

实用小波分析

刘春生 张晓春 著

中国矿业大学出版社

实用小波分析

ISBN 7-81070-420-6



9 787810 704205 >

ISBN 7-81070-420-6/O·31 定价：16.80元

责任编辑：刘永清 封面设计：白海新

实用小波分析

刘春生 张晓春 著

中国矿业大学出版社

责任编辑 刘永清

图书在版编目(CIP)数据

实用小波分析/刘春生, 张晓春编. —徐州: 中国矿业大学出版社, 2002.1

ISBN 7-81070-420-6

I. 实… II. ①刘… ②张… III. 小波分析-研究生-教材 IV. 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 083891 号

中国矿业大学出版社出版发行

(江苏徐州 邮政编码 221008)

出版人 解京选

北京地质印刷厂印刷 新华书店经销

开本 787×1092 1/16 印张 10.375 字数 251 千字

2002 年 1 月第 1 版 2002 年 1 月第 1 次印刷

印数 1~1000 册 定价:16.80 元

(如有印装质量问题,本社负责调换)

前 言

小波分析是近 10 多年来发展起来的新兴学科,它无论是对数学本身的发展还是对工程技术应用都产生了深远的影响。目前,小波理论本身还在不断发展,其应用领域正在逐渐扩大。小波分析已经广泛应用于应用数学、信号处理、图像分析处理、量子场论、地球物理勘探、语音识别与合成、机械故障诊断与监控、自动控制、物理学、分形、通信、雷达、生物医学、湍流分析、优化设计、经济等领域。从原则上讲,凡传统使用 Fourier 分析的地方,都可以用小波分析代替。小波分析优越于 Fourier 分析的地方是,它在时域和频域同时具有良好的局部化性质,而且由于对高频成分采用逐渐精细的时域或空域采样步长,从而可以聚焦到分析对象的任意细节。由此,小波分析被人们誉为可以变焦的数学显微镜。

小波分析正是在纯数学家、工程应用研究领域的应用数学家和工程师共同努力下而得以迅速发展的,并引起整个科学研究和工程技术应用研究各个领域专家和学者的极大关注。也吸引了上述研究领域越来越多的科研工作者学习、研究和用小波分析。但是,小波分析的研究专著大多是应用数学家的贡献,如何从工程技术应用角度阐述并发展小波分析的理论与应用是值得研究的。本书正是从这一角度入手,力图采用通俗的语言对小波分析及其应用进行说明和解释,本书详细论述了小波分析的基本原理和基本方法、尺度函数与小波函数的构造方法、小波分析的快速算法、小波包的基本原理,阐述了小波分析在信号处理、奇异性分析、特征提取与识别、图像处理等领域的应用。

本书面向实际应用,从工程角度来论述小波分析。对一些定理,重点说明其来龙去脉、要解决的问题、考虑问题的出发点、基本思想和具体的处理方法。避免了繁琐的数学推导。努力采用工程技术人员容易接受的概念及语言来阐述问题,使读者在读后能初步学会应用小波分析来解决实际问题的方法,这一点对工程技术人员是非常有益的。书中部分内容是作者完成的黑龙江省自然科学基金项目、煤炭科研基金等项目的科学研究成果,如岩石超声波检测信号的小波分析、采煤机截割功率负载曲线的小波分析等。

本书由黑龙江科技学院资助出版,在此特向学院领导和为本书出版给予支持与帮助的同志们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中一定存在许多不妥和错误之处,希望广大读者和相关专家批评指正。

著 者
2001.10.1

目 录

1 引 论	(1)
1.1 Fourier 分析及其性质	(1)
1.2 离散 Fourier 分析	(5)
1.3 窗口 Fourier 分析	(6)
2 小波分析	(10)
2.1 小波分析的发展历史	(10)
2.2 小波分析的定义与性质	(11)
2.3 窗口宽度	(16)
2.4 二进离散小波分析	(18)
2.5 数字信号的二进小波分析	(22)
2.6 离散小波变换与小波标架	(25)
3 正交小波基	(32)
3.1 概述	(32)
3.2 几种常用基本小波	(32)
3.3 多分辨率分析	(42)
3.4 多分辨率分析的分解与重构	(56)
3.5 尺度函数 $\varphi(t)$ 的构造	(61)
3.6 紧支集正交小波基	(63)
3.7 紧支集双正交小波基	(71)
3.8 数字信号按正交小波基展开	(75)
4 小波采样定理和快速算法	(77)
4.1 Shannon 采样定理	(77)
4.2 小波采样定理	(78)
4.3 Mallat 算法	(82)
4.4 Fourier 分析的快速算法	(86)
4.5 小波分析的快速算法	(87)
5 小波包分解	(92)
5.1 概述	(92)

