工程技术中的偏微分方程

潘祖梁
陈仲慈
编著

浙江大學出版社

工程技术中的偏微分方程

潘祖梁　陈仲慈　编著

浙江大学出版社

内容简介

"数理方程和特殊函数"是高等工科院校的一门重要基础课。本书在保证大纲的基本内容和要求的同时，增添了一些较近代的内容，如广义函数、非线性方程等，以适应不同专业、不同层次的各种要求。第1章为方程的导出和定解问题，第2章至第6章是常用的几种解法：行波法、分离变量法、积分变换法和数值解法。第7章为一阶线性方程组，第8章是非线性方程。本书突出模型的建立、基本原理、基本方法及其在工程技术中的应用。内容安排合理，层次分明，叙述通俗，推理清晰，便于自学。

本书可作为非数学专业的各理、工科专业本科生的教材(选用其中的基本内容)，也可作为工科研究生的教材或教学参考书，亦可供广大工程技术人员和电大、夜大学生自学时参考。

工程技术中的偏微分方程

潘祖梁　陈仲慈　编著

责任编辑　董德耀

*　*　*

浙江大学出版社出版

(杭州浙大路38号　邮政编码310027)

(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址：http://www.zjupress.com)

浙江大学出版社电脑排版中心排版

浙江大学印刷厂印刷

*　*　*

850mm×1168mm　32开　10印张　299千字

1995年10月第1版　2002年1月第3次印刷

印数：3001—5000

ISBN 7-308-01633-1/O·190　定价：12.00元

编 写 说 明

工程数学由多门数学课程组成，它的涉及面和应用性很广，几年来我们曾先后出版过多种工程数学教材，为了适应形势，及时总结经验，不断扩大教学成果，使我校工程数学教学质量能保持持续的稳定与提高，我们重新组织人力，对《线性代数》、《概率论与数理统计》、《复变函数与拉普拉斯变换》、《常微分方程》、《工程技术中的偏微分方程》、《数值计算方法》等六门课程的教材全部作了改编，以适应我校教学规范化的要求。

最近出版的这一套工程数学教学规范化系列教材，具有如下特点：

1. **适应性** 提高和加宽了知识的深度与广度，能较广泛地适用于多种专业，不同层次的要求。

2. **少而精** 虽然新教材充实了不少新的内容，但整个篇幅与学时数都没有增加。

3. **实用性** 学以致用是编写这套教材的一个原则，因此新教材增加了很多实用性内容。例如，在《常微分方程》中增加了建模的实例；在《复变函数与拉普拉斯变换》中增加了用复变函数方法解决工程实际问题的实例；在《工程技术中的偏微分方程》中增加了**差分法及有限元法**等内容，以便扩大计算机的应用范围；在《概率论与数理统计》中增加了统计部分比重，等等。

4. **便于教学** 新教材融入了我系教师长年积累的经验与资料，用更为直观，更易为学生接受的方式处理疑难内容，起到深入浅出的效果。值得一提的是，《线性代数》、《复变函数与拉普拉斯变换》中还

选编了大量的思考题，以帮助同学们复习。

我们希望这套工程数学系列教材能成为深受广大师生欢迎的教材。

浙江大学应用数学系

1994年3月

序

当今世界科学技术的发展日新月异，为了适应这种情况，为了培养跨世纪的科技人材，工科院校数学类基础课如何更新教学内容，在讲授经典内容的同时，如何让学生接触一些近代的理论和方法，这是一个值得探讨和研究的问题。

偏微分方程在物理、力学和工程技术的众多学科中有着广泛的应用，是一门重要的工程数学。经典的内容主要是讨论几个典型方程(波动方程、热传导方程及调和方程)的求解方法，包括分离变量法、行波法和积分变换法等。在介绍这些基本内容的同时，考虑到大二学生已具备的数学基础(微积分、线性代数、常微分方程)，用通俗易懂、深入浅出的语言，让学生接触一些新的概念、理论和方法，不仅必要而且可行。

潘祖梁、陈仲慈两同志从事这门课程的教学已有多年，积累了丰富的经验，在承担教学任务的同时，他们两个都有自己的研究方向，这一次，他们结合自己的教学和科研工作的体会，根据工科院校的特点，密切结合工程技术中的应用，在书中介绍了广义函数、有限元法的理论基础、非线性方程的相似解、孤立子、反应—扩散方程等较近代的内容，以适应理、工科不同专业的不同要求，这是一件很有意义的工作。

