

俄罗斯苏维埃联邦社会主义共和国教育部批准

苏联师范学院用

数論与理論算術

教学大綱

苏俄教育部教科書出版社

(1955)



高等教育出版社

1956

苏联师范学院用
数論与理論算術教学大綱

苏俄教育部批准

嚴士健譯

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

京華印書局印刷 新華書店總經售

書號602(啟80) 開本 787×1092 1/32 印張 4/16 字數 5,000

一九五六年三月北京第一版

一九五六年三月北京第一次印刷

印數 1—4,000 定價 (5) 洋 0.05

13-17-15/1

數論與理論算術教學大綱

第一部分、數論初步

導 言

數論的對象 數論的基本范畴 數論的發展簡史；在它發展中的基本里程碑。俄國數學家在數論發展中的領導作用。彼得堡學派。數論的蘇埃維學派是近代數論的主導方向。

同余式及剩餘類

同余式及它的基本性質。給定模的剩餘類。剩餘類環。合數模的剩餘類環，零因子。完全剩餘系 與模互質的剩餘類的羣。歐拉 (Euler) 函數。簡化剩餘系。剩餘的綫性形式的定理。歐拉函數的基本性質。歐拉定理及費爾馬 (Fermat) 定理。

帶未知數的同余式

任意次同余式的解類。一次同余式。質數模的剩餘類體 (域)。一次同余式組。把合數模的同余式歸結到質數模的同余式組。

二次同余式；二項同余式的化簡。平方剩餘與平方非剩餘。平方剩餘的基本性質。二次反轉定律。質數模的 n 次同余式。解答的最大個數。

高次剩餘

屬於指數的類。指數的基本性質。原根。原根類數的定理。指標及它的性質，借指標解二項同餘式。

同餘論的算術應用

以給定數除某些數後所得餘數的算法。借同餘式建立檢驗因數的方法。化分數為小數時，確定循環節的長度。算術運算結果的核對。

以有理數漸近無理數

無限連分數的收斂性。用無限連分數表無理數。無理數的漸分數的漸近階數。漸近分數是最好的近似值，以分母有給定界的有理數漸近無理數。二次無理數與循環連分數。

代數數與超越數

代數數及它的基本性質。代數數體。柳威爾(Liouville)定理。超越數。造超越數。超越數的近代問題；蓋立方德(Гельфонд)的結果(不加證明)。

數論函數

數論函數舉例。給定數的因數的因數和及因數的個數的公式。

函數 $\Pi(x)$ (表示不超過 x 的質數的個數) 的切貝謝夫(Чебышев)不等式。質數倒數所成的級數的發散性。在自然數列及算

術級數中，質數分布問題的近代提法，函數 $H(x)$ 的估值（不加證明）質數的堆疊問題 古特拔黑 (Goldbach)——歐拉問題及“孿”質數。蘇聯數學家在堆疊數論方面的成就。維諾格拉陀夫 (Н. М. Виноградов) 及史尼列爾曼 (Л. Г. Шнирельман) 的工作。維諾格拉陀夫的古特拔黑問題的解答（不加證明）。維洛格拉陀夫方法在解析數論中的意義

第二部分 數的概念的發展

導 言

馬克思列寧主義的經典著作論數的概念的產生和發展 初等算術里數的過程及數 近代數學里數的概念 各種數集的公理結構的問題。

自然數

自然數的公理結構 皮安樂 (Peano) 公理。完全數學歸納法原理的各種形式及它們的等價性。數學歸納法在中學課程結構中的意義。算術運算。基本定律。自然數大小的比較。自然數的初等算術的結構。

整 數

對元素定義了運算的集合。同構。環，體及對元素定義了運算的集合的擴張。數的概念的擴張。把整數環看成是數偶的集合，整數的運算的基本定律。整數大小的比較。不等式的運算。

有 理 数

把有理数体看成是整数偶構成的。把有理数体看成是整数环的擴張。有理数的运算。

有理数大小的比較。不等式的运算。

实 数

量及它的測量。作为測量結果的数。定义实数集合的公理系統。用有理数分划的集合及用無限制度小数的集合解釋公理系統。实数的有序性及公理系統的完备性。在实数系結構的基礎上,關於量的測量問題的解決。用各种形式的有理数漸近实数。实数的十進漸近值。实数运算; 詳細建立一个运算及它的性質。基本定律。把实数体看成是有理数体的擴張。