5.2	正交小波包·····	(95)
5.3	小波包基的选择·····	(98)
5.4	小波包算法·····	(101)
6	小波分析在岩石超声检测中的应用·····	(106)
6.1	概述·····	(106)
6.2	岩石超声检测技术的应用现状·····	(107)
6.3	超声波在岩体中的传播·····	(113)
6.4	岩石超声波谱测试系统及方法·····	(117)
6.5	岩体超声检测信号的识别·····	(122)
6.6	岩体超声检测信号的数据处理·····	(124)
6.7	岩体超声检测信号的小波分析·····	(127)
6.8	检测结论·····	(133)
7	小波分析在工程检测信号处理中的应用·····	(135)
7.1	小波变换与局部化分析·····	(135)
7.2	小波变换与信号奇异性分析·····	(139)
7.3	应用举例·····	(145)
8	小波分析在图像处理中的应用·····	(151)
8.1	二维小波分析·····	(151)
8.2	二维图象的多分辨率分析·····	(152)
8.3	小波分析在图像特征提取和识别中的应用·····	(156)
8.4	小波在图像特征压缩中的应用·····	(158)
	主要参考文献·····	(159)

1 引 论

“小波”(Wavelets)是目前科学和工程技术研究中的一个热门话题。不同学科领域的专家对小波有不同的看法:数学家认为,小波可以作为表示函数空间的一种新方法;信号处理专家则认为,小波是非平稳信号时间——频率分析的新技术;图像分析和处理专家认为,小波是多分辨率分析的一种有效工具。出现这种局面的原因是处于迅速发展的“小波”在成长过程中得益于物理学、计算机科学、信号和图像处理科学、数学和地球物理学等众多科学研究领域和工程技术应用领域的专家和工程师们的共同努力。

小波分析(Wavelet Transformation)来自科学研究和工程应用领域,但其起因是离不开 Fourier 分析。本章介绍 Fourier 分析及其性质、离散 Fourier 分析和窗口 Fourier 分析。

1.1 Fourier 分析及其性质

1.1.1 Fourier 分析

Fourier 分析这门学科是数学分析中最古老的学科之一,它对数学家和工程师都是相当重要的。从实用的观点来看,当人们考虑 Fourier 分析的时候,通常是指积分 Fourier 变换和 Fourier 级数。Fourier 变换是在实数域上定义的某个函数 $f(t)$ 的 Fourier 积分,即 Fourier 变换是利用积分将一个函数 $f(t)$ ($-\infty < t < +\infty$) 变为另一个函数 $\hat{f}(\omega)$ 。

设 $f(t)$ 是一个给定的信号。信号分析的一个重要工作是刻画 $f(t)$ 的频率特性。假定信号的能量为有限的,满足 $f(t) \in L^2(R)$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

则 $f(t)$ 的 Fourier 变换(FT)为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.1)$$

$\hat{f}(\omega)$ 包含了信号 $f(t)$ 的频率信息。

当 $f(t)$ 满足一定条件[在 $f(t)$ 连续的每个点 t]时, $\hat{f}(\omega)$ 的 Fourier 逆变换(FT^{-1})定义为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.2)$$

如果 $f(t)$ 是以 T 为周期的信号,则 $\frac{1}{T}$ 为 $f(t)$ 的基频率。一个信号波形的 Fourier 变换的实质是:把这个波形分解成许多不同频率的正弦波之和。如果这些正弦波加起来成为原来的波形,那么我们就确定了这个信号波形的 Fourier 变换。

如果信号 $f(t)$ 不是一个周期函数,那么它的 Fourier 变换将是频率的一个连续函数。也就是说, $f(t)$ 可以用全部频率的正弦波之和表示。事实上, Fourier 变换频率域包含的信息和原来函数所包含的信息是完全相同的,不同的仅是信息的表示方法。所以, Fourier 变换使人们可以从另一个观点,即变换分析的观点来研究一个信号函数。

