SHIDAISHUYINLUN

实代数引论

戴执中 著

江西高校出版社

SHIDAISHU YINLUN

实代数引论

实代数引论

戴执中 著

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

实代数引论/戴执中著.—南昌:江西高校出版社,
1999.3
ISBN 7-81033-935-4

Ⅰ.实… Ⅱ.戴… Ⅲ.实代数 Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 13240 号

江西高校出版社出版发行
(江西省南昌市洪都北大道 96 号)
邮编:330046 电话:(0791)8512093、8504319
江西恒达科贸有限公司照排部照排
南昌市红星印刷厂印刷
各地新华书店经销
*
1999 年 3 月第 1 版 1999 年 3 月第 1 次印刷
850mm×1168mm 1/32 4.5 印张 115 千字
印数:1~600 册

定价:11.80 元
(江西高校版图书如有印刷、装订错误,请随时向承印厂调换)

前　言

本书是以作者于1991年—1996年在江西大学和南昌大学为研究生讲授"实代数"课程的讲义为基础，经过修改而写成的．在该课程之前，曾有"实域论"一课的开设．因此，本书的立足点是实交换环，实域的某些内容只作为它的特款．实域理论已有七十余年的历史，Prestel的著作（见参考文献[41]）就是这方面的一本优良教材．实代数方面的情形则不一样，类似的入门教材尚不多见．本书介绍了这方面的基础知识，同时也包含了某些不见于其他同类著作中的内容，例如环的实位等．在成书的过程中，曾广兴教授曾提供过例子；听过该课程的张三强、邹群、邱德荣、卓之兵、聂晓冬、艾小伟等同学曾对讲义提过有益的建议．对此，作者向他们表示诚挚的谢意．作者的孩子戴航为原稿的打印和校对作了大量的工作．最后，感谢江西高校出版社为本书的出版所给予的大力支持．

作者

1999年3月

本书所讨论的环，均指带有乘法单位元的交换环，其子环具有同一个乘法单位元．同态映射使乘法单位元互相对应．

符号一览

$\varnothing$	空集
$\boldsymbol{N}$	自然数集
$\boldsymbol{Z}$	整数环境
$\boldsymbol{Q}$	有理数域
$\boldsymbol{R}$	实数域
$a \in A$	a 是A 的元
$a \notin A$	a 不是A 的元
$A \supset B, B \subset A$	A 包含B

$-A = \{-a \mid a \in A\}$

$A^2 = \{a^2 \mid a \in A\}$

$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

$A \cdot B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$

$A \setminus B = \{a \mid a \in A, a \notin B\}$

$\sum A^2 = \{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mid a_i \in A, \forall n \in \boldsymbol{N}\}$

目　　录

§1　半实环与实环 ………………………………（1）
§2　环的亚序和序 ………………………………（8）
§3　T-凸子环与理想的 T-根 ……………………（17）
§4　环的实谱 ……………………………………（29）
§5　半实环的点定理 ……………………………（41）
§6　环的实位与实赋值 …………………………（46）
§7　实位的构造 …………………………………（54）
§8　实仿射代数 …………………………………（60）
§9　半代数集与半代数点定理 …………………（72）
§10　实全商环……………………………………（78）
§11　实 Prüfer 环 ………………………………（93）
§12　实全纯环 …………………………………（106）
附录 A　环的赋值 ………………………………（114）
附录 B　Prüfer 环………………………………（123）
后记 ………………………………………………（131）
参考文献 …………………………………………（134）
中英文名词对照与索引 …………………………（138）

§1 半实环与实环

我们已经熟悉了实域的一些基本知识，当域改换成交换环时，它的实性就出现了分歧.具体地说，比照域的实性，在环上将会导致两种实性.现在先来定义一种较弱的实性.

定义 1 设 R 是个环，若有

$$\{0\} \cap (1 + \sum R^2) = \emptyset \tag{1.1}$$

成立，就称 R 为**半实环**，或者，R 是半实的.

