

高等教育自学考试 计算机类

学习指导与题典

概率论与 数理统计

李霞 覃炳庆 编著



科学出版社

www.sciencep.com

高等 教育自学考试 计算机类

学习指导与题典

概率论与数理统计

李霞 覃炳庆 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是根据全国高等教育自学考试委员会指定教材《概率论与数理统计》(独立本科段)编写的同步辅导教材。本书围绕教材,紧扣自考大纲,每一章分为大纲要求、重点难点提要、经典例题及解题技巧、教材练习题同步辅导和自测题5个部分,最后还提供若干模拟题和全国自学考试真题,供学生自我测试使用。

本书适合参加自学考试的学生作为辅导用书,也可以作为高等学校本专科学生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

学习指导与题典:概率论与数理统计/李霞,覃炳庆编著. —北京:科学出版社, 2004

(高等教育自学考试 计算机类)

ISBN 7-03-012512-6

I.学... II.①李...②覃... III. ①概率论—高等教育—自学考试—自学参考资料②数理统计—高等教育—自学考试—自学参考资料
IV.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 105487 号

策划编辑:李 娜/责任编辑:丁 波

责任印制:吕春珉/封面设计:东方人华平面设计部

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年1月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2004年1月第一次印刷 印张:12 1/4

印数:1—4 000 字数:279 000

定价:18.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

高等教育自学考试 计算机类

《学习指导与题典》丛书

(第二批)

编委会

主 编

乔川龙

副主编

马爱国

编委会委员

(以姓氏笔画为序)

王 兵 王 鹏 王睿伯

马爱国 李 霞 乔川龙

周 侗 薛倡新 潘 莉

前 言

高等教育自学考试在我国方兴未艾,据不完全统计,全国每年参加自学考试的考生以百万计,计算机专业的考生更是占相当的部分。相对于全日制高等学校的学生来说,自考学生的学习受到多方面因素的制约,有如下3个特点:第一,他们一般不会像全日制学生那样系统地参加学习,大多是通过自学的形式完成学业;第二,在参加自考的学生中有相当一部分是已经参加工作的在职人员,因此,在学习时间上,他们又不可能像全日制学生那样有充分的保证;第三,不在学校里学习,少了一种氛围,有问题往往不能及时得到解答,因此,学习效果也是大打折扣。

基于对自学考试学生在学习中存在上述困难的深刻认识,我们认为帮助他们就是一件十分重要的事情,一本好的辅导书对他们来说就显得很重要了,这也是我们写这本书的出发点。

为了满足广大自学考生的学习需要,让学生能正确掌握概率论与数理统计的基本知识和解题方法,特编写本书。经过多年的自学考试辅导的教学经验和对考生心理的把握,我们自信能写出一套真正适合他们,帮助他们在学习上达到事半功倍效果的辅导书,本套书的特点如下。

1. 围绕大纲、内容详略得当。针对大纲中对内容掌握要求的四个不同的层次,以及对近几年考试试题重点的分析,我们在内容提要中对那些大纲要求高、考试出题频繁的内容做了重点提示,而对那些大纲要求不高,考试中出题又很少涉及的地方,我们都是一带而过,甚至不提。这样,考生在复习中,参照我们的辅导书,有针对性地学习,不需要面面俱到就可以达到效果。

2. 规划合理、层次泾渭分明。每一章基本按照大纲要求、重点难点提要、经典例题及解题技巧、教材练习题同步辅导和自测题5个部分进行安排,这样,考生可以先知道本章的考试要求,然后带着要求看内容,掌握了内容以后就可以看例题,最后做习题,可以说各个环节都紧密相扣,最后还附有模拟题和自考真题,以便考生在考试之前作为实战练习,提前进入临战状态,每套自测题和自考真题后面都附有参考答案,考生可以做完题后根据答案对自己的学习效果进行评测。