1.1.2 Fourier 分析的性质

式(1.1)和式(1.2)表示 Fourier 变换,建立了时间函数 $f(t)$ 和频谱函数 $\hat{f}(\omega)$ 之间的转换关系。在实际的信号分析中,常常需要对信号的时域与频域之间的对应关系以及转换规律有一个清楚的了解,即 Fourier 变换的基本性质。

1. 线性性质

$$\begin{aligned} \text{若} \quad & f_i(t) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \hat{f}_i(\omega) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \text{则} \quad & \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{f}_i(\omega) \end{aligned} \quad (1.3)$$

2. 对称性质

$$\begin{aligned} \text{若} \quad & f(t) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \hat{f}(\omega) \\ \text{则} \quad & \hat{f}(\pm t) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} f(\mp \omega) \end{aligned} \quad (1.4)$$

对称性是说信号 $f(t)$ 的频谱为 $\hat{f}(\omega)$, 把 $f(t)$ 中的 t 换成 ω , $f(\omega)$ 即为一频谱, 频谱 $f(\omega)$ 所对应的信号为 $\hat{f}(-t)$ 。

3. 时间尺度改变性质

信号 $f(t)$ 在幅值不变的条件下, 若

$$\begin{aligned} & f(t) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \hat{f}(\omega) \\ \text{则} \quad & f(kt) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \frac{1}{k} \hat{f}\left(\frac{\omega}{k}\right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

式中, k 为一正实数。

图 1-1 画出了矩形函数的尺度变换情况。信号在时域中压缩 ($k > 1$) 等效于在频域中扩展; 反之, 信号在时域中扩展 ($k < 1$) 等效于在频域中压缩。信号在时域压缩 k 倍, 信号随时间变化加快 k 倍, 所以它所含的频率分量增加 k 倍, 即频谱展宽了 k 倍。根据能量守恒, 各频率分量的大小必须减小 k 倍。

4. 频率尺度变化性质

$$\begin{aligned} \text{若} \quad & f(t) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \hat{f}(\omega) \\ \text{在频域信号 } \hat{f}(\omega) \text{ 的幅度值保持不变的条件下, 则} \quad & \frac{1}{k} \hat{f}\left(\frac{\omega}{k}\right) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} f(k\omega) \end{aligned} \quad (1.6)$$

频率尺度变化性质如图 1-2 所示。

5. 时移特性

$$\text{若} \quad f(t) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \hat{f}(\omega)$$