我相信这本教材的出版，对本门课程教学内容的改革会起到一种促进作用，有利于更好地培养适应四化建设的科技人材。

董光昌

1995 年 6 月

前　言

偏微分方程在力学、物理学、工程技术和其他学科的许多分支中有着广泛的应用。为了更新教学内容，使理、工科学生在掌握经典内容的同时，适当接触本学科的某些近代内容，以便使他们能较快地适应现代科学技术的飞速发展，我们在多年教学实践的基础上，参考了以前编写的讲义和1988年3月浙江大学出版社出版，由潘祖梁、陈仲慈、陈士良、姚文苏编写的"数学物理方程"，在体系和内容上作了重大修改，重新编写而成为现在的书稿。

本书在编写过程中一方面紧扣工程数学教学大纲，针对工科院校的特点，本着为后继课程和科研工作提供必要的数学工具的宗旨，在内容的选取上不强调数学理论的严密性、完备性，而侧重于数学模型的建立，数学和物理的结合，解题的基本方法和技巧，保证大纲规定的基本内容和要求得以实现。另一方面又根据不同理、工科专业的不同要求，增加了某些在工程技术中有用的理论和方法，如δ函数、广义函数、反应—扩散过程数学模型的推导、有限元法的理论基础、一阶线性或拟线性方程的特征线法、非线性方程的相似解方法等。这些内容多数取材于专著或文献，并结合我们自己的教学、科研的体会和成果。编写时突出方法和应用，力求写得通俗易懂、深入浅出。由于大纲规定的学时数较少，不同专业在使用时可灵活选取内容，我们希望本书能适应非数学专业的各理、工专业的教学要求。

本书第一章是方程的导出和定解问题，其中§1.1和§1.2是基本内容。第二章至第六章是各种基本解法的讨论。行波法、分离变量法、积分变换法的部份内容和差分法是大纲规定的基本内容，讲授基本内容约需36学时，其余章节各专业可视学时数和需要而取舍。全书内容约需54学时。

本门课程通常安排在第二学年，学生已具备“微积分”、“常微分方程”、“线性代数”等基础知识，书中的某些内容，不在课堂上讲授，安排学生自学，不仅是可行的，而且有利于学生解决问题能力的培养，如对于化学、生物等专业§1.3的内容，对于力学、物理专业§2.2的内容都可以这样处理，这里不再一一列举。

本书在定稿过程中得到了董光昌教授的热情指导，管志成教授、徐宝智、潘秀德、叶显驰等副教授都对本书的编写提出了许多宝贵的意见，对本书的编写给予了很大的支持，在此向他们表示由衷的感谢。

本书的第一、三、七、八章由潘祖梁编写，第二、四、五、六章由陈仲慈编写。由于我们水平有限，恳请读者、同行和专家们批评指正。

编著者

1995年4月于浙大求是园

目　　录

第1章　方程的导出和定解问题

§1.1　方程的导出 …………………………………………… (1)

§1.2　定解条件和定解问题 …………………………………… (9)

§1.3　反应—扩散方程…………………………………………… (13)

§1.4　二阶线性方程的分类与叠加原理………………………… (18)

习题一 ………………………………………………………… (29)

第2章　行波法

§2.1　一维波动方程的初值问题………………………………… (31)

　2.1.1　无界弦的自由振动………………………………… (31)

　2.1.2　半无界弦的自由振动……………………………… (33)

　2.1.3　无界弦的强迫振动………………………………… (35)

§2.2　二维与三维波动方程……………………………………… (39)

　2.2.1　球对称情况………………………………………… (40)

　2.2.2　一般情况…………………………………………… (41)

　2.2.3　空间非齐次波动方程……………………………… (44)

　2.2.4　降维法及二维波动方程…………………………… (45)

§2.3　解的物理意义……………………………………………… (47)

　2.3.1　D'Alembert 公式的物理意义 …………………… (47)

　2.3.2　依赖区域、决定区域和影响区域 ………………… (48)

习题二 ………………………………………………………… (54)

