多项式样条函数

中国科学院数学研究所

徐　叔　贤

北 京 航 空 学 院 印

一九七九年十月

多 項 式 样 条 函 数

这份讲义主要是介紹多項式样条函数的一些最为基本的，且为工程技术中所常用的性質。重点放在三次样条函数及B样条的有关内容。

工程技术及数値計算中早就用上了各种最簡单的样条函数。但是1946年，工、厂、Schoenberg[1]首先引进了样条函数的名称。当时他提出的是等距节点情形的B样条函数，并且作为不同于多项式，三角逼近而提出的一种更好的数据拟合的方法。经过卅多年的发展，現在样条函数已发展成为内容丰富、应用广泛的数学分支，是数値計算的有力工具。

我們分成下列几章进行介紹。

第一章。我們引入样条函数的定义及两类表示方法（截尾表示法与斜率—— 弯矩表示法）。我們还較詳细地叙述三次Hermite插値公式。因为以后将不断用到这些公式。在 §6 我們主要介紹基样条（cardinal spline）的基本性質。

第二章，介紹B样条及其基本性質

第三章，介紹若干有关的补充内容。

第一章　样条函数的定义及其表示法

§ 1　样条函数的定义

設 $I=[a, b]$ 为实直綫上的有限区间。今給定 I 上的分划。

$$\Delta: \quad a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}=b \qquad (1\cdot1)$$

与非負整数 k，于是可引入

定义 1·1。如果 $S_k(x)$，$(k\geq 0)$ 为定义于 I 上的函数，且滿足下述条件：

(1)　在区间 (x_i, x_{i+1}) 上 $(i=0, 1, \cdots, n)$ $S_k(x)$ 为冪次不超过 k 的多項式；

(2)　$S_k(x)\in C^{k-1}[a, b]$，($C^{k-1}[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上 $k-1$ 阶导数存在且連续的函数 $f(x)$，其全体所成的集合）。

則称 $S_k(x)$ 为以 Δ 为簡单节点的 k 次（或 $k+1$ 阶）多項式样条。

为簡单起見，今后除非特别声明外。"簡单节点的 k 次多項式样条"一律簡称为"k 次样条"。

滿足定义 1·1 的函数其全体所成的集合記为 $\varphi(k, \Delta)$。

易見 $k=1$ 时 $S_1(x)$ 即由直綫段所联成的折綫函数。当 $k=2$，3 时，$S_k(x)$ 分别由抛物綫段与三次曲綫段所联成；而从整体来看在这些联接点处又分别是一阶、二阶导数为連续。

注意，$S_0(x)$ 表示分段取常数值的平台（阶梯）状的函数；即

$$S_0(x)=a_i \text{，当}\quad x_i\leq x<x_{i+1}\ ;\ i=0, 1, \cdots, n\text{。}$$

我們仅指出定义 1·1 的一种推广。即若 $\vec{z}=(z_1, \cdots, z_n)$ 为非負整数向量。且 $0\leq z_i\leq k+1$，$1\leq i\leq n$。

定义 1·1，設 $S_k(x)$，$(k\geq 0)$ 为定义于 $I=[a, b]$ 上且滿足条件。

(i)′　$S_k(x)$ 在 (x_i, x_{i+1})，$i=0, 1, \cdots n$ 上为冪次不超过 k 的多項式；

(ii)　$S_k(x)$ 在 x_i $(1\leq i\leq n)$ 处其 $k-z_i$ 阶导数存在且連续（即 $S_k^{(k-z_i)}(x_i-)=S_k^{(k-z_i)}(x_i+)$）；