3. 注重全局、不搞题海战术。可以说本书中到底要编写多少习题,是最令编者头疼的事,如果编写很多的题给考生,我们认为至少存在以下两个方面的问题:一是题海战术往往使考生对教材上的内容还没有深刻理解的时候便急于做题,这样的话势必是吃夹生饭,有些问题当时看了答案,好像理解了,但是当再出现类似的题时,还是不会;二是大量的习题会占用考生大量的时间,对自学的学生来说,他们不同于全日制学生有大量的学习时间,所以题量过大,势必影响他们的工作。基于以上方面的考虑,我们对每一章习题都是尽量做到精简,尽量选择那些有代表性,能够起到举一反三作用的题让考生进行自测,这样就会达到非常理想的效果。

4. 成系统、注意概念把握。在本书中,我们对概率论与数理统计的各种概念都做了深入的分析,把彼此之间有关联的概念放在一起加以理解,这样给学生的感觉就不是非常零散的,而是形成一个整体概念。在看完书以后,学生对《概率论与数理统计》这门课就会有系统的认识。

对于考生的学习,我们的意见是在通读指定教材的基础上,再辅以辅导书;或者边阅读

教材,边看辅导书,以巩固自己对所学知识的理解。切记要注重基本知识的掌握,而不要好高骛远。通过对近几年全国的考试试题分析我们认为,试题 80%以上考的都是对基本知识的掌握,也符合大纲对考题比例分配的要求,即“识记”为 20%，“领会”为 30%，“简单应用”为 30%，“综合应用”为 20%，4 个层次的难易程度分别为易、较易、较难、难。按照以上要求，我们在模拟题中也是严格按照这个比例来精心选题，所以考生在做这些题时，更像是进行了一次实战演练，想必对考生会大有裨益。因此，可以说如果考生能够合理安排自己的学习的话，一定会在实际考试中取得好成绩。

参加本书编写的作者都是长年参加自考教学、经验丰富的老师，他们和自考学生打交道，可以说考生需要什么样的辅导书他们是最清楚的，因此写书的时候会充分考虑考生的需求，写出真正符合考生需要的自学辅导书。

本书由乔川龙负责组稿，李霞、覃炳庆编写。国防科技大学理学院，四川大学数学学院的一些老师对本书的编写也提出了很好的指导意见，在此一并致谢。同时感谢马进、黄天秀、谢昊、吕丹、袁洪钧、梅勇兵等人的大力支持。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请各位考生以及同仁不吝赐教，以便再版时进行修正。

作 者

2003 年 9 月

于国防科技大学计算机学院

目 录

第 1 章 随机事件与概率	1
1.1 大纲要求	1
1.2 重点难点提要	2
1.2.1 随机事件	2
1.2.2 概率	3
1.2.3 条件概率与事件的独立性	4
1.3 经典例题及解题技巧	5
1.4 教材练习题同步辅导	7
1.5 自测题	13
第 2 章 随机变量与概率分布	16
2.1 大纲要求	16
2.2 重点难点提要	18
2.2.1 随机变量的概念	18
2.2.2 离散型随机变量	18
2.2.3 连续型随机变量	19
2.2.4 随机变量的分布函数	20
2.2.5 随机变量的函数	21
2.3 经典例题及解题技巧	21
2.4 教材练习题同步辅导	24
2.5 自测题	35
第 3 章 随机向量	37
3.1 大纲要求	37
3.2 重点难点提要	38
3.2.1 二维随机向量	38
3.2.2 二维随机向量的分布函数与边缘分布	40
3.2.3 随机变量的独立性	40
3.2.4 n 随机向量	41
3.3 经典例题及解题技巧	42
3.4 教材练习题同步辅导	45
3.5 自测题	54
第 4 章 随机变量的数字特性	57
4.1 大纲要求	57
4.2 重点难点提要	58
4.2.1 期望	58
4.2.2 方差	60