第 3 章　分离变量法和特殊函数

§3.1　齐次边界条件的定解问题…………………………………（57）
3.1.1　齐次方程齐次边界条件…………………………………（57）
3.1.2　非齐次方程齐次边界条件………………………………（69）
§3.2　非齐次边界条件的定解问题……………………………（72）
3.2.1　边界条件齐次化…………………………………………（72）
3.2.2　周期性条件和自然边界条件……………………………（77）
§3.3　柱域中的分离变量法和 Bessel 函数 ……………………（80）
3.3.1　Bessel 方程的引出 ……………………………………（80）
3.3.2　Bessel 函数及其性质 …………………………………（83）
§3.4　球域中的分离变量法及 Legendre 多项式 ………………（97）
3.4.1　Legendre 方程的引出 …………………………………（97）
3.4.2　Legendre 多项式 ………………………………………（99）
§3.5　本征值理论 ………………………………………………（110）
3.5.1　Sturm—Liouville 边值问题 …………………………（110）
3.5.2　本征函数的正交性 ……………………………………（113）
3.5.3　展开定理 ………………………………………………（117）
3.5.4　奇异的本征值问题 ……………………………………（119）
习 题 三 ………………………………………………………（121）

第 4 章　积分变换法

§4.1　Fourier 变换及其性质……………………………………（128）
§4.1.1　Fourier 变换的形式导出及它的定义…………………（128）
§4.1.2　Fourier 变换的基本性质 ……………………………（131）
§4.1.3　多维 Fourier 变换的简单介绍 ………………………（134）
§4.2　Fourier 变换在求解偏微分方程初值问题中的应用
………………………………………………………………（134）
4.2.1　一维热传导方程的初值问题 …………………………（134）
4.2.2　一维波动方程的初值问题 ……………………………（136）

4.2.3 应用 Fourier 变换求解边值问题 …………………（138）
§4.3 Laplace 变换及其性质 …………………………（139）
4.3.1 Laplace 变换的形式推导 ……………………（139）
4.3.2 存在定理与反演公式 ……………………（140）
4.3.3 Laplace 变换的基本性质 ……………………（140）
4.3.4 Laplace 逆变换与展开定理 …………………（144）
§4.4 Laplace 变换在求解偏微分方程定解问题中的应用
……………………………………………………（148）
4.4.1 热传导方程的混合问题 ……………………（148）
4.4.2 弦振动方程的混合问题 ……………………（150）
习 题 四 ……………………………………………（151）

第 5 章 Green 函数法

§5.1 δ 函数及它的基本运算 ……………………（155）
5.1.1 δ 函数与广义函数 ……………………（155）
5.1.2 广义函数及它的基本运算 …………………（162）
5.1.3 广义函数（δ 函数）的 Fourier 变换 …………（164）
§5.2 调和方程第一边值问题的 Green 函数法 ……………（165）
5.2.1 Green 公式、基本解与基本积分公式 …………（165）
5.2.2 Green 函数及其性质 ……………………（168）
5.2.3 特殊区域的 Green 函数 ……………………（170）
§5.3 热传导方程的 Green 函数法 ……………………（176）
5.3.1 混合问题 ……………………………………（176）
5.3.2 初值问题 ……………………………………（181）
习 题 五 ……………………………………………（184）

第 6 章 数值解法

§6.1 差分解法 ……………………………………（188）
6.1.1 抛物型方程混合问题的差分方法 ……………（188）

6.1.2 双曲型方程的差分格式 …………………………… (193)
6.1.3 Poisson 方程第一边值问题的差分格式 ……… (195)
§6.2 变分原理 ……………………………………………… (198)
6.2.1 泛函和泛函的极值 ………………………………… (199)
6.2.2 与偏微分方程边值问题等价的变分问题 ……… (203)
§6.3 解 Laplace 方程边值问题的有限元法 ………………… (207)
6.3.1 Galerkin 方法 ………………………………………… (208)
6.3.2 Sobolev 空间与弱解 ………………………………… (210)
6.3.3 边值问题有限元法概述 …………………………… (211)
习 题 六 ……………………………………………………… (222)

第7章 一阶偏微分方程组

§7.1 例子及有关概念 ……………………………………… (225)
§7.2 特征理论 ……………………………………………… (230)
§7.3 狭义双曲型方程组的 Cauchy 问题 ………………… (236)
§7.4 特征线法 ……………………………………………… (244)
习 题 七 ……………………………………………………… (253)

第8章 非线性方程

§8.1 追赶问题和广义解 …………………………………… (255)
§8.2 交通流模型和 Burgers 方程 ………………………… (265)
§8.3 KdV 方程和孤立子(Soliton) ………………………… (269)
8.3.1 KdV 方程的由来 …………………………………… (269)
8.3.2 KdV 方程的孤立波解 ……………………………… (271)
8.3.3 孤立波的相互作用和孤立子 ……………………… (275)
§8.4 不变变换和相似解 …………………………………… (280)
8.4.1 平移变换和标度变换 ……………………………… (280)
8.4.2 Lie 点变换群 ………………………………………… (283)
8.4.3 相似约化和相似解 ………………………………… (291)