则称 $S_k(x)$ 为以 Δ 为节点且其亏度为 $\vec{z}$ 的 k 次样条。

記满足定义 1·1' 的样条函数其全体为 $\varphi(k,\Delta,\vec{z})$。显然：

$$\varphi(k,\Delta)=\varphi(k,\Delta,(1,1,\cdots,1))$$

对于一切从定义 1·1 出发所得到的結果都可搬到 $\varphi(k,\Delta,\vec{z})$ 的情形。特别是有关 B 样条函数的討论。这份講义仅限于 $\varphi(k,\Delta)$，对 $\varphi(k,\Delta,\vec{z})$ 的討论可参看〔2〕。

§2　样条函数的截尾表示法

定理 2·1，$\varphi(k,\Delta)$ 中的元素 $S_k(x)$ 可唯一地表为

$$S_k(x)=\sum_{0}^{k}a_ix^i+\sum_{1}^{n}b_j(x-x_j)_+^k \tag{2·1}$$

这里

$$x_+^k=\begin{cases}x^k & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{2·2}$$

（注意，我們规定：

$$x_+^0=\begin{cases}1 & x\leq 0\\ 0 & x>0\end{cases} \tag{2·3}$$

此外，因为我們今后所遇到的函数它最多只可能有第一类间断点，即函数的左、右极限都存在，因此我們恒可规定用左或右連续性补充其定义。）

証：由第 2 頁 (1) 知 $S_k(x)$ 在〔x_0，x_1〕上可表为 $\sum_{0}^{k}a_jx^j$。

故：

$$S_{k,1}(x)=S_k(x)-\sum_{0}^{k}a_jx^j=\begin{cases}0 & x\in[x_0,x_1)\\ \sum_{j=0}^{k}c_{1j}(x-x_1)^k & x\in[x_1,x_2)\end{cases}$$

并且 $S_{k,1}(x)\in\varphi(k,\Delta)$。由(2)知

$$S_{k,1}^{(j)}(x_1-)=S_{k,1}^{(j)}(x_1+)=0,\ j=0,1,\cdots,k-1$$

所以 $c_{10}=c_{11}=\cdots=c_{1k-1}=0$

再命 $S_{k2}(x)=S_k(x)-\sum\limits_{0}^{k}a_jx^j-c_{1j}(x-x_1)_+^k$，則

$S_{k,2}(x)\in\varphi(k,\Delta)$ 并且:

$$S_{k,2}(x)=\begin{cases}0 & x\in[x_0,x_2)\\ \sum\limits_{j=0}^{k}c_{2,j}(x-x_2)_+^k, & x\in[x_2,x_3)\end{cases}$$

再由(2)知 $c_{20}=c_{21}=\cdots=c_{2,k-1}=0$，重复此过程直至第 n 个結点，卽知:

$$S_{k,n}(x)=S_k(x)-\sum_{i=0}^{k}a_ix^i-\sum_{j=1}^{n}c_{j,k}(x-x_j)_+^k\equiv0$$

当 $x\in[x_0,x_{n+1}]$。証毕。

定理2·1表示 $\varphi(k,\Delta)=\mathrm{Span}\{1,x,\cdots,x^k,(x-x_1)_+^k,\cdots(x-x_n)_+^k\}$，Span表示"張成"之意，卽由{…}中元素綫性組合之全体所组成的集合类。显然 $\dim\{\varphi(k,\Delta)\}=n+1+k$。(2·1)称为样条函数的截尾表示。(2·1)的表示法計算效果太差。仅有理论意义，它同时也不易反映 $S_k(x)$ 的几何性质。

下面我們介紹由Ahlberg等三人[3]所总結的斜率与弯矩表示法。这类表示法已为我国国内同志所广泛使用。由于三次样条这类表示法要用到Hermite三次多项式的插值法，故这里先将它的有关公式詳列如下。