(1.1)是指在环 R 中，-1 不能表作平方和.因此，从这个定义立即可知半实环的特征只能为0，从而每个半实环都包含(不计同构)整数环 $\mathbf{Z}$ 为其子环.如果 R 是个域，定义1就是实域(或称形式实域)的定义，但对于环来说，还有一种较强的实性：

定义 2 设 R 是个环，若对于任何自然数 n，方程

$$X_1^2 + \cdots + X_n^2 = 0 \tag{1.2}$$

在 R 中只有全零解，，即只有 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，则称 R 为**实环**，或者，R 是实的.

实环同时是半实环，这是十分明显的事实；但逆理并不真，下面将有例子阐明.我们说定义 2 的实性较定义 1 所给的为强，理由也在于此.不过对于域而言，二者是一致的.

通过环的半实性和实性，我们可以对理想引入类似的概念.设 $\boldsymbol{a}$ 是环 R 的一个真理想.当商环 $R/\boldsymbol{a}$ 是半实环或实环时，就分别称 $\boldsymbol{a}$ 为 R 中的**半实理想**或**实理想**.若仿照前面的定义，也可以作如下的规定：

$\boldsymbol{a}$ 成为 R 中的半实理想，当且仅当有

$$\mathfrak{a} \cap (1 + \sum R^2) = \varnothing \tag{1.3}$$

成立；$\mathfrak{a}$ 成为实理想，当且仅当对任何自然数 n，同余方程

$$X_1^2 + \cdots + X_n^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}} \tag{1.4}$$

在 R 中只有浅显解 $x_1 \equiv x_2 \equiv \cdots \equiv x_n \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$.

以上的事实表明，环 R 成为半实环或实环，等同于它的零理想(0) 是半实理想或实理想. 但对于非零理想来说，情况就未必如此了. 在举出例子之前，先注意一个简单的事实：

引理 1 设 X 是环 R 上的一个未定元. 于是，R 成为实(半实)环，当且仅当 $R[X]$ 是个实(半实)环.

证明是常规的，从略. 由此得知，当 R 是实(半实)环时，R 上的多元多项式环 $R[X_1,\cdots,X_n]$ 也是实(半实)环.

例 设 $R = \mathbf{R}[X,Y]$，其中 X, Y 为 $\mathbf{R}$ 上独立的未定元. 令 $\mathfrak{a}_1 = (X,Y)$；$\mathfrak{a}_2 = (X^2+Y^2)$；以及 $\mathfrak{a}_3 = (1+X^2+Y^2)$. 首先，据引理 1，$R$ 是个实环. 易知 $\mathfrak{a}_1$ 和 $\mathfrak{a}_2$ 分别是 R 中的实素理想和半实素理想，但 $\mathfrak{a}_3$ 不是半实的，因为 $\mathfrak{a}_3 \cap (1 + \sum R^2) \neq \varnothing$.

这个例子表明，环的实性或半实性与其中非零理想的实性或半实性并不全然一致. 不过，它们之间仍然有某种关联. 这可以从下述定理中见到：

定理 1 对于环 R，以下诸论断等价：

①R 是半实环；

②R 中有半实理想；

③R 中有半实素理想；

④R 中有实素理想.

证明 ①→②. 当 R 是半实环时，(0) 就是一个半实理想，即② 成立.

②→③. 设 $\mathfrak{a}$ 是 R 的一个半实理想；又记 $M = 1 + \sum R^2$. 在② 的前设下，$0 \notin M$，所以 M 是 R 的一个乘法子集. 从 $\mathfrak{a} \cap M = \varnothing$，知有某个同时满足 $\mathfrak{p} \cap M = \varnothing$ 与 $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ 的极大理想 $\mathfrak{p}$ 存在. 由交

换环的理论知 $\boldsymbol{p}$ 是素理想，即 ③ 成立.

