示五，整个人表示二十等等。那时的“五”还不是抽象的数，而是简单地理解为物体的个数“就象手上的指头那样多”；同样，“二十”被理解为“就象一个人身上所有的手指头和脚趾头那样多”。

在相当长的历史时期里，人们虽然有了直接比较物体集合元素多少的原始方法，但数量观念都是和具体内容联系在一起的，一头野兽，一条鱼，或者其他一个什么具体事物。随着实践活动的发展，人们又发现了量的共同特征。比如，一头野兽和一条鱼是完全不同的两个量，可是他们有一个共同的地方，就是它们都是一个东西。一头野兽添上一头野兽是两头野兽，一条鱼添上一条鱼是两条鱼。也就是说，一个

东西添上一个同类的东西总是两个同样的东西。这样一来，把一头野兽、两条鱼、三个矛头等等的具体内容抛开，就变成了一些抽象的数。这些一、二、三等等的数，在不同的场合，就可以表示各类量的多少。正如恩格斯所指出的："为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性而仅仅顾到数目的能力，而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果。"（《反杜林论》）

人们就是这样，经过千百万次的实践，由感性材料的积累，达到理性认识的飞跃，从具体事物集合的本质中抽象出自然数来。引进了数字符号后，人们由一个添上一个，再添上一个，……所得到的一串数量，就变成了1，2，3，……等等抽象的数的系统，形成了作为集合标志的自然数的概念。

从上面的例子可以看出：**概念是人们对客观事物的一种认识，是反映客观事物的本质的思维形式。**无论什么事物，只要我们认识了它的本质，就会在自己头脑里产生相应的概念。

毛主席指出："概念这种东西已经不是事物的现象，不是事物的各个片面，不是它们的外部联系，而是抓着了事物的本质，事物的全体，事物的内部联系了。概念同感觉，不但是数量上的差别，而且有了性质上的差别。"（《实践论》）感觉是具体的、直接的，而概念却是抽象的、概括的。抽象性和概括性是概念不同于感觉的重要特征。例如，正方形这个概念，已经舍掉了对象的具体内容，只剩下区别于其他图形的特点。"正方形"的概念谁也看不见，在现实世界中，我们只能看到具体的正方形，如方桌面、方巾等等。概念是

主观的抽象形式与客观的具体内容的辩证统一，它不是远离了客观事物，而是更接近了事物，抓住了事物的本质，是对客观事物更深刻、更正确、更完全的反映。

概念在人的思维中起着十分重要的作用，它是最基本的思维形式。判断是由概念构成的，推理和证明又是由判断构成的。如果我们把人的思维比作一个有机体，那么概念就是这个有机体上的细胞。

## §2 概念的内涵和外延

**概念的内涵是概念所反映的对象本质的总和（即概念所反映的对象的质的方面）；概念的外延是概念所反映的对象的总和（即概念所包括的对象的数量，或所指对象的范围）。**

任何一个概念都有内涵和外延两个方面，是内涵和外延的统一体。因为一切客观事物都有质和量两个方面的特性，作为反映客观事物的概念，也可以从这两个方面去进行分析。例如："由三条线段围成的图形"，是"三角形"这一概念的内涵，它反映了三角形的本质；而锐角三角形、直角三角形、钝角三角形等则是"三角形"这一概念的外延，它反映了三角形的总和。"一元二次方程"这个概念的内涵是：（一）是一个含有未知数的等式；（二）这个等式中只含有一个未知数；（三）这个未知数的最高次数是二次。而一切型的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ （$a\neq 0$）的全体，如 $3x^2+5x-6=0$，$\sqrt{2}y^2-3y=0$，$5t^2-\sqrt{3}=0$ 等等则是"一元二次方程"的外延。

**概念的内涵和外延之间有着密切的联系：概念的内涵扩大，它的外延就缩小；反之，概念的内涵缩小，它的外延就扩大。**例如，在平行四边形的内涵中，再增加"邻边相等"

的条件，那就得到菱形的概念；而菱形的外延比平行四边形的外延缩小了，已不再包括邻边不相等的平行四边形了。

**逻辑思维对概念的基本要求是：概念要明确。所谓概念明确，就是要弄清一个概念的内涵是什么，外延是哪些，也就是要从质和量两个方面来明确概念所反映的对象。**

列宁指出："人的概念并不是不动的，而是永恒运动的，相互转化的，往返流动的；否则，它们就不能反映活生生的生活。"（《黑格尔〈哲学史讲演录〉一书摘要》）因此，概念的内涵和外延不是一成不变的。有些概念在发展过程中，它的内容不断丰富、充实。例如，角的概念，最初仅局限于平面，并在180°以内，有锐角、直角、钝角；而后发展到平角、周角；进而可以为（正的）任意角。规定了旋转方向以后，又有了正角、负角的概念。在空间研究的时候，又有空间两直线所成的角、直线与平面所成的角、平面与平面所成的角等等。这样，角的概念就在发展过程中逐步充实、完备了。