§3 三次Hermite插值公式。

設 $p_i(x)$ 表示在插值条件

$$p_i^{(j)}(a)=\delta_{i,j},\quad p_i^{(j)}(b)=0,\quad(i,j=0,1)$$

下的三次Hermite 插値公式。又若 $q_i(x)$ 表示在插値条件:

$$q_i^{(j)}(a)=0,\quad q_i^{(j)}(b)=\delta_{ij},\ (i,j=0,1)$$

的三次Hermite插値多項式；这里

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

于是容易証明：

$$P_0(x)=\frac{1}{(b-a)^3}((b-a)+2(x-a))(b-x)^2 \qquad (3\cdot1)$$

$$P_1(x)=\frac{1}{(b-a)^2}(b-x)^2(x-a) \qquad (3\cdot2)$$

$$q_0(x)=\frac{1}{(b-a)^3}(x-a)^2((b-a)+2(b-x)) \qquad (3\cdot3)$$

$$q_1(x)=\frac{1}{(b-a)^2}(x-a)^2(x-b) \qquad (3\cdot4)$$

特别，当 $[a,b]=[0,1]$ 时，

$$\left.\begin{aligned}p_0(x)&=(1-x)^2(1+2x)\\ p_1(x)&=x(1-x)^2\\ q_0(x)&=x^2(3-2x)\\ q_1(x)&=x^2(x-1)\end{aligned}\right\} \quad 即 \quad \begin{pmatrix}p_0(x)\\ p_1(x)\\ q_0(x)\\ q_1(x)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ +1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^3\\ x^2\\ x\\ 1\end{pmatrix} \qquad (3\cdot5)$$

定理 3・1。满足下列插值条件：

$H(a)=y_a$， $H(b)=y_b$，$H'(a)=y'_a$， $H'(b)=y'_b$

（y_a，y'_a，y_b，y'_b 为事先给定的实数）的三次 Hesmite 多项式 $H(x)$ 由下列公式决定。

$$H(x)=y_a p_0(x)+y_b q_0(x)+y'_a p_1(x)+y'_b q_1(x) \qquad (3\cdot6)$$

証：显然

假定 Δ 与 $I=[a,b]$ 如前所述。命

$$x_{i+1}-x_i=h_{i+1}, \quad i=0, 1, 2, \cdots, n, \quad (3\cdot 7)$$

并且設 $p(x)$ 与 $q(x)$ 分别是区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 与 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的三次多項式。

引理 3·1，若在 x_i 点满足：

$$p(x_i)=q(x_i), \qquad p'(x_i)=q'(x_i)$$

則 $p''(x_i)=q''(x_i)$ 的重要条件是

$$h_{i+1}p'(x_{i-1})+2(h_{i+1}+h_i)p'(x_i)+h_i q'(x_{i+1})=$$

$$3\left[h_{i+1}\left(\frac{p(x_i)-p(x_{i-1})}{h_i}\right)+h_i\left(\frac{q(x_{i+1})-q(x_i)}{h_{i+1}}\right)\right] \quad (3\cdot 8)$$

証：在 $(3\cdot 6)$ 中取 $[a, b]=[x_{i-1}, x_i]$，$H(x)=p(x)$ 即可求得：

$$p''(x_i)=\frac{1}{h_i^2}[6p(x_{i-1})]+\frac{2}{h_i}p'(x_{i-1})-\frac{6}{h_i^2}p(x_i)$$
$$+\frac{1}{h_i}4p'(x_i) \quad (3\cdot 9\cdot 1)$$

同理取 $[x_i, x_{i+1}]=[a, b]$，$H(x)=q(x)$，又可得

$$q''(x_i)=\frac{1}{h^2_{i+1}}[-6q(x_i)]-\frac{4}{h_{i+1}}q'(x_i)+\frac{6}{h^2_{i+1}}q(x_{i+1})$$
$$-\frac{2}{h_{i+1}}q'(x_{i+1}) \quad (3\cdot 9\cdot 2)$$

合并上两式并稍加整理即得 $(3\cdot 8)$。証毕。

注意，由分片三次 Hermite 插值所連成的曲綫显然属于 $c'[a, b]$，故它属于 $\varphi(3, \Delta, (2, 2, \cdots, 2))$。（参看 § 1 定义 1·1′）。因此 Hermite 插值已較熟悉故討论从略，有兴趣的读者可参看[9]第三章及其参考文献。