4.2.3 协方差与相关系数	61
4.2.4 矩	61
4.3 经典例题及解题技巧	61
4.4 教材练习题同步辅导	64
4.5 自测题	73
第 5 章 大数定律与中心极限定理	76
5.1 大纲要求	76
5.2 重点难点提要	77
5.2.1 大数定律	77
5.2.2 中心极限定理	77
5.3 经典例题及解题技巧	78
5.4 教材练习题同步辅导	80
5.5 自测题	83
第 6 章 样本及抽样分布	85
6.1 大纲要求	85
6.2 重点难点提要	86
6.2.1 总体与样本	86
6.2.2 统计量与抽样分布	87
6.3 经典例题及解题技巧	89
6.4 教材练习题同步辅导	92
6.5 自测题	99
第 7 章 参数估计	102
7.1 大纲要求	102
7.2 重点难点提要	103
7.2.1 点估计	103
7.2.2 估计量的评选标准	104
7.2.3 区间估计	104
7.3 经典例题及解题技巧	106
7.4 教材练习题同步辅导	111
7.5 自测题	120
第 8 章 联单假设检验	124
8.1 大纲要求	124
8.2 重点难点提要	125
8.2.1 假设检验的基本概念	125
8.2.2 正态总体均值与方差的假设检验	125
8.2.3 总体分布假设的 χ^2 验法	127
8.3 经典例题及解题技巧	128
8.4 教材练习题同步辅导	133
8.5 自测题	142

附录 1 自测题答案.....	145
附录 2 模拟题及真题(附答案)	159
模拟题(一)	159
模拟题(二)	167
全国 2001 年 10 月高等教育自学考试概率论与数理统计试题.....	174
全国 2003 年 4 月高等教育自学考试概率论与数理统计试题.....	178
主要参考文献	183

第 1 章 随机事件与概率

1.1 大纲要求



考核知识点

1. 随机事件
 - 随机试验与随机事件。
 - 事件的关系与运算。
2. 概率
 - 概率的定义与性质。
 - 古典概型。
 - 利用概率性质计算古典概率。
3. 条件概率与事件的独立性
 - 条件概率与乘法公式。
 - 全概率公式与贝叶斯 (Bayes) 公式。
 - 事件的独立性。
 - 贝努利 (Bernoulli) 概型。



自学要求

本章总的要求是：了解随机试验与随机事件的概念，理解并掌握事件的关系与运算；理解概率的定义与基本性质；了解古典概型的定义，会计算简单的古典概率；会用概率性质计算古典概率；理解条件概率的定义，掌握概率乘法公式；了解全概率公式与贝叶斯公式并会进行简单计算；理解事件的独立性的概念，熟练掌握相互独立事件的性质及其有关概率计算；掌握贝努利概型的计算方法。

本章的重点是：事件的关系与运算、概率的基本性质及计算、事件的独立性及有关概率计算。



考核要求

1. 随机事件
 - 随机试验与随机事件，要求达到领会层次。
 - 了解随机试验、随机事件的概念。
 - 事件的关系与运算，要求达到简单应用层次。

理解事件的包含与相等、和事件、积事件、互不相容、对立事件的概念，掌握和事件、积事件、对立事件的基本运算规律。

2. 概率

- 概率的定义与性质，要求达到领会层次。

正确理解概率的概念。事件 A 的概率是事件 A 发生可能性大小的度量，是进行大量重复试验时事件 A 发生频率的稳定值。

熟记下列概率的基本性质：

$$0 \leq P(A) \leq 1, P(\Omega)=1, P(\emptyset)=0;$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB), \text{ 特别当 } AB = \emptyset \text{ 时, } P(A \cup B) = P(A) + P(B);$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

- 古典概型，要求达到领会层次。

了解古典型的定义，会计算简单的古典概型问题。

- 利用概率性质计算简单的古典概型问题。

3. 条件概率与事件的独立性

- 条件概率与乘法公式，要求达到简单型应用层次。

理解条件概率的定义，掌握概率乘法公式并进行计算。

- 全概率公式与贝叶斯公式，要求达到领会层次。

了解全概率公式与贝叶斯公式，会用这两个公式进行计算。

- 事件的独立性，要求达到综合应用层次。

理解事件的独立性的概念；熟记相互独立事件的积事件的概率计算公式，即若 A, B 相互独立，则 $P(AB) = P(A)P(B)$

- 贝努利概型，要求达到简单应用层次。

理解贝努利概型的定义，掌握计算方法。

1.2 重点难点提要

1.2.1 随机事件

1. 随机试验与随机事件

如果试验满足以下 3 个条件，则称为随机试验，简称试验，用 E 表示：

- ① 试验可以在相同条件下重复进行。
- ② 每次试验出现的结果不止一个，试验之前就能明确知道试验后会出现的所有可能结果。
- ③ 进行一次试验之前，不知道到底会出现哪一个结果。