③ → ④. 设 $\boldsymbol{p}_0$ 是 R 的一个半实素理想. 取 $\boldsymbol{p}$ 为满足 $\boldsymbol{p} \supseteq \boldsymbol{p}_0$，以及 $\boldsymbol{p} \cap M = \emptyset$ 的极大理想. 今往证 $\boldsymbol{p}$ 又是实理想. 设

$$x = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \in \boldsymbol{p}, \quad n \geqslant 2.$$

如果 $a_1 \notin \boldsymbol{p}$，则 $\boldsymbol{p} + (a_1) \supset \boldsymbol{p}$. 此时应有

$$(\boldsymbol{p} + (a_1)) \cap M \neq \emptyset.$$

设 $p_1 + ba_1 = 1 + s_1$，其中 $p_1 \in \boldsymbol{p}$，$s_1 \in \sum R^2$. 将此式两边取平方，经化简后得到如下的等式

$$p_2 + b^2 a_1^2 = 1 + s_2;\ p_2 \in \boldsymbol{p},\ s_2 \in \sum R^2.$$

今以 $b^2 a_2^2 + \cdots + b^2 a_n^2$ 加到上式的两边，即得

$$p = p_2 + b^2 x = 1 + s,$$

其中左边 $p \in \boldsymbol{p}$，右边的 $s \in \sum R^2$，而与 $\boldsymbol{p} \cap M = \emptyset$ 相矛盾. 因此应有每个 $a_i \in \boldsymbol{p}$，即 $\boldsymbol{p}$ 是个实素理想，故 ④ 成立.

④ → ①. 显然成立，证毕.

这里是一个适当的地方来引进两个称谓：称理想 $\boldsymbol{a}$ 为极大实(半实)理想，如果 $\boldsymbol{a}$ 本身是实(半实)的，同时，任何包含 $\boldsymbol{a}$ 的真理想将不再是实(半实)理想. 从定理 1 的证明过程 ② → ③ → ④，我们还附带地得知如下的两个事实：

推论 1 对于 R 的任一半实真理想 $\boldsymbol{a}$，总存在包含 $\boldsymbol{a}$ 的极大半实理想；任何极大半实理想都是素理想.

推论 2 R 的极大半实理想必然同时是极大实理想，即极大半实理想与极大实理想二者是一致的.

推论 2 是一条重要的结论. 在这里可以附带地指出，极大实理想与极大理想在一般的情况下是不相同的，$\mathbf{Z}$ 就是一个最简单的例子. 在 $\mathbf{Z}$ 中，(0) 是唯一的实理想，从而也是极大实理想；而由任何一个素数 p 所生成的主理想 (p)，则是极大理想而非实理想.

对于实(半实) 理想，我们还要提及一些简单的事实：实(半

实)理想的交固然是实(半实)理想,但和与积的情形就不一定了.现在先就实理想的和与积举出例子:

在实环 $\mathbf{Z}[X]$ 中,主理想(X),(X^2-2)都是实理想.但由 $1+1=2\in(X)+(X^2-2)$,以及$(X)+(X^2-2)\neq\mathbf{Z}[X]$,可知$(X)+(X^2-2)$不是实理想.又如$(X^2-X)$和$(X+1)$都是 $\mathbf{Z}[X]$ 的半实理想,而它们的和含有 X^2+1,因此不是半实的.

来考虑一个相乘的例子:取 $\mathbf{Z}[X]$ 中主理想 $\boldsymbol{a}=(X)$ 与 $\boldsymbol{b}=(X^2-X)$.易知,这是两个实理想,其积为$(X(X^2-X))$.从$(X^2-X)^2=X(x^2-X)(X-1)$,知有$(X^2-X)^2\in(X(X^2-X))$.但 $X^2-X=X(X-1)\notin(X(X^2-X))$,这表明了 $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$ 不是实理想.

从定理 1 还可以得到一些推论:

推论 3 R 成为半实环的充要条件,是 R 的极小素理想中至少有一个是半实的.

证明 充分性已由定理获知.设 R 是个半实环,即(0)是它的半实理想.于是存在包含(0)的极大半实理想 $\boldsymbol{m}$;而且,含在 $\boldsymbol{m}$ 中的极小素理想显然也是半实的.

推论 4 设 $\lambda:R\to S$ 是从环 R 到环 S 的一个同态,若 S 是半实环,则 R 也是半实的.

证明 令 $\boldsymbol{a}=\ker\lambda$.从 S 的半实性知有$\{0\}\cap(1+\sum S^2)=\emptyset$.由此导致 $\boldsymbol{a}\cap(1+\sum R^2)=\emptyset$,即 $\boldsymbol{a}$ 是 R 的半实理想,从而 R 是个半实环.