§ 4 三次样条函数的斜率与弯矩表示法。

假定 $S_3(x)\in\varphi(3, \Delta)$。为簡单起見引入記号：

$$\begin{cases} S(x_i)=y_i \\ S'(x_i)=m_i, \quad S''(x_i)=M_i \end{cases} \quad i=0,1,\cdots,n+1 \tag{4·1}$$

m_i —— 斜率，M_i —— 弯矩。

命

$$\lambda_j=\frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}}, \quad \mu_j=\frac{h_j}{h_j+h_{j+1}}=1-\lambda_j \tag{4·2}$$

这里 $h_j=x_j-x_{j-1}$。$j=1,\cdots,n+1$。

由于 $S_3''(x_j-)=M_j=S_3''(x_j+)$ 故由引理 3·1 式（3·8）即知，当 $j=1, 2, \cdots, n$ 时，成立。

$$\lambda_j m_{j-1}+2m_j+\mu_j m_{j+1}=c_j \tag{4·3}$$

这里：

$$c_j=3\left[\lambda_j\left(\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}\right)+\mu_j\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}\right)\right] \tag{4·4}$$

（4·3）式即三次样条函数斜率所应满足的关系式即斜率关系式。由于仅有 n 个方程，而所需要求出的 m_i 共 $n+2$ 个，故给定 $y_0,\cdots, y_{n+1}$ 后（即给出（4·4）的插值条件：$S(x_i)=y_i$，$i=0, 1, \cdots, n+1$）尚不够数。为此需补上二个条件。通常所补上的端点条件为：

$$2m_0+\mu_0 m_1=c_1 \text{ 与 } \lambda_{n+1}m_n+2m_{n+1}=c_{n+1} \tag{4·5}$$

（4·5）中的 λ_{n+1}，μ_0 与 c_0，c_{n+1} 都可按具体情形而定。综合上述可得方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_0 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_n & 2 & \mu_n \\ & & & & \lambda_{n+1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \tag{4·6}$$

（4·6）即样条函数的斜率表示法。

以下推导样条函数的弯矩表示法。利用引理3·1中的（3·9·1）即得：

$$\left.\begin{aligned}2h_iM_i&=-\frac{12}{h_i}(y_i-y_{i-1})+8m_i+4m_{i-1}\\ h_{i+1}M_{i+1}&=-\frac{6}{h_{i+1}}(y_{i+1}-y_i)+4m_{i+1}+2m_i\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot7)$$

又由（3·9·2）式可得：

$$\left.\begin{aligned}h_iM_{i-1}&=\frac{6}{h_i}(y_i-y_{i-1})-2m_i-4m_{i-1}\\ 2h_{i+1}M_i&=\frac{12}{h_{i+1}}(y_{i+1}-y_i)-4m_{i+1}-8m_i\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot8)$$

合并（4·7）与（4·8）式即得：

$$h_iM_{i+1}+2(h_i+h_{i+1})M_i+h_{i+1}M_{i+1}$$

$$=6\left\{\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right\}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

仿（4·5）的討论引入

$$d_j=6\left\{\frac{\dfrac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\dfrac{y_j-y_{j-1}}{h_j}}{h_j+h_{j+1}}\right\}\qquad i=1,2,\cdots,n\qquad(4\cdot9)$$

$$2M_0+\lambda_0M_1=d_0\qquad(4\cdot10)$$

$$\mu_{n+1}M_n+2M_{n+1}=d_{n+1}\qquad(4\cdot11)$$

于是即得方程组：

$$\begin{pmatrix}2 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_n & 2 & \lambda_n \\ & & & & \mu_{n+1} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_0\\ M_1\\ \vdots\\ M_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_0\\ d_1\\ \vdots\\ d_{n+1}\end{pmatrix}\qquad(4\cdot12)$$