随机事件，是在一次试验中可能发生也可能不发生，而在大量的重复试验中显示出某种规律性的试验结果。

在每次试验中一定发生或一定不发生的结果不是随机事件，但在概率论中为了讨论的方便

与统一,我们把这两种结果看作特殊的随机事件。随机试验中,必然发生的事件叫做必然事件,记为 Ω ,必然不发生的事件叫做不可能事件,记为 $\emptyset$ 。

试验的所有可能结果构成的集合,称为样本空间,试验的每个结果,称为样本点。

2. 事件的关系与运算

(1) 事件的关系

关 系	符 号	概率论	集合论
包含	$A \subset B$	事件 A 发生必导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
相等	$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
互不相容	$AB=\emptyset$	事件 A 与事件 B 不能同时发生	A 与 B 无公共元素
对立事件	$\bar{A}$	事件 A 的对立事件	A 的余集
和事件	$A \cup B$ $\bigcup_{i=1}^n A_i$	事件 “ A 与 B 至少有一个发生” 事件 “ $A_1, \dots, A_n$ 至少有一个发生”	A 与 B 的并集 $A_1, \dots, A_n$ 的并集
积事件	$A \cap B$ $\bigcap_{i=1}^n A_i$	事件 “ A 与 B 同时发生” 事件 “ $A_1, \dots, A_n$ 同时发生”	A 与 B 的交集 $A_1, \dots, A_n$ 的交集
差事件	$A-B$	事件 “ A 发生而 B 不发生”	A 与 B 的差集

(2) 事件的运算

- 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(AB)C = A(BC)$
- 分配律: $(A \cup B)C = AC \cup BC$

对偶律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$

1.2.2 概率

1. 概率的定义与性质

(1) 概率的公理化定义

设 E 是随机试验, S 是它的样本空间, 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的概率, 如果它满足下列条件:

① 对于每一事件 A , $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

② $P(S)=1$ 。

③ 有限可加性和可列可加性。

(2) 概率的基本性质:

① $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$ 。

② $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 。

特别当 $AB = \emptyset$ 时, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

③ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 。

④ 如果 $A \subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$, $P(A) \leq P(B)$ 。

2. 古典概型

如果一个随机试验 E 有以下两个特性:

① 样本空间是由有限个基本事件构成的。

② 每一个基本事件发生的可能性相等。

则称这种试验的数学模型为古典概型。

3. 利用概率性质计算古典概率

1.2.3 条件概率与事件的独立性

1. 条件概率与乘法公式

① 设 A, B 是两个事件, 且 $P(B) > 0$, 在事件 B 已发生的情况下事件 A 的概率, 称为条件 B 下事件 A 发生的条件概率, 记为 $P(A|B)$ 。公式为 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 。

② 乘法公式: 两个事件的积的概率等于其中一个事件的概率乘以在此事件出现的条件下另一事件的条件概率, 即

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (P(A) > 0)$$

或

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \quad (P(B) > 0)$$

2. 全概率公式与贝叶斯 (Bayes) 公式

(1) 全概率公式

若事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为完备事件组, 且 $P(B_i) > 0$, 则对任一事件 A , 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$$

(2) 贝叶斯公式

在全概率公式的条件下, 如果 $P(A) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$$

3. 事件的独立性

设 A, B 是两个事件, 若满足 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称 A 与 B 相互独立。

若 A, B 独立, 则 A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B , $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 都独立。

定理 给定事件 A 与 B , $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则“ A 与 B 相互独立”的充分必要条件为“ $P(A|B) = P(A)$ 或 $P(B|A) = P(B)$ ”。

