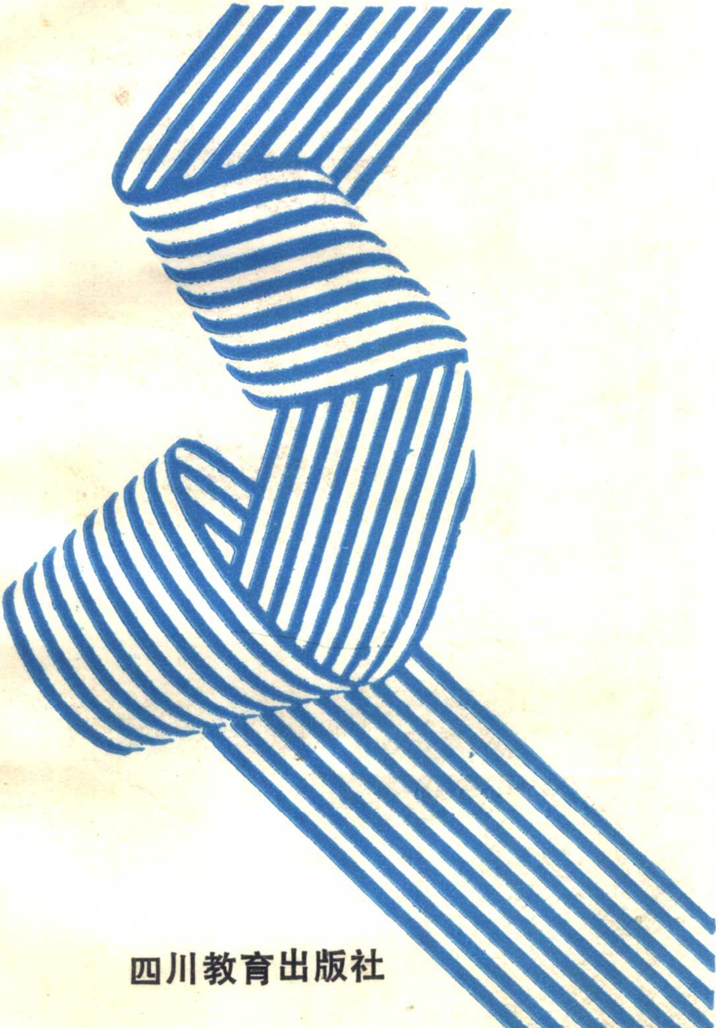
中学数学解题方法

数学归纳法

张明志



四川教育出版社

中学数学解题方法

数 学 归 纳 法

四 川 教 育 出 版 社
1989年·成都

责任编辑：刘　玲
封面设计：何一兵
版面设计：王　凌

中学数学解题方法　　数学归纳法

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　攀枝花新华印刷厂印刷

开本 787×960 毫米　1/32　印张 3.5　字数 60 千
1989年11月第一版　1991年8月第二次印刷
印数：5,201—12,300 册

ISBN7-5408-1013-0/G·983　定价：1.05元

内 容 提 要

本书介绍了中学数学中常用的解题方法之一——数学归纳法。内容主要包括数学归纳法的理论依据及各种形式．并通过大量实例说明该方法常用于解决的几类问题，及其一般所采用的思维方式、注意事项，等等。有助于读者扩展思路、培养能力、提高数学素质。

本书主要供中学生课外阅读，并可供广大教师和青年参考。

前　言

《中学数学解题方法》丛书是根据目前中学数学教学的实际而组织编写的，旨在帮助中学生扩大数学知识面，增强深广度，掌握好解题的“钥匙”。

这套丛书将系统介绍中学数学中基本的解题方法，包括《数学归纳法》、《几何变换法》、《待定系数法》、《判别式法》、《反证法》、《分析法》、《换元法》、《复数法》、《递推法》、《解析法》、《参数法》、《图解法》等十二种。

就全书体系和结构而言，丛书是以“方法”为主线，以近现代数学的基本思想为指导，纵向贯穿中学数学的主要内容，横向总揽各方法中的典型实例，力求在纵横有机结合的基础上帮助读者拓宽解题思路，培养分析和运用方法的能力，从而提高数学思维的素质。

该丛书的编写注意突出了以下几点：

1. 以方法成书，每册书全面系统地介绍了一种方法的基本理论及各种具体的运用，着重阐述了一种方法常用于解决哪几类问题，在什么情况下使用这种方法，以及一般采用的思维方式，等等。

2. 方法的介绍力求科学性与趣味性的统一。定

义、定理、公理的表述，一是符合近现代数学的基本理论，二是与全国统编教材基本吻合。对方法的理论依据均作了较为浅显的说明，并将生动性和趣味性融合于实例中，以达深入浅出，事半功倍的效果。

3．例题的选择注重了典型性、灵活性、启发性，有助于培养逻辑思维，抽象思维以及发散思维，求同、求异思维等。

这套丛书的作者均是高级数学教师，有着丰富的教学和科研经验，作为他们多年来辛勤劳动的结晶奉献给广大中学师生和数学爱好者，将使他们感到最大的欣慰。

编辑出版这套丛书，是我社根据教育体制改革及教学实际要求进行的尝试探索，不足之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编者

1988.10.