(4·12)称为三次样条函数的变矩方程。

(注意(4·9)式中的花括弧内即三次样条 $S(x)$ 在 y_{j-1}, y_j y_{j+1} 三点上的三阶差商)。

关于三次样条端点初始条件常见的有下列几种。

(A) 对弯矩方程此时(4·10)与(4·11)可取为

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & d_0 = 2y_0'' \\ \mu_{n+1} = 0, & d_{n+1} = 2y''_{n+1} \end{cases} \tag{4·13}$$

或者:

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_1}\left[\dfrac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'\right] \\ M_n + 2M_{n+1} = \dfrac{6}{h_{n+1}}\left[y'_{n+1} - \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}}\right] \end{cases} \tag{4·14}$$

(B) 对斜率方程此时(4·5)可取为

$$\begin{cases} \mu_0 = 0, & c_1 = 2y_0' \\ \lambda_{n+1} = 0, & c_{n+1} = 2y'_{n+1} \end{cases} \tag{4·15}$$

或者:

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3\left\{\dfrac{(y_1 - y_0)}{h_1} - \dfrac{y_0''}{2} h_1\right\} \\ m_n + 2m_{n+1} = 3\left\{\dfrac{y''_{n+1} h_{n+1}}{2} - \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}}\right\} \end{cases} \tag{4·16}$$

利用綫性方程组(4·6)与(4·12)以研究插值样种解的存在性与唯一性以及插值样条的一些其他性質这里就不再细述了，有兴趣的读者可参看〔3〕。

§5 二次样条的斜率与弯矩表示法

关于二次样条，因为 $\varphi(2, \Delta)$ 的維数为 $n+3$，故当在节点给出插值条件时，就难以如三次样条给出对称的边界条件。为此，我們重新规定一下插值点与节点。本节重新给出的节点如下:

设节点为$\{\bar{x}_i\}_1^n=\bar{\Delta}$，$a<\bar{x}_1<\bar{x}_2<\cdots<\bar{x}_n<b$。而插值点为$\{x_i\}_0^n$ $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，并且规定：

$$x_{i-1}<\bar{x}_i<x_i \tag{5·1}$$

于是$\varphi(2,\bar{\Delta})$的維数为$n+3$。（a，b为端点可当作外节点）。

（甲） 斜率表达式

假定给出如下的$n+3$个插值条件。

$$\begin{cases} S(x_i)=y_i & i=0,1,2,\cdots,n \\ S'(x_j)=y'_j & j=0,n \end{cases} \tag{5·2}$$

引进記号

$$\begin{cases} h_{i+1}=x_{i+1}-x_i & i=0,1,\cdots,n-1 \\ \bar{h}_{i+1}=x_{i+1}-\bar{x}_{i+1} \\ 0<\bar{h}_{i+1}<h_{i+1} \end{cases} \tag{5·3}$$

若$S(x)$为满足插值条件（5·2）的二次样条。記

$$S'(x_i)=m_i \quad i=0,1,2,\cdots,n$$

定理5·1，在$\varphi(2,\bar{\Delta})$中存在唯一的样条函数$S(x)$使得它满足插值条件（5·2）。

証：考虑$x\in[x_i,x_{i+1}]$，$i=0,1,\cdots,n-1$。在此区间上，由定理1·1知（因仅有一个节点$\bar{x}_{i+1}$）：

$$S(x)=y_i+m_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-\bar{x}_{i+1})_+^2 \tag{5·4}$$

利用条件$S(x_{i+1})=y_{i+1}$，$S'(x_{i+1})=m_{i+1}$即可求得：

$$\begin{cases} c_i=\dfrac{m_{i+1}-m_i}{2h_{i+1}}-\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}(\bar{h}_{i+1}-h_{i+1})}+\dfrac{m_i+m_{i+1}}{2(\bar{h}_{i+1}-h_{i+1})} & (5·5) \\ d_i=\dfrac{y_{i+1}-y_i}{\bar{h}_{i+1}(\bar{h}_{i+1}-h_{i+1})}-\dfrac{m_i+m_{i+1}}{2}\cdot\dfrac{h_{i+1}}{\bar{h}_{i+1}(\bar{h}_{i+1}-h_{i-1})} & (5·6) \end{cases}$$