4. 贝努利 (Bernoulli) 概型

在 n 次独立重复试验中, 每次试验只有两个结果 A 及 $\bar{A}$, 且设 $P(A) = p (0 < p < 1)$, 则事

件 A 恰好出现 m 次的概率为 $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ 。

称这种试验服从贝努利 (Bernoulli) 概型或二项分布。

1.3 经典例题及解题技巧

1. 有甲、乙两批种子, 发芽率分别为 0.8 和 0.7, 在两批中随机地各取一粒, 则:

- (1) 两粒种子都发芽的概率是_____。
(2) 至少有 1 粒种子能发芽的概率是_____。
(3) 至多有 1 粒种子能发芽的概率是_____。

解:

$$(1) \quad P_1 = P(AB) = P(A)P(B) = 0.8 \times 0.7 = 0.56$$

$$(2) \quad \begin{aligned} P_2 &= P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.8 + 0.7 - 0.8 \times 0.7 = 0.94 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} P_3 &= P(\overline{A} \overline{B} \cup \overline{A} B \cup A \overline{B}) \\ &= P(\overline{A} \overline{B}) + P(\overline{A} B) + P(A \overline{B}) \\ &= P(\overline{A})P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) + P(A)P(\overline{B}) \\ &= 0.2 \times 0.3 + 0.8 \times 0.3 + 0.2 \times 0.7 = 0.44 \end{aligned}$$

注意: • 对相互独立的事件 A, B , 有 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。

• A 与 B 相互独立时, A 与 $\overline{B}$ 、 $\overline{A}$ 与 B 、 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

2. 某班级有 18 个男生, 12 个女生, 从中选举 3 个班干部, 所选出的干部 2 男 1 女的概率为_____, 至少有 2 个女生的概率为_____。

解: 不论男女生, 从 30 个同学中选 3 个班干部共有 C_{30}^3 种选法, 选出的干部为 2 男 1 女的有 $C_{18}^2 C_{12}^1$ 种选法, 所以其概率为 $\frac{C_{18}^2 C_{12}^1}{C_{30}^3}$ 。至少有 2 个女生即 3 个班干部为 2 女 1 男或 3 个

全是女生, 有 $C_{18}^1 C_{12}^2 + C_{18}^0 C_{12}^3$ 种选法, 所以其概率为 $\frac{C_{18}^1 C_{12}^2 + C_{18}^0 C_{12}^3}{C_{30}^3}$ 。

3. 某地区成年人患某种癌症的概率是 0.02, 若医生能正确诊断某一癌症病人具有癌症的概率是 0.78, 而将健康人误诊为癌症患者的概率是 0.06, 则某人经诊断患有癌症的概率是_____。

解: 令 $A = \{\text{某成年人患癌症}\}$, $B = \{\text{医生诊断患有癌症}\}$, 由题意

$$P(A) = 0.02, \quad P(B|A) = 0.78$$

又

$$P(\overline{A}) = 0.98, \quad P(B|\overline{A}) = 0.06$$

由全概率公式

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) \\ &= 0.78 \times 0.02 + 0.06 \times 0.98 = 0.0744 \end{aligned}$$

注意: 被诊断为癌症者可分为“癌症患者被诊断为癌症”和“健康人被诊断为癌症”两种情况, 所以应该用全概率公式进行计算。

4. 甲、乙两人投篮命中率分别为 0.7 和 0.8, 每人投篮 3 次, 求:

(1) 两人进球数相等的概率。

(2) 甲比乙进球数多的概率。

解: 甲、乙投篮问题是贝努利概型。令

$A_i = \{\text{甲在 3 次投篮中投进 } i \text{ 个球}\} (i=0,1,2,3)$

$B_i = \{\text{乙在 3 次投篮中投进 } i \text{ 个球}\} (i=0,1,2,3)$

$C = \{\text{甲、乙进球数相等}\}$

$D = \{\text{甲比乙进球数多}\}$

显然, 甲投篮命中与否和乙投篮命中与否无关, 即 A_i 与 B_j ($i=0,1,2,3$) 是独立的。所以

$$P(A_0) = 0.3^3 = 0.027$$

$$P(A_1) = C_3^1 \times 0.7 \times 0.3^2 = 0.189$$

$$P(A_2) = C_3^2 \times 0.7^2 \times 0.3 = 0.441$$

$$P(A_3) = 0.7^3 = 0.343$$

同理可得, $P(B_0) = 0.008$, $P(B_1) = 0.096$, $P(B_2) = 0.384$, $P(B_3) = 0.512$ 。

又因为 A_0B_0 , A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 两两互不相容, 所以:

$$\begin{aligned} (1) \quad P(C) &= P(A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) \\ &= P(A_0B_0) + P(A_1B_1) + P(A_2B_2) + P(A_3B_3) \\ &= P(A_0)P(B_0) + P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) + P(A_3)P(B_3) \\ &= 0.36332 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P(D) &= P(A_1B_0 + A_2B_0 + A_2B_1 + A_3B_0 + A_3B_1 + A_3B_2) \\ &= P(A_1)P(B_0) + P(A_2)P(B_0) + P(A_2)P(B_1) + P(A_3)P(B_0) \\ &\quad + P(A_3)P(B_1) + P(A_3)P(B_2) \\ &= 0.21476 \end{aligned}$$

注意: 贝努利试验是独立试验中重要的一类试验, 它可用来计算在 n 次重复试验中某个事件 A 恰好发生 k ($0 \leq k \leq n$) 次的概率, 从而也可以计算 A 至少发生 k 次或 A 至多发生 k 次的概率。

5. 某城市中发行两种报纸 A, B, 经调查, 在这两种报纸的订户中, 订阅 A 报的有 45%, 订阅 B 报的有 35%, 同时订阅两种报纸 A, B 的有 12%, 求:

(1) 订户只订阅 A 报的概率。

(2) 订户只订阅 1 种报纸的概率。

解:

(1) 令 $A = \{\text{订阅 A 报}\}$, $B = \{\text{订阅 B 报}\}$, 则 $A - AB = \{\text{只订阅 A 报}\}$ 。

因为 $AB \subset A$, 所以

$$\begin{aligned} P(A - B) &= P(A - AB) = P(A) - P(AB) \\ &= 0.45 - 0.1 = 0.35 \end{aligned}$$

(2) $\{\text{只订阅 1 种报纸}\} = \overline{AB} + \overline{AB}$, 所以

$$\begin{aligned} P(\overline{AB} + \overline{AB}) &= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) \\ &= 0.45 - 0.1 + 0.35 - 0.1 = 0.6 \end{aligned}$$

6. 设甲箱中有 a 个白球, b 个红球, 乙箱中有 c 个白球, d 个红球。从甲箱中任取 1 球放入乙箱中, 然后再从乙箱中任取 1 球。求从乙箱中取到的球为白球的概率。

解: 令 $A = \{\text{从乙箱中取到的球为白球}\}$

$B_1 = \{\text{从甲箱中取出白球}\}, B_2 = \{\text{从甲箱中取出红球}\}$, 则

$$P(B_1) = \frac{a}{a+b}, P(B_2) = \frac{b}{a+b}$$

又由题有

$$P(A|B_1) = \frac{c+1}{c+d+1}, P(A|B_2) = \frac{c}{c+d+1}$$

故由全概率公式, 有

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= \frac{c+1}{c+d+1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d+1} \cdot \frac{b}{a+b} \end{aligned}$$

7. 装有 10 个白球 5 个黑球的罐中丢失一球, 但不知是什么颜色的, 为了猜测它是什么颜色的, 随机地从罐中摸出两球, 结果都是白球, 问丢失的是黑球的概率。

解: 将罐中丢失一球看作是不放回地取一球, 故设 $A = \{\text{第一次取到黑球}\}$, $B = \{\text{第二次取出的两球都是白球}\}$, 本题所求为 $P(A|B)$ 。因为

$$P(A) = \frac{C_5^1}{C_{15}^1} = \frac{1}{3}, P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$$

$$P(B|A) = \frac{C_{10}^2}{C_{14}^2} = \frac{45}{91}, P(B|\bar{A}) = \frac{C_9^2}{C_{14}^2} = \frac{36}{91}$$

所以

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.429$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = 0.384$$