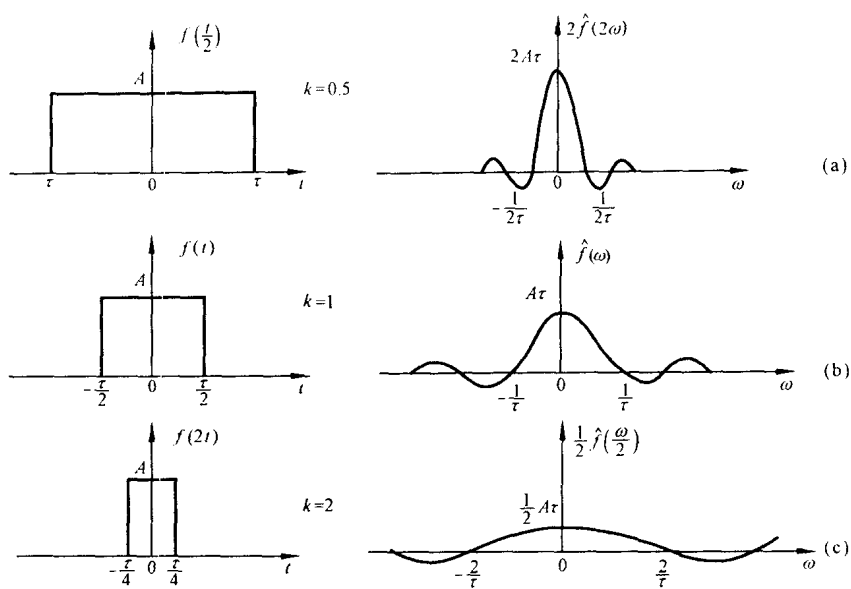


图 1-1 时间尺度变化性质

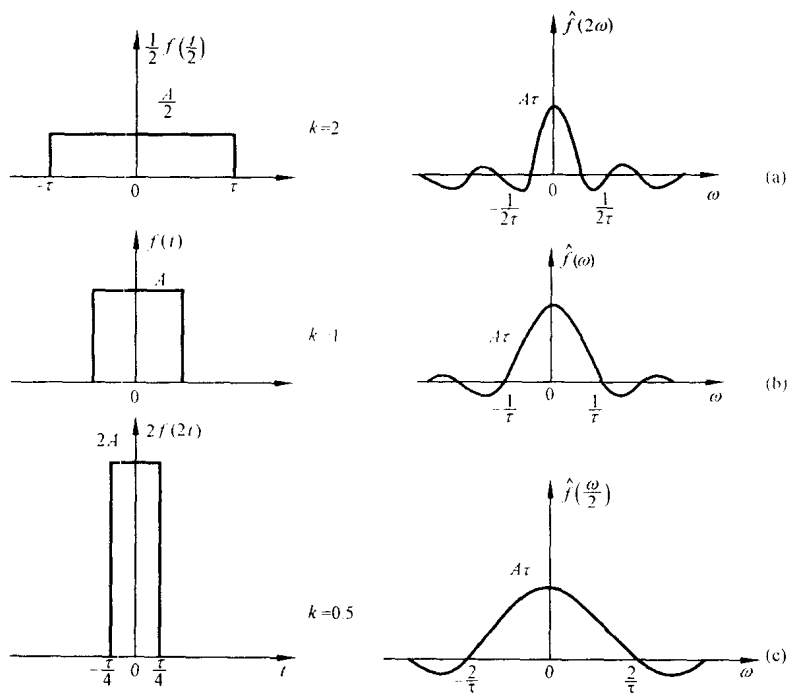


图 1-2 频率尺度变化性质

在时域中信号沿时间轴移动 t_0 时, 则

$$\hat{f}(t \pm t_0) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \hat{f}(\omega) e^{\pm i\omega t_0} \quad (1.7)$$

6. 频移特性

若

$$f(t) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \hat{f}(\omega)$$

则

$$f(t)e^{\mp i\omega_0 t} \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \hat{f}(\omega \pm \omega_0) \quad (1.8)$$

7. 微分特性

Fourier 变换的微分特性就是将对 $f(t)$ 的求导运算转化为对其 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$ 的乘法运算。

若

$$f(t) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \hat{f}(\omega)$$

则

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} (i\omega)^n \hat{f}(\omega) \quad (1.9)$$

8. 积分特性

若 $f(t) \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \hat{f}(\omega)$, 且 $\frac{\hat{f}(\omega)}{\omega}$ 在 $\omega=0$ 处有界 [$\hat{f}(0)=0$], 则

$$\int_{-\infty}^t f(t) dt \xrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \frac{1}{i\omega} \hat{f}(\omega) \quad (1.10)$$

9. 卷积特性

Fourier 变换的卷积特性是将函数的卷积运算转化为乘法运算。两函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的卷积定义为

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (1.11)$$

显然

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \quad (1.12)$$

计算 $f * g$ 的 Fourier 变换

$$\begin{aligned} f * g &\xrightarrow{\text{FT}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[g(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \hat{f}(\omega) e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) \end{aligned} \quad (1.13)$$

即

$$f(t) * g(t) \xrightarrow{\text{FT}} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$$

同理

$$\hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) \xrightarrow{\text{FT}^{-1}} f(t) * g(t)$$

由此可见, 两个时间函数卷积的频谱等于各个时间函数频谱的乘积; 两个时间函数乘积的频谱等于各个时间函数频谱的卷积。

卷积运算的重要意义在于它描述了平移不变的线性系统。很多物理现象及工程技术问题可以看作由一个系统 H 联系起来的输入和输出之间的关系。

$$\begin{array}{ccc} & \text{系统} & \\ \xrightarrow{\text{输入}} & \boxed{H} & \xrightarrow{\text{输出}} \\ f(t) & & g(t) \end{array}$$

输入和输出分别用两个一元函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 表示, 用公式形式可表示为

$$g(t) = H\{f(t)\}$$

这里 $H\{\cdot\}$ 表示由此系统所确定的一种对应关系,称之为算子。所谓线性系统是指,若

$$g_1(t) = H\{f_1(t)\}, g_2(t) = H\{f_2(t)\}$$

则

$$\alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t) = H\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\}$$