习 题 八 …………………………………………………………………… (295)
附录 A Fourier 变换表 …………………………………………… (298)
附录 B Laplace 变换表 …………………………………………… (299)
附录 C 柱函数、球函数的公式和数表 ……………………………… (300)
参考文献…………………………………………………………………… (305)

第 1 章　方程的导出和定解问题

在这一章里，我们将通过弦振动、膜振动、热传导等物理模型，说明如何从实际问题导出数学物理方程，并相应地提出定解条件和定解问题等概念. 它们将是本课程所介绍的理论与方法的主要研究对象. 另外，为了使读者对偏微分方程在化学，生物学，生态学等领域中的应用有个初步的了解，在§1.3 中我们将较详细地推导化学反应动力学方程(组)，进而建立起反应-扩散过程的数学模型，并扼要地介绍人口增长模型，捕食者与被捕食者生存竞争的数学描述等内容.

§1.1　方程的导出

常微分方程中的未知函数都是单元函数，如质点的位移、电路中电流、电压等物理量均是时间 t 的函数，这些物理量的变化规律在数学上的表示就是常微分方程. 如挂在弹簧上的物体在重力和弹性力的作用下，其运动方程为

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{a}s=g$$

这里 a 和 g 都是已知的常数，$s=s(t)$ 是未知函数，表示 t 时刻物体离开平衡位置的位移.

但在科学研究及工程技术中还有许多物理量不仅与时间 t 有关，还与空间的位置 (x,y,z) 有关. 如声波在介质中的传播，电磁波的电场强度和磁感应强度随空间和时间的变化，物体内的温度分布等. 研究这些物理量的变化规律时，就会得到含有未知函数及其偏导数的关系式，即偏微分方程，又称**数学物理方程**. 下面我们以几个典型方程的推导为例，说明如何从实际的研究对象出发，抓住主要因素，

利用有关的物理定律，如牛顿第二定律、能量守恒定律、质量守恒定律等，建立起偏微分方程.

例1　弦的微小横振动

弓在乐器的弦上来回拉动时，接触的只是一小段. 但弦是拉紧的，各小段之间有一种相互作用力，力学上称为张力. 若弦是柔软的，则张力沿着切线方向作用. 在张力的作用下，一小段弦的振动就会引起邻近小段的振动，这种振动的传播现象称为波. 现在来研究弦的微小横振动，如图 1-1 所示.

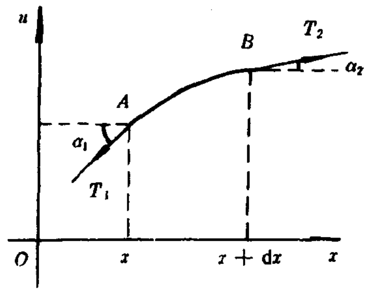

图 1-1

取弦的平衡位置为 x 轴. 所谓横振动指弦上各点的振动发生在同一平面内，且与 x 轴垂直. $u=u(x,t)$表示横坐标为 x 的点在 t 时刻离开平衡位置的位移. 我们取弦上的任一小段 AB 来分析. 因 $\mathrm{d}x$ 很小，AB 段的重量与所受的张力相比可忽略不计. AB 段无纵向(x 轴方向)运动，故有

$$T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1=0 \qquad (1.1.1)$$

考虑的是微小的横振动，不妨认为在振动过程中，每一小段的弦几乎没有伸长，即 $\mathrm{d}s\approx\mathrm{d}x$. 而 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x$，可见在微小横振动的情况下，$|u_x|$与 1 相比，可忽略不计. 且不妨认为 $\alpha_1\approx 0,\alpha_2\approx 0,\cos\alpha_1\approx 1$，$\sin\alpha_1\approx\mathrm{tg}\alpha_1=u_x|_x$，$\sin\alpha_2\approx\mathrm{tg}\alpha_2=u_x|_{x+\Delta x}$. 由牛顿第二定律，得横向的运动方程

$$T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1=(\rho\Delta x)u_{tt} \qquad (1.1.2)$$

其中 ρ 为线密度. 由式(1.1.1)得 $T_1=T_2$，前已假定 $\mathrm{d}s\approx\mathrm{d}x$，由虎克定律知张力 T 与时间 t 无关，故张力 T 为常数，记为 T_0. 将式(1.1.2)改写为：

$$T_0(u|_{x+\Delta x}-u|_x)=(\rho\Delta x)u_{tt}$$

利用微分中值定理，令 $\Delta x \to 0$，得

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt}$$

记 $a^2 = T_0/\rho$，就有弦的微小横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1.3}$$

其中空间变量只出现 x，该方程又称为**一维波动方程**.