这个推论的逆理并不成立,由 R 的半实性并不一定能得出 S 是半实环.在前面所举的例子中,若取 $S=R/\boldsymbol{a}_3$,即可示明这一事实.

现在来对实环作一个类似的考虑.首先,我们注意到,从 R 的实性立即得知 R 不含幂零元.因此,实环 R 的诣零根$\sqrt{R}=(0)$.满足这一条件的环称做是既约的(或者,半素的).今有

定理 2 对于环 R,以下诸论断等价:

①R 是实环;

②R 是既约的,并且 R 的每个极小素理想都是实素理想;

③R 中所有实素理想之交为(0).

证明 ①→②.设 R 是个实环,R 的既约性已如前述.令 $\boldsymbol{p}$ 是 R 的任一极小素理想.于是,$R \setminus \boldsymbol{p}$ 是 R 的一个极大乘法子集.设

$$x = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \in \boldsymbol{p}, \quad n \geqslant 2. \tag{1.5}$$

作子集

$$M = \{zx^r \mid z \in R \setminus \boldsymbol{p}; r = 0,1,\cdots\}.$$

这是一个真包含 $R \setminus \boldsymbol{p}$ 的乘法子集,因此,应有某个 $y \in R \setminus \boldsymbol{p}$,以及 $r > 0$,使得有 $0 = yx^r \in M$.从 R 的既约性可得 $yx = 0$.代入(1.5),得到

$$(a_1y)^2 + \cdots + (a_ny)^2 = 0.$$

由于 R 是实环,故有 $a_iy = 0 \in \boldsymbol{p}, i = 1,\cdots,n$.从而又有 $a_i \in \boldsymbol{p}$, $i = 1,\cdots,n$;即 ② 成立.

②→③.显然.

③→①.设有等式 $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$.对于每个素理想 $\boldsymbol{p}$,上式又给出同余式

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \equiv 0 \pmod{\boldsymbol{p}}.$$

因为 $\boldsymbol{p}$ 是实的,所以每个 $a_i \in \boldsymbol{p}$.从而 $a_i \in \bigcap_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{p}$,其中 $\boldsymbol{p}$ 取遍 R 中所有的实素理想.由所设,知每个 $a_i = 0$,故 ① 成立.证毕.

对于 R 的理想 $\boldsymbol{a}$ 来说,条件"既约的"就成为 $\sqrt{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}$.此时称 $\boldsymbol{a}$ 是个根理想.于是有

推论 环 R 的理想 $\boldsymbol{a}$ 成为实理想,当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 是根理想,而且,$\boldsymbol{a}$ 上每个极小素理想都是实的.

特别在 R 是个 *Noether* 环时,$\boldsymbol{a}$ 成为实理想的充要条件,是 $\boldsymbol{a}$ 为根理想,而且是有限多个实素理想之交.

定理的 ③ 中所出现的交 $\bigcap_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{p}$,我们将在 §3 中赋予意义,并

在 §8 中阐示它的重要性质.现在继续讨论环与理想的实性和半实性.

实性强于半实性,这从定义即可认知.对半实性能成立的事实,对于实性就不一定能够成立.例如,对于 R 的二个理想 $\boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{b}$,当 $\boldsymbol{b}$ 是半实理想时,按半实性的判断法则(1.3),立即得知 $\boldsymbol{a}$ 也是半实的.由此又可以得知,两个半实理想之积,甚至一个半实理想与任何一个理想之积,也必然是半实的.前面已经指出,这对于实理想是不成立的.当 $\boldsymbol{b}$ 是个实理想,从 $\boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{b}$ 并不导致 $\boldsymbol{a}$ 是实的.例如在环 $\boldsymbol{R}[X,Y]$ 中,理想 $\boldsymbol{a} = (X^2 + Y^2)$ 与 $\boldsymbol{b} = (X,Y)$ 即可说明这一事实.此时 $S = \boldsymbol{R} \simeq \boldsymbol{R}[X,Y]/(X,Y)$, $R = \boldsymbol{R}[\bar{X},\bar{Y}] \simeq \boldsymbol{R}[X,Y]/(X^2 + Y^2)$.若令 $\lambda: R \to S$ 是由 $\bar{X},\bar{Y} \to 0$ 以及在 $\boldsymbol{R}$ 上取恒同映射所规定的同态,定理 1 的推论 4 对于实环就不再成立.因为 R 仅仅是半实的.这原因在于 λ 不是单一映射,即 $\ker\lambda \neq (0)$.如果 λ 是单一映射,从 S 的实性自然会得出 R 的实性.