而平移不变是指,若 $g(t) = H\{f(t)\}$, 则有

$g(t - t_0) = H\{f(t - t_0)\}$ 。由 δ 函数的性质可知,当输入为 $\delta(t)$ 单位脉冲时,相应的输出为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = h(t)$$

所以 $h(t)$ 为系统的脉冲响应。平移不变线性系统可用脉冲响应函数 $h(t)$ 来描述,且输入与输出之间的对应关系可用卷积运算来描述,即

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) f(\tau) d\tau = h(t) * f(t) \quad (1.14)$$

由式(1.13)可知,输入 $f(t)$ 与输出 $g(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$ 、 $\hat{g}(\omega)$ 满足

$$\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega) \hat{f}(\omega) \quad (1.15)$$

在信息处理及通讯理论中常称一个函数的 Fourier 变换为其频谱。对平移不变的线性系统,其输入和输出的频谱之间的关系式(1.15)非常简单。研究 $\hat{f}(\omega)$ 与 $\hat{g}(\omega)$ 之间的关系要比直接研究 $f(t)$ 与 $g(t)$ 之间的关系简单方便,这就是在频率域上考虑问题或称频谱分析的方法。

1.2 离散 Fourier 分析

计算 Fourier 变换就需要用数值积分,即取 $f(t)$ 在实数域 R 上的离散点上的数值来计算这个积分。实际的信号分析处理中 $f(t)$ 通常以离散形式给出。

设 $f(t)$ 是由采样得到的,采样间隔为 Δt , $f(t)$ 被离散量化后的数值序列为 $f(k\Delta t)$, $k = -N, -N+1, -N+2, \dots, N-1$ 为采样值。这样就可以用 $2N$ 个矩形面积代替式(1.1)的积分,使式(1.1)离散化,记作

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \sum_{k=-N}^{N-1} f(k\Delta t) e^{-i\omega k \Delta t} \Delta t \quad (1.16)$$

则

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{k=-N}^{-1} f(k\Delta t) e^{-i\omega k \Delta t} \Delta t + \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t) e^{-i\omega k \Delta t} \Delta t \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f[(k-N)\Delta t] e^{-i\omega(k-N)\Delta t} \Delta t + \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t) e^{-i\omega k \Delta t} \Delta t \end{aligned}$$

令 $\omega = \frac{2\pi j}{N\Delta t}$, 可得

$$\begin{aligned} F\left(\frac{2\pi j}{N\Delta t}\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} \{f(k\Delta t) + f[(k-N)\Delta t]\} \Delta t e^{-\frac{2\pi j k}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{-\frac{2\pi j k}{N}} \end{aligned} \quad (1.17)$$

式中, $A_k = \{f(k\Delta t) + f[(k-N)\Delta t]\} \Delta t$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ 。

由此给出一般意义上的离散 Fourier 变换。

给定实数或复数序列 $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$, 则称序列 $\{G_n\}$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.18)$$

为序列 $\{f_k\}$ 的离散 Fourier 变换; 称

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{\frac{2\pi i n k}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.19)$$

为序列 $\{G_n\}$ 的逆离散 Fourier 变换。

离散 Fourier 变换的快速算法, 称为快速 Fourier 变换(FFT)。

为了计算

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{\frac{2\pi i n k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k (W_N^n)^k \quad (1.20)$$

其中, $W_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$, 共需 N^2 个乘法, 即对于一个 n , 有 N 个乘法, 又 $n = 0, 1, \dots, N-1$, 所以共用 N^2 个乘法。

快速 Fourier 变换的快速算法原理是:

(1) 利用 W_N 的周期性

注意 $W_N^N = e^{2\pi i} = 1$, 如果 n 是 N 的整数倍, $n = mN$, 则

$$W_N^n = W_N^{mN} = (W_N^N)^m = 1^m = 1 \quad (1.21)$$

(2) 利用指数运算

由

$$W_N^{k+l} = W_N^k \cdot W_N^l \quad (1.22)$$

把一个复杂的运算分为几个简单的运算可以节省时间。

最常用的快速 Fourier 变换是以 2 为底的快速 Fourier 变换, 即取 $N = 2^m$, 这时相应的乘法次数 T 为

$$T = 2N \log_2 N = 2 \times 2^m \log_2 2^m = m \cdot 2^{m+1} \quad (1.23)$$

其数量级要比 N^2 小得多, 所以是快速算法。目前快速 Fourier 分析, 已有很好的软件可供使用。

1.3 窗口 Fourier 分析

由式(1.1)定义的 Fourier 变换是一个强有力的数学工具, 并且具有重要的物理意义。即信号 $f(t)$ (要求其能量有限) 的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