1.4 教材练习题同步辅导

1. 设 A, B, C 表示 3 个随机事件, 试以 A, B, C 的运算来表示下列事件:

- (1) A, B, C 中恰好有一个发生。
- (2) A 不发生, 而 B, C 中至少一个发生。
- (3) A, B, C 中至少有两个发生。
- (4) A, B, C 中不多于一个发生。

解:

(1) 恰有一个发生, 即必须发生一个, 且与此同时其他两个均不发生。所以, 表示为: $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$ 。

(2) 不发生就是取其余集; 至少发生一个, 即除必须有一个发生外, 还可以 B, C 均发生。所以, 表示为: $\bar{A}B \cup \bar{A}C$, 即 $\bar{A}(B \cup C)$ 。

(3) 至少两个发生, 即必须有两个发生, 既可以是 AB , 又可以是 BC , 还可以是 CA 。所以, 表示为: $AB \cup BC \cup CA$ 。

(4) 由于是 3 个随机事件, 所以不多于一个发生, 就是至少有两个发生的补。表示为:

$$\overline{AB \cup BC \cup CA}。$$

注意: 发生直接取, 不发生取其补集合, 同时发生取交, 均有可能取并。

2. 盒中有 10 个球, 分别编有 1 至 10 的号码, 从中任取一球, 设:

$A = \{\text{取得球的号码是偶数}\}$

$B = \{\text{取得球的号码是奇数}\}$

$C = \{\text{取得球的号码小于 5}\}$

问下列运算分别表示什么事件:

(1) $A \cup B$; (2) AB ; (3) AC ; (4) $\overline{A} \overline{C}$; (5) $\overline{B \cup C}$ 。

解:

(1) $A \cup B = \{\text{取得的球的号码是偶数或奇数}\}$, 即是一个必然事件。

(2) $AB = \{\text{取得的球的号码既是偶数又是奇数}\}$, 显然是不可能事件。

(3) $AC = \{\text{取得的球的号码是 2 或 4}\}$ (因为小于 5 的偶数)。

(4) $\overline{A} \overline{C} = \{\text{取得的球的号码是 5, 或 7, 或 9}\}$ (因为是非偶数, 且不小于 5)。

(5) $\overline{B \cup C} = \{\text{取得的球的号码是 6, 或 8, 或 10}\}$ (因为“奇数或小于 5 的数”的整体的补)。

3. 随机点 x 落在区间 $[a, b]$ 上这一事件记作 $\{x | a \leq x \leq b\}$, 设 $\Omega = \{x | -\infty < x < +\infty\}$, $A = \{x | 0 \leq x < 2\}$, $B = \{x | 1 \leq x < 3\}$, 问下述运算表示什么事件:

(1) $A \cup B$; (2) AB ; (3) $\overline{A}$; (4) $\overline{AB}$ 。

解:

(1) $A \cup B$ 为两个区间求并, 为 $\{x | 0 \leq x < 3\}$ 。

(2) AB 为两个区间求交, 为 $\{x | 1 \leq x < 2\}$ 。

(3) $\overline{A}$ 为 $\{x | -\infty < x < 0, 2 \leq x < +\infty\}$ 。

(4) $\overline{AB}$ 为 $\{x | 0 \leq x < 1\}$ 。

此题应用图解法, 在数轴上做图易得解。

4. 若要击落飞机必须同时击毁两个发动机或击毁驾驶舱, 记为:

$A_1 = \{\text{击毁第一个发动机}\}$

$A_2 = \{\text{击毁第二个发动机}\}$

$B = \{\text{击毁驾驶舱}\}$

试用 A_1, A_2 和 B 表示 {飞机被击落} 的事件。

解: 由题知, {飞机被击落} 这一事件, 就是 A_1 与 A_2 同时发生或者 B 发生。故记为: $A_1 A_2 \cup B$ 。

5. 已知 $A \subset B$, $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$ 求:

(1) $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$ 。

(2) $P(A \cup B)$ 。

(3) $P(AB)$ 。

(4) $P(B \overline{A})$ 。

(5) $P(A - B)$ 。