目　录

演绎法与归纳法

人们在认识事物时，通常都要在已知事实的基础上进行推理，得出新的结论．推理的方法很多，其中演绎推理（简称演绎法）与归纳推理（简称归纳法）是两种基本的方法，无论在日常生活还是在数学中都得到了广泛应用．例如，我们由

每一个三角形的内角和都等于180°， (1)

$\triangle ABC$是一个三角形， (2)

得出 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$． (3)

便进行了推理．这里（1）是一个已知的一般性命题，(2)说明具体的$\triangle ABC$在{三角形}这个集合中，于是得到结论（3）．整个推理过程是从总体到个别，从一般到特殊，这样的推理称为**演绎法**．(1)称为大前提(前提即条件的意思)，(2)称为小前提，(3)是结论．由大前提、小前提推出结论，这种

形式的演绎法称为三段论演绎法。一个数学定理的证明通常就是由若干个三段论演绎法构成的。可以说，没有演绎法就没有数学证明。

演绎法虽然重要，但它并不是万能的。特别是当我们去研究一个不熟悉的新问题时，像上面（1）中那样的一般规律我们还知之甚少，这时，我们推理的方向往往恰好颠倒过来——从特殊到一般，这样的推理称为**归纳法**。

例如，当我们比较 n^2 与 4^n 的大小时，经初步计算可得下面的表：

n	1	2	3	4	5	6	…
n^2	1	4	9	16	25	36	…
4^n	4	16	64	256	1024	4096	…

（4）

由表(4)我们容易猜想，对所有的自然数 n 都有

$$n^2<4^n. \tag{5}$$

表(4)说明对 $n=1$、2、3、4、5、6 这几个特殊值(5)式成立。我们由表（4）推断（实际是猜想）(5)式对所有自然数成立，这就是从特殊到一般的推理，采用的便是归纳法。

象这种只验证了部分特殊情况而推测一般情况也成立的归纳法又称为**不完全归纳法**。很明显，不

完全归纳法只能提供一种猜测．这时，可能猜对，也可能猜错。所以，它不是一种证明方法，在这一点上它与演绎法有着根本区别。

由不完全归纳法导致错误猜想的例子是不少的。下面我们略举一二。

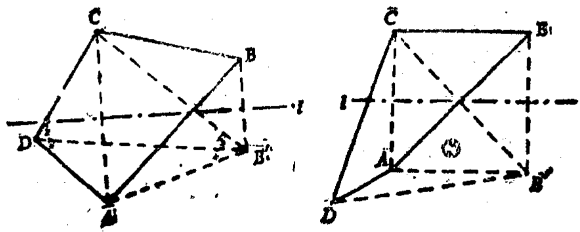
例1 法国数学家费马（Fermat）考查了 $2^{2^1}+1=5$，$2^{2^2}+1=17$，$2^{2^3}+1=257$，$2^{2^4}+1=65537$，而 5，17，257，65537 均为素数(即质数)，于是，他断言：对任意自然数 n，$2^{2^n}+1$ 均为素数。但他的猜想是错误的。瑞士数学家欧拉（Euler）发现，当 $n=5$ 时

$$2^{2^5}+1=4294967297=641\times 6700417$$

为合数。

例2 1986 年西德数学家陈莫孔（Mok-kon Shen）用计算机发现，当 $3\leqslant n\leqslant 10^6$ 时，只有 $n=20737$，93527，228727，373457，540857 这 5 个数时满足：n 整除 $2^{n-2}-1$。于是，美国数学家本柯斯基（Benkoski）问道：是否满足 n 整除 $2^{n-2}-1$ 的所有整数 $n(n\geqslant 3)$ 都是以数字 7 结尾的？最近笔者发现 $n=6954420115823$ 也满足上述条件。所以，n 以数字 7 结尾的猜想不成立。

例3 考虑凸四边形 $ABCD$，当 $AB>CD$，$BC>AD$ 时，比较 $\angle D$ 与 $\angle B$ 的大小。



(a)　　　　(b)

图1

在图1(a)中，以线段AC的垂直平分线l为对称轴，作B点的对称点B'。由对称性知

$B'A=BC$，$B'C=BA$，$\angle AB'C=\angle ABC$。

于是　$B'A>AD$，$B'C>CD$。

$\therefore$　$\angle 2>\angle 4$，$\angle 1>\angle 3$，

$\therefore$　$\angle 1+\angle 2>\angle 3+\angle 4$。

$\therefore$　$\angle ADC>\angle ABC$。

这样，我们似乎证明了$\angle D>\angle B$这一结论。但仔细考虑会发现：图1(a)中的图形有一定特殊性，B'是在$\angle ADC$的内部。对于图1(b)的凸四边形，B'落在$\angle ADC$的外部，上面的证明就通不过了（请读者自已找出究竟哪一步通不过）。同时，如果令$AC=BC=1$，$AD=\dfrac{1}{2}$，$\angle ACB=90°$，$\angle CAD$

$=120°$，于是

$$AB=\sqrt{2},$$

$$CD=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{1}{2}\cos120°}$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\therefore\quad AB>CD,\ BC>AD.$$