表示信号 $f(t)$ 的频谱。正是 Fourier 变换的这种重要的物理意义, 决定了 Fourier 变换在信号分析中的独特地位, 特别是作为平稳信号分析的最重要的工具。但是, 在实际问题中, 所遇到的信号大多是不平稳的, 至少在观测的全部时间段内它是不平稳的, 所以, 随着应用范围的逐步扩大和理论分析的不断深入, Fourier 变换的局限性就渐渐显示出来了。首先, 由 Fourier 变换研究一个时域信号的频谱特征时, 必须获得信号在时域中的全部信息, 以致于

包括将来的信息;其次,如果一个信号只在某一时刻的一个小的范围中发生了变化,那么信号的整个频谱都要受到影响,而频谱的变化从根本上来说又无法标定发生变化的时间位置和发生变化的剧烈程度,也就是说,Fourier 变换对信号的奇异性不敏感、缺乏局部化分析。但在许多实际应用中,奇异性正是人们所关心的信号局部范围内的特征。例如,在音乐和语言信号中,人们所关心的是什么时刻奏什么音符,发出什么样的音节;对图像边缘检测,关心的是信号突变发生的位置和突变程度;对地震勘探信号,人们关心的是在什么位置出现什么样的反射波。另外,Fourier 变换不能反映出在各个指定时刻附近的任何频率范围上的频谱信息,即所谓局部时间范围内信号的局部频带上的谱信息描述,或称局部化时间——频率分析。由于信号的频率与其周期成反比,对于高频成分,时间间隔应相对变小,以给出精确的高频信息;对于低频成分,时间间隔应相对变宽,以给出一个周期内的完整信息。

如果要研究信号 $f(t)$ 在区间 $I = [a, b]$ 上的性质,可以先用函数 $\chi_I(t) = \begin{cases} 1, t \in [a, b] \\ 0, t \notin [a, b] \end{cases}$ (区间 $I = [a, b]$ 的特征函数)乘以 $f(t)$,如图 1-3 所示,然后对它做 Fourier

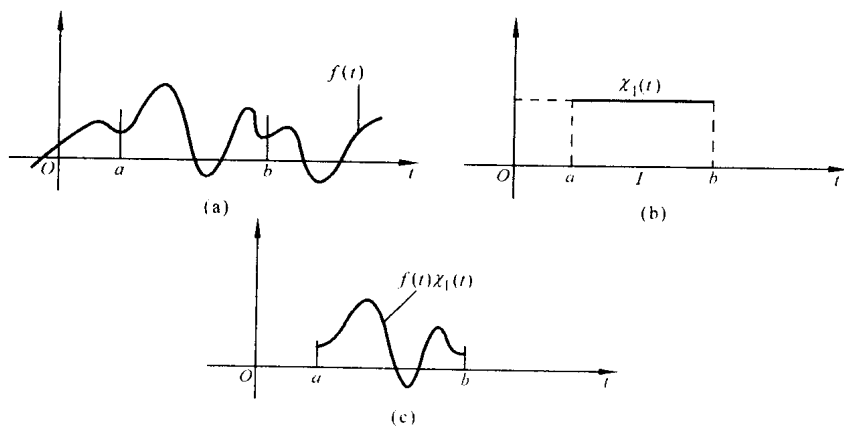


图 1-3 信号与特征函数

变换 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\chi_I(t)e^{-i\omega t}dt$ 。显然它反映了 $f(t)$ 在区间 $I = [a, b]$ 上的频谱特性。但是,由于 $\chi_I(t)$ 在 $t = a, t = b$ 处是间断的,导致 $f(t)\chi_I(t)$ 在 $t = a, t = b$ 处出现原来 $f(t)$ 不存在的间断,使其 Fourier 变换附加新的高频成分。这是不希望出现的情况。