复 数

复数体的構成。除同構外, 复数体的唯一性。四元数及勿勞別涅斯(Frobenius)定理。多元数大意及数的概念的更一般化。

結 論

数的概念的發展对数学科学及它的应用的意义。在中学数学課程里, 数的概念的發展的問題。

說 明

第五学期大綱是第一学期學習过的初等数学課程中“有理数

算術”的直接發展。

數論課程的安排應該保證發展未來教師高度算術修養。學生應該學會解決各種與可除性理論有聯系的算術問題，而可除性理論的更近代的形式是同余論；應該學習用有理數漸近無理數問題里的具體材料；並且應該得到近代質數理論的一些知識。

在講授數論時，必須注意近代數論發展史的問題。必須相當完全地闡明俄國數學家，特別是切貝謝夫 (П. Л. Чебышев) 在數論發展中的作用；必須儘可能地詳細解釋蘇聯數學家維洛格拉陀夫、史尼列爾曼、蓋立方德等人的工作中的最重要的結果，當然，正如大綱所指出的，這些較複雜的結果應該是解釋而不加證明。關於數論的蘇維埃學派是近代數論的主導方向，數論課程的安排應該給出一個鮮明的印象。

在敘述內容時，也很希望儘可能地多談些在數論發展的各個階段被研究的個別有興趣的算術事實，例如：完全數，威爾遜 (Wilson) 定理，找大的質數的問題，造表問題等等。

按照數論課程的內容，有機的實習作業是有重要意義的，這首先載入了物理數學系的教學計劃之內。

大綱規定在課程的開端學習同余論，為的是在實習作業方面有可能化費較多的時數來解決這一部分的例題及問題。

在課程的開端，實習作業最好考慮一些足以保證復習可除性理論的知識的例題。

實習作業應該考慮到以下幾方面：各種類型的問題，與求帶余數除式的聯系，各種可能的帶未知數的同余式及不定方程，應用反轉定律的例子，檢驗因數方法的建立等等。學生應該學會利用指標表及應用它來解決與可除性理論有聯系的算術問題的能力。一

般地，必須使學生注意到發展解決同余論的各種問題的技能的意義與直接聯系中學算術課程的意義是一樣大的。

在學習“以有理數漸近無理數”及“代數數與超越數”時，實習作業應該解一些與把無理數展成無限連分數的例子，解一些確定有理數漸近無理數的精確程度的例子，求最好的漸近值，由一數表成循環連分數來確定無理性，應用柳威爾定理來確定某些類型的數的超越性等等。

最後的“數論函數”，實習作業能夠分配很多學時。這裡可以限制於一些重要的數論函數的值的計算，最簡單的恆等式的考察，應用切貝謝夫定理來比較自然數列與自然數列的另外的部分數列里的質數分布的密度。

第六學期的大綱為的是深入闡述數的概念。它是按照逐步推廣數的概念的計劃而構成的，並且主要是起源於初等的數的過程。

在大家公議的公理系統的基礎上，考察自然數的集合是逐步推廣的起點。

大綱中靠後的某些部分可以用各種不同的方式來講解，例如：定義實數集合的公理系統等等。

大綱並沒有規定講解完備的實數理論，而只是要求首先處理以有理數漸近實數及建立運算的問題。

大綱中所指出的理論上的原理的講解應該隨時揭露它們的實際意義及在研究自然時的作用。

文 獻

I. 數論初步

教 科 書

И. М. 維諾格拉陀夫: 數論基礎 (Основы теории чисел), 苏联國家科学技術理論書籍出版社, 1949 (裘光明譯成中文)。

И. В. 阿尔罗里得: 數論 (Теория чисел), 國家教育出版社, 1939。

参 考 書

А. Я. 辛欽: 數論初步 (Элементы теории чисел), 初等数学百科全书, 卷 I 苏联國家科学技術理論書籍出版社, 1951。

А. К. 苏什刻維奇: 數論 (Теория чисел), 哈尔科夫, 1954。

А. Я. 辛欽: 連分數 (Цепные дроби), ОНТИ, 1937。

П. 哈瑟: 數論講義 (Vorlesungen über Zahlentheorie), 1953。

II. 數的觀念的發展

А. Я. 辛欽: 分析八講 (Восемь лекций по математическому анализу), 苏联國家科学技術理論書籍出版社, 1948。

П. В. 普罗斯庫雅可夫: 算術的理論基礎 (Теоретические основы арифметики), 初等数学百科全书, 卷 I, 苏联國家科学技術理論書籍出版社, 1951。

П. В. 阿尔罗里得：理論算術 (Теоретическая арифметика)，
苏俄教育部教科書出版社，1939。

著者：A. A. 布哈什塔布 (第一部分)
 П. С. 諾維柯夫 (第二部分)
譯者：嚴 士 健