当 R 是个整环时,我们发现,定理 2 对它的实性实际上并未给出判断.为此,我们从另一角度来考虑.设 R 为任一实环;M 是它的一个乘法子集.以常规的方式就可以认知,R 关于 M 的局部化 R_M 也是个实环,特别在 M 取 R 中所有的正则元(即非零除子)所成的子集时,R 关于它的局部化为 R 的全商环,记作 $T(R)$.

引理 2 环 R 成为实环,当且仅当它的全商环 $T(R)$ 是实环.

对于整环而言,全商环就是它的商域*.因此,整环是否成为实环,取决于它的商域是否为实域.

但对于半实环,情形又不同了.半实环关于某个乘法子集的局部化可以不再是半实的.再次使用前面的例子:$R = \boldsymbol{R}[X,Y]/(X^2 + Y^2) = \boldsymbol{R}[\bar{X},\bar{Y}]$,此时 R 是个半实环.取它的乘法子集

$$M = \{1, \bar{X}, \bar{X}^2, \cdots, \bar{X}^n, \cdots\cdots\}.$$

在环 R_M 中,有

$$-1 = \bar{Y}^2/\bar{X}^2 = (\bar{Y}/\bar{X})^2$$

成立,从而 R_M 不是半实环.

对于 R 的素理想p,以 R_p 记R关于乘法子集$R \setminus p$ 所作的局部化.今有

引理 3 设 R 是实环,p 为任一极小素理想.于是有 $\mathrm{qf}(R/p) \simeq R_p$,后者又是个实域.

证明 据定理2,p 是个实素理想.再按引理2,R/p 与它的商域 $\mathrm{qf}(R/p)$ 都是实的.但 $\mathrm{qf}(R/p) \simeq R_p/pR_p$.由于 p 是R 的极小素理想,所以 pR_p 是R_p 中唯一的素理想.从而又有$\sqrt{R_p} = pR_p$.据定理 2 以及 R_p 也是既约的这一事实,可得到 $pR_p = (0)$,从而 $\mathrm{qf}(R/p) \simeq R_p$.引理的后一论断由引理 2 即知.

定理 3 环 R 成为实环,当且仅当 R 同构映入由一族实域所成的直接积内.

证明 充分性是易见的,因为,由一族实域所成的直接积自然是个实环;而实环的子环也是实的.

现在设 R 是个实环;$\{p_r\}_{r\in\Lambda}$ 是 R 中所有极小素理想所成的族.由定理2,每个 p_r 都是实的.再按引理 3,每个 R_{p_r} 都是实域.对于 R 中每个$a \neq 0$,必有某个 p_r,使得 $a \notin p_r$.按 $R_{p_r} \simeq \mathrm{qf}(R/p_r)$,$a$ 在R_{p_r} 内的象元$\pi_r(a) \neq 0$,这里 π_r 是由自然同态$R \to R/p_r$ 与从 R/p_r 到 $\mathrm{qf}(R/p_r)$ 内的恒同嵌入所并成的同态.再令

$$\pi : a \mapsto \prod_{r\in\Lambda} \pi_r(a).$$

显然,这是一个从 R 到直接积$\prod_{r\in\Lambda} R_{p_r}$ 内的同态,而且有 $\ker\pi = (0)$,故 π 是个同构嵌入.

---

* 对于整环 D 的商域,我们仍用习惯的记法,写作 $\mathrm{qf}(D)$.