有的概念发展以后，更加抽象化、一般化，后者包含了前者，前者就成了后者的特例。例如，"函数"的概念，在初等数学中一般是这样给出的："在某一变化过程中有两个互相联系着的变量 $x$ 和 $y$。如果对于 $x$ 在其变化范围内取得的每一个值，$y$ 按照确定的法则有确定的值和它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数。"在近代数学中，这个概念得到了进一步的发展："如果对于集合 $X$ 的每个元素 $x$，按一定的对应法则，另一个集合 $Y$ 总有确定的元素 $y$ 和它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数。"这是用集合的观点来刻划的，比初等数学中的定义更加深刻。因为集合 $X$ 和 $Y$ 的元素已不再局限在数的范围了，它们的元素也可以是点、线、面、矩阵、矢量等等。例如，

根据这个定义，我们可以说："线段的长度是线段的函数"，这里自变元是线段，函数是数。

有些概念发展以后，与原概念有不同的涵义。例如，指数概念的发展：

①正整指数：$n$ 为正整数时，

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{个}};$$

②零指数：$n$ 为零时，

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0);$$

③负整指数：$n$ 为负整数时，如 $n = -S$（$S$为正整数），

$$a^{-s} = \frac{1}{a^s} \quad (a \neq 0);$$

④分数指数：$n$ 为分数时，如 $n = \frac{q}{p}$（$p$、$q$为正整数，$\frac{q}{p}$为既约的正分数），

$$a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}, \quad a^{-\frac{q}{p}} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^q}} \quad (a > 0);$$

⑤无理指数：$n$ 为无理数时，$a^n$（$a>0$）为两个有理指数幂数列（不足和过剩）的公共极限。例如，$10^{\sqrt{2}}$为下面两个数列的公共极限：

$$10^1,\ 10^{1.4},\ 10^{1.41},\ 10^{1.414},\ 10^{1.4142},\ \cdots;$$

$$10^2,\ 10^{1.5},\ 10^{1.42},\ 10^{1.415},\ 10^{1.4143},\ \cdots.$$

可见正整指数的概念和各次扩充后的概念有着明显的质的差异。

从上面的例子可以看出，在明确概念的内涵和外延时，既要看到概念的确定性，在事物发展的一定阶段上，概念的内涵和外延总是确定的，不能随心所欲地改变；同时，也要

辩证地看到概念的灵活性，随着客观事物的发展和变化，概念的内涵和外延也会发生相应的变化。只有把概念的确定性和灵活性辩证地统一起来，才能正确地认识客观事物。

## §3 概念间的关系

一切客观事物都是互相联系的。因而，反映客观事物的概念也是互相联系的。了解概念之间的关系，有助于进一步明确概念的内涵和外延，也有助于克服概念混淆的逻辑错误。

概念有内涵和外延两个方面，概念之间的关系也可以从这两个角度分别加以考察。例如，比较矩形和平行四边形、有理数和无理数这两对概念，容易发现它们都具有某种共同的内涵：矩形和平行四边形都是有两组对边分别平行的四边形；有理数和无理数都是实数。但是，两者也有不同的地方：矩形除了具有平行四边形的内涵，还有自己特有的性质，如矩形的四个角都是直角；有理数都可以表为分数，而无理数却不能表为分数。从外延上看，平行四边形的外延包含矩形的外延；有理数和无理数的外延之和，恰好等于实数的外延。

概念之间的关系一般比较复杂，仅就用韦恩（*Venn*）图解来表示的外延关系而论，理论上讲可以有八十一种之多，但是其中大多数比较罕用。本节只是概略地介绍中学数学中常见的一些关系，且仅限于数学概念的范围内来讨论。

为了便于讨论，我们从比较概念的外延入手，结合分析内涵之间的关系。中学数学里常用的关系大致有下面几种：

### 一、相容关系

**如果两个概念的外延至少有一部分重合，那么它们之间**

**的关系叫做相容关系。**

相容关系常见的有同一关系、从属关系和交叉关系。

**1. 同一关系**

**如果两个概念的外延完全重合，那么这两个概念之间的关系叫做同一关系，这两个概念叫做同一概念。**

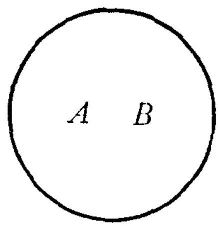
**例 1** 下列各组概念是同一概念：

(1)最小的素数；最小的正偶数。

(2)无理数；无限不循环小数。

(3)正方形；等角菱形；等边矩形。

同一关系可以用图 1 表示。圆表示概念的外延，$A$、$B$ 表示两个概念。



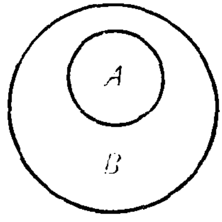

同一关系

图 1

同一概念反映的是同一对象，因此它们的外延是相同的。但是，对于这个同一对象，是从不同的方面，在不同的意义上来反映的，因而它们的内涵是不同的。例如，例 1 中，“最小的素数”和“最小的正偶数”这两个概念，它们所反映的对象都是“2”。但反映的角度是不同的：前者是从“2 是最小的素数”这一方面来反映的；后者则是从“2 是最小的正偶数”这一侧面来刻划的。

**2. 从属关系**

**如果一个概念（$A$）的外延被另一个概念（$B$）的外延全部包含，那么这两个概念之间的关系叫做从属关系。外延较大的概念（$B$）叫做种概念，外延较小的概念（$A$）叫做属概念（图 2）。**




从属关系

图 2