但这时

$$\sin D=\frac{AC\cdot\sin120°}{CD}=\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{7}}<\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin B.$$

$$\therefore\quad \angle D<\angle B.$$

所以$\angle D>\angle B$这一论断一般来说是不成立的，虽然对图1(a)中的情形它能成立。

不完全归纳法虽然可能导致错误的猜想，但它也可能导致正确的猜想，它能使我们发现新的规律。研究一个新问题时，我们首先需要猜到结论，然后再设法去证明（或否定）该结论。如对于不等式$n^2<4^n$，只有当我们已经猜到它之后，才会设法去证明它。所以，不完全归纳法作为一种猜想的方

法，在数学研究、数学发现中起着重要作用。

在进行归纳时，如果我们考虑了全部特殊情况，那么我们就可以断言结论确实成立。这样的归纳法称为**完全归纳法**。完全归纳法是一种证明方法。例如，当我们在证明“一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半”这一定理时，我们分三种特殊情况考虑：

i）圆心在圆周角的边上，

ii）圆心在圆周角的内部，

iii）圆心在圆周角的外部。

对于情况i）、ii）、iii）我们分别证明了上述结论成立，由于同一圆中圆心与圆周角的位置只有这三种情况，所以上述结论普遍成立。

一般地，如果在一个问题中仅有有限种特殊情况，那么从原则上讲，我们总可以如上面的例子一样，逐一去考查各种情况，作出完全的归纳，从而证明结论。但是要证明 $n^2<4^n$ 对所有的自然数 n 都成立却不能这样作，因为自然数集是无限集，简单地令 $n=7$，8，9，…，这样验证下去是没有完结的。对于象 $n^2<4^n$ 这种与自然数有关的命题，我们一般可以采用数学归纳法来处理。数学归纳法也是一种完全归纳法，利用它，我们可以证明一个命题对所有的自然数成立。

数学归纳法

数学归纳法是证明与自然数集有关的命题的一个强有力的工具，在不同的情况下应用时，它可以具有各种不同的形式，但其基本思想是相同的。下面我们以最简单、最基本的形式来说明数学归纳法的实质。

数学归纳法 包括下面两个步骤：

A．证明当 $n=1$ 时，命题成立。

B．假设 $n=k$ 时命题成立，证明当 $n=k+1$ 时命题也成立。

完成这两个步骤后，我们就可以断言该命题对所有的自然数都成立。

为什么完成了A、B两步后便能断言命题对所有的自然数都成立呢？这是因为。

i）由A知，$n=1$ 时命题成立；

ii）在B中，令$k=1$，由i)与B知$n=k+1=1+1=2$时命题成立；

iii）在B中，令$k=2$，由ii)与B知$n=k+1=2+1=3$时命题成立；

…… …… ……

如此无限地推证下去，可知$n=1$，2，3，4，…，即n为任意自然数时命题成立。在上面无限步推理中，我们无限次地应用了步骤B。这里，k的任意性起了关键作用。即是说，k是一个变量，上面，k依次取了1，2，3，…无穷多个值。

对于步骤B我们也可以叙述为“假设命题对任给的一个自然数k成立，那么对后面一个自然数$k+1$命题也成立”，所以可以说步骤B体现了一种“遗传性”。因为$n=1$时命题成立，经过“遗传”，逐次得出$n=2$，3，…，以致对任何一个自然数命题都成立。

不难看出，上面我们由i)与B推出ii)时，B是大前提，i)是小前提，ii)是结论；在由ii)与B推出iii)时，B是大前提，ii)是小前提，iii)是结论；……。所以数学归纳法实质上是由无穷多步的三段论演绎法构成的。由于我们在记号上引入了变量k，因此能够用A、B两个步骤把这个无限的过程简明地表达出来。

下面我们用数学归纳法来证明上一节里的(5)式：$n^2<4^n$。

A．$n=1$ 时，(5)式变为 $1<4$，成立。

B．设 $n=k$ 时，(5)式成立，即

$$k^2<4^k \tag{6}$$

现在，我们要证明 $n=k+1$ 时(5)式也成立，即证明

$$(k+1)^2<4^{k+1} \tag{7}$$

成立。比较已知的(6)式与求证的(7)式知，可将(6)式变形为 $4^{k+1}>4k^2$，要证(7)式只需证明

$$4k^2>(k+1)^2, \tag{8}$$

由 $4k^2-(k+1)^2=3k^2-2k-1$

$=(3k+1)(k-1)>0 \quad (k>1)$

知(7)式成立($k=1$ 时直接验证)。于是，根据数学归纳法知，对所有的自然数 n 有 $n^2<4^n$。

上面我们初步弄清了数学归纳法的原理及其用法，下面我们再指出几个应该注意之点：

①上面的步骤 A 通常验证时十分简单，但是却绝对不可缺少。因为步骤 A 是我们推理的出发点(通常称为**归纳基础**)。如果我们不知道 $n=1$ 时命题成立，也就不能逐步推出 $n=2$，$n=3$，…时命题成立。例如，我们考虑

命题：$n>n+1$。