§2　环的亚序和序

在环 R 中,我们称满足以下诸条件

$$T + T \subset T;\ T \cdot T \subset T;\ 0,1 \in T;\ -1 \notin T \tag{2.1}$$

的子集 T 为 R 的一个偏序;带有偏序 T 的环 R 称作偏序环,记以 $\langle R,T\rangle$. 从这个规定得知,任何偏序环的特征都是 0;而且 $T \neq R$. 另外,注意到 $T \cap -T$ 是 T 的一个非空真子集,而且还是包含在 T 中的最大加法子群. 我们称 $T \cap -T$ 是 T 的**支集**,记作 $\mathrm{supp}(T)$.

从半实环的角度而论,一种稍强于偏序的概念更符合实际的需要,它就是除(2.1)外,还要求满足

$$x^2 \in T,\quad \forall x \in R.$$

这一附加条件使得 $0,1 \in T$ 自然成立. 因此,我们把它重述如下:

定义 1　若环 R 的子集 T 满足如下条件

(1) $T + T \subset T$;

(2) $T \cdot T \subset T$;　　(2.2)

(3) $x^2 \in T,\quad \forall x \in R$;

(4) $-1 \notin T$.

则称 T 为 R 的一个**亚序**,又称 $\langle R,T\rangle$ 是个**亚序环**.

从 R 的亚序 T,可以在 R 上规定一个亚序关系 $\leqslant_T$ 如下:

$$a \leqslant_T b \text{ 当且仅当 } b - a \in T \tag{2.3}$$

据这个规定以及(2.2),可知 $\leqslant_T$ 有以下的性质:

(1) 由 $a \leqslant_T b$, $c \leqslant_T d$ 可得 $a + c \leqslant_T b + d$;

(2) 由 $0 \leqslant_T c$, $a \leqslant_T b$ 可得 $ac \leqslant_T bc$;　　(2.4)

(3)$0 \leqslant_T x^2, \forall x \in R$;

(4)$1 \not\leqslant_T 0$.

若有 $a \leqslant_T b$ 与 $b \leqslant_T a$ 同时成立,即 $b - a \in \mathrm{supp}(T)$,此时可写为 $a =_T b$. 又如果 $a \leqslant_T b$,但 $a \neq_T b$,则可简写为 $a <_T b$. 从(2.4) 的(3),(4),知对于 R 的任一亚序 T,恒有 $0 <_T 1$.

从(2.2) 的(1) 和(3),可知 $\sum R^2$ 包含在 R 的每一个亚序之内;而且,$\sum R^2$ 自身显然满足(2.2) 的(1)—(3). 在 R 是半实环时,$-1 \notin \sum R^2$. 此时 $\sum R^2$ 是 R 的一个亚序. 这个事实指出,半实环 R 是有亚序的,$\sum R^2$ 即为其中之一;而且,按集包含关系而言,$\sum R^2$ 是最小的亚序. 我们称 $\sum R^2$ 为半实环 R 的**弱亚序**,有时简记作 T_W. 有亚序的环是半实环,这从亚序环的定义即知. 但偏序环却不必是半实的. 例如,在环 $\mathbf{Z}[i]$ 中,此处 $i = \sqrt{-1}$,取 $T = \{0,1,2,\cdots\}$,显然 $\langle \mathbf{Z}[i], T\rangle$ 是个偏序环. 而不是半实环. 基于这一事实,使我们以亚序作为研究半实环的主要基础. 若以 $\boldsymbol{Y}(R)$ 记环 R 中所有亚序组成的集,则 R 成为半实环的充要条件是 $\boldsymbol{Y}(R) \neq \varnothing$.

在亚序环 $\langle R, T\rangle$ 中,对任一元 $x \in R$,并不必然有 $x \in T$ 或者 $x \in -T$. 为了弥补这一缺陷,今再作如下的

定义 2 设 T 是环 R 的一个亚序. 如果 T 又满足条件

(1)$T \cup -T = R$; (2.5)

(2)$\mathrm{supp}(T)$ 是 R 的一个素理想,

则称 T 是 R 的一个**序**.

除 §4 外,常以 $P, Q, \cdots$ 表示序,又称 $\langle R, P\rangle, \cdots$ 为**序环**. 用 $\boldsymbol{X}(R)$ 表示由 R 中所有的序所成的集合,显然,它是 $\boldsymbol{Y}(R)$ 的子集.

对于域而言,因为(0) 是域中唯一的素理想,所以(2.5) 的(2) 可以改为