D. Gabor 在 1944 年引进了“窗口”Fourier 变换的概念。为了提取信号的时间和频率两个方面的局部信息,引入了一个时间局部化的“窗函数” $g(t)$,取 $g(t)$ 为一个 Gauss 函数,其原因有二:一是 Gauss 函数的 Fourier 变换仍为 Gauss 函数,这使得 Fourier 逆变换也是用窗函数局部化了,同时体现了频率域的局部比;二是 Heisenberg 测不准原理的限制。窗口函数 $g(t)$ 在有限区间外恒等于 0 或很快地趋于 0。例如,可取 $g(t)$ 在区间 $(-\Delta + \delta, \Delta - \delta)$ 上恒等于 1,而在区间 $(\Delta - \delta, \Delta + \delta)$ 及 $(-\Delta - \delta, -\Delta + \delta)$ 上光滑地由 1 变为 0,如图 1-4 所示。

用函数 $g(t - \tau)$ 乘 $f(t)$ 相当于在 $t = \tau$ 附近开了一个窗口,称

$$G_f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t - \tau)} e^{-i\omega t} dt \quad (1.24)$$

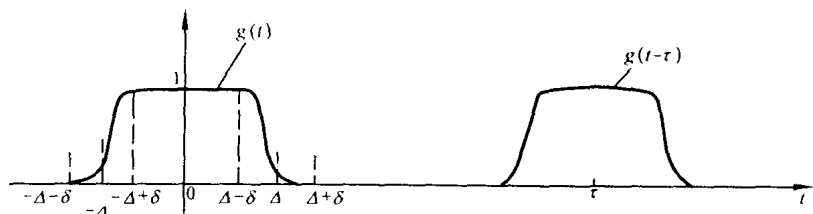


图 1-4 窗口函数图形

为函数 $f(t)$ 关于窗口函数 $g(t)$ 的“窗口”Fourier 变换或 Gabor 变换。 $\overline{g(t-\tau)}$ 为 $g(t-\tau)$ 的共轭,由此可见, $f(t)$ 的 Gabor 变换 $G_f(\omega, \tau)$ 反映了信号 $f(t)$ 在 $t = \tau$ 附近的频谱特征,反演公式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} g(t-\tau) G_f(\omega, \tau) d\tau \quad (1.25)$$

可见, $G_f(\omega, \tau)$ ($-\infty < \omega < +\infty, -\infty < \tau < +\infty$) 确实包含了 $f(t)$ 的全部信息。这里的窗口函数 $g(t)$ 要求满足一定的标准化条件。Gabor 变换的窗口位置随 τ 而变(平移),在时间 $t = \tau$ 附近,使信号 $f(t)$ 的 Fourier 变换局部化了,符合研究信号不同位置局部性质的要求。这种局部化完成的如此之好,以致于达到了对 $\hat{f}(\omega)$ 的精确分解,从而完整地给出了 $f(t)$ 的频谱的局部信息,充分体现了 Gabor 变换在时间域的局部化思想。在这一点上 Gabor 变换比 Fourier 变换优越,因此在通信理论及信号处理等领域发挥过一定的作用。但是, Gabor 变换中窗口的形状和大小保持不变,与频率无关。而在信号分析处理过程中,窗口的大小应随频率而变,即在研究高频信号的局部性质时,窗口应开得小一些,而在研究低频信号的局部性质时,窗口应开得大一些,如图 1-5 所示,这才符合在实际问题中高频信号的分辨率应

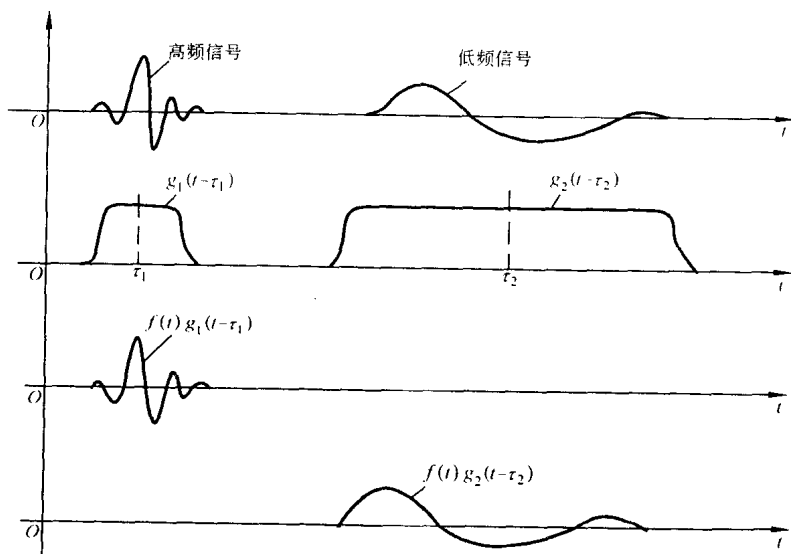


图 1-5 可变的窗口函数示意图

比低频信号分辨率高的特点。窗口 Fourier 变换窗口大小、形状不随频率而变是窗口 Fourier 变换的一个严重缺点,这就使得窗口 Fourier 变换不适合用于分析处理同时包含高频和低频信息的信号,而这正是非平稳信号的共同特点。另外, Fourier 变换在进行数值计算时,必须