若弦在振动过程中还受到外力作用，且作用在单位长度弦上的横向力为 $F(x,t)$，则在(1.1.2)左边加上一项 $F(x,t)\mathrm{d}x$，得

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{1.1.4}$$

其中 $f(x,t) = F(x,t)/\rho$，称为**弦的强迫振动方程**.

例 2 膜的微小横振动

与例 1 的情形类似，我们假设膜是柔软且有弹性的，膜的重量远比膜的张力为小，膜的位移任一处的切线斜率与 1 相比可忽略不计. 若取膜的平衡位置为 xoy 平面(见图 1-2)，我们只考虑膜的横向(u 轴方向)的微小横振动. 在这些条件下，膜上各点所受的张力为常数，记单位长度所受的张力为 T.

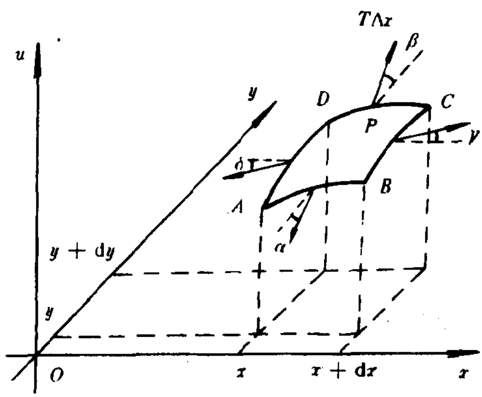

图 1-2

设 t 时刻，膜上(x,y)处的位移是 $u=u(x,y,t)$. 在膜上任取一小

片 ΔS，分析它在横向的受力情况，如图 1-2，ΔS 边缘$\overset{\frown}{CD}$受邻近膜的张力是 $T\Delta x$，张力的方向落在曲面的切平面上且与$\overset{\frown}{CD}$的切线垂直，因为考虑膜的微小横振动，边缘$\overset{\frown}{CD}$的形变较小，不妨认为$\overset{\frown}{CD}$上 P 点（它在 x-y 平面的投影为$(x_2,y+\Delta y)$）的切线与 x 轴平行，设 P 点处所受的张力与 y 轴正向的夹角为 β，则沿$\overset{\frown}{CD}$所受张力在 u 方向的分力为 $T\Delta x\sin\beta$，对其他边缘所受的张力可类似地分析，故 ΔS 上所受张力沿 u 方向的分力为

$$T\Delta x\sin\beta - T\Delta x\sin\alpha - T\Delta y\sin\delta + T\Delta y\sin\gamma$$

因为是小振动，故有

$$\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = u_y(x_1,y,t)$$

$$\sin\beta \approx \mathrm{tg}\beta = u_y(x_2,y+\Delta y,t)$$

$$\sin\delta \approx \mathrm{tg}\delta = u_x(x,y_1,t)$$

$$\sin r \approx \mathrm{tg} r = u_x(x+\Delta x,y_2,t)$$

其中 x_1 及 $x_2 \in (x,x+\Delta x)$，y_1 及 $y_2 \in (y,y+\Delta y)$.

由牛顿第二定律，得横向的运动方程为

$$T\Delta x[u_y(x_2,y+\Delta y,t) - u_y(x_1,y,t)$$

$$+T\Delta y[u_x(x+\Delta x,y_2,t) - u_x(x,y_1,t)] = \rho\Delta x\Delta y u_{tt}$$

其中 ρ 为面密度，当膜均匀时，ρ 为常数. 将上式除以 $\rho\Delta x\Delta y$，利用微分中值定理，令 $\Delta x,\Delta y\to 0$，记 $a^2=T/\rho$，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \qquad (1.1.5)$$

即

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$$

称为**二维波动方程**. 若膜还受到横向外力作用，且设单位面积所受的外力为 $F(x,y,t)$，则得膜的受迫振动方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t) \qquad (1.1.6)$$

其中 $f(x,y,t) = F(x,y,t)/\rho$，称为**方程的自由项**（或非齐次项）. 若考察声波或电磁波在空间传播时，我们就会得到三维的波动方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x,y,z,t) \qquad (1.1.7)$$