将连续依赖于参数的变换离散化。将 Fourier 变换离散化后即得到按正交函数展开的 Fourier 级数,这在理论上或数值计算中都是非常重要的。因为存在一组正交基,所以有著名的快速 Fourier 变换算法,为工程技术应用扫清了计算量大、耗内存多的计算上的困难。而对于窗口 Fourier 变换,可以证明,无论怎样离散化都不可能得到一组正交基,这说明它没有快速实现的手段。正是由于窗口 Fourier 变换的种种严重缺陷而未能得到广泛应用与进一步发展。

小波变换继承和发展了窗口 Fourier 变换的局部化思想,同时克服了窗口大小不随频率变化,缺乏离散正交基等缺点,是比较理想的对信号进行局部频谱分析的有力工具。

2 小波分析

近年来,小波变换的理论研究和应用研究在科学技术界引起普遍关注。数学家们认为,小波分析是一个新的数学分支,它是泛函分析、Fourier 分析、样条分析、调和分析、数值分析的最完美结晶;在应用领域,特别是在信号处理、图像处理、语言分析、模式识别、量子物理、分形及众多非线性科学等领域,它被认为是近年来在工具及方法上的重大突破。小波分析,无论是作为数学理论上的连续小波变换,还是作为技术工具和方法的离散小波变换,仍处于发展和完善阶段。

2.1 小波分析的发展历程

小波分析方法的提出,可以追溯到 1910 年 Haar 提出的小“波”规范正交基及 1938 年 Littlewood Paley 对 Fourier 级数建立的 L-P 理论,即按二进制频率成分分组 Fourier 变换的相位变化本质上不影响函数的形状及大小。Meyer 认为,小波分析思想萌芽于 1930 年至 1980 年。20 世纪 60 年代,由于工业发展的需要,寻找地下石油成为法国的重大项目。地下找油的地球物理方法是向地下打炮或发射脉冲波,通过反射的信号分析来描绘地下岩石层分布。由于地下结构的复杂性,回收的反射信号也就十分繁杂,如何从这些反射信号中提取有用的石油信息是当时无法解决的问题。1981 年,法国地球物理学家 Morlet 仔细研究了 Gabor 变换方法,对 Fourier 变换与加窗 Fourier 变换的异同、特点及函数构造做了创造性的研究,首次提出了“小波分析”的概念,建立了以他的名字命名的 Morlet 小波并将其应用于信号处理。如图 2-1 所示为窗口 Fourier 分析和 Morlet 小波。

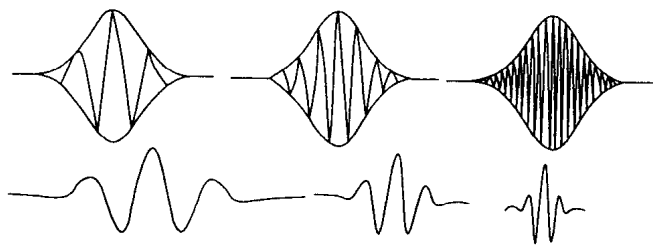


图 2-1 加窗 Fourier 分析与 Morlet 小波

Morlet 小波在地质数据处理中获得巨大成功。因此, Morlet 很想对这一方法进行系统研究,于是找到他的同学、物理学家 Roger Balian, Balian 又推荐理论物理学家 Grossmann 联合研究。Grossmann 对小波变换做了更详细的研究,与 Morlet 共同建立了基于仿射群下不变性的连续小波变换的几何形式。数学家 Meyer 凭借自己深厚的数学功底对 Morlet 方法进行了系统性的、高屋建瓴的研究。1985 年, Meyer 在一维情况下,证明了小波函数的存在性,并与人合作,选择连续小波中的一个离散子集,由它构成 n 维空间上平方可积的准完备