若将$S(x)$分别局限于$[x_i,x_{i+1}]$与$[x_{i+1},x_{i+2}]$上，

则利用(5·4)及$S''(x_{i+1}-)=S''(x_{i+1}+)$知应成立

$c_i+d_i=c_{i+1}$，亦即

$$\frac{h_{i+1}-\bar{h}_{i+1}}{\bar{h}_{i+1}h_{i+1}}m_i+\left(\frac{\bar{h}_{i+1}+h_{i+1}}{h_{i+1}\bar{h}_{i+1}}+2\frac{h_{i+2}-\bar{h}_{i+2}}{h_{i+2}(h_{i+2}-\bar{h}_{i+2})}\right)m_{i+1}$$

$$+\frac{\bar{h}_{i+2}}{h_{i+2}(h_{i+2}-\bar{h}_{i+2})}m_{i+2}$$

$$=2\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}\bar{h}_{i+1}}+2\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+2}(h_{i+2}-\bar{h}_{i+2})} \qquad (5\cdot7)$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-2$$

易知当所有m_i($0\leq i\leq n$)都求得时則得插値样条。今(5·7)仅$n-1$个方程，故补上(5·2)中二个微商条件即可求出m_i($0\leq i\leq n$)。最后只須說明方程組(5·7)系数矩阵的非異性。为此引入記号：

$$\lambda'_{i+1}=\frac{h_{i+2}(h_{i+1}-\bar{h}_{i+1})}{\bar{h}_{i+1}(h_{i+1}+h_{i+2})}$$

$$\beta'_{i+1}=\frac{\bar{h}_{i+2}h_{i+1}}{(h_{i+2}-h_{i+2})(h_{i+2}+h_{i+1})}$$

$$\lambda_{i+1}=\frac{h_{i+2}}{h_{i+1}+h_{i+2}}\ ,\qquad \beta_{i+1}=\frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_{i+2}} \qquad (5\cdot8)$$

$$g_{i+1}=2\lambda_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{\bar{h}_i}+2\beta_{i+1}\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+2}-\bar{h}_{i+2}}$$

則在(5·7)中用$h_{i+1}\lambda_{i+1}$相乘后并稍加整理即得：

$$\lambda'_{i+1}m_i+(\lambda'_{i+1}+\beta'_{i+1}+2)m_{i+1}+\beta'_{i+1}m_{i+2}=g_{i+1} \qquad (5\cdot9)$$

$$(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-2)$$

利用$m_0=y'_0$，$m_n=y'_n$，(5·8)簡化为矩阵方程。

$$Am=\bar{g}\ ,\quad m=(m_1,m_2,\cdots,m_{n-1})$$

$$\bar{g}=(g_1-\lambda'_1y'_0,\ g_2,\cdots,g_{n-2},\ g_{n-1}-\beta'_{n-1}y'_n)$$

注意到$0<\bar{h}_i<h_i$故(5·9)系数矩阵为对角强优的三对角阵，所

以必为非导。証毕定理5・1。

（乙） 弯矩表达式

这里主要推导利用 $M_i=S''(x_i)$，$0\leq i\leq n$ 表示二次样条的（插值公式）方法。

有两种插值条件

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} S_2(x_i)=y_i, & i=0,1,2,\cdots,n \\ S_2''(x_0)=y_0'', & S_2''(x_n)=y_n'' \end{cases} \qquad (5\cdot10)$$

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} S_2(x_i)=y_i, & i=0,1,2,\cdots,n \\ S'(x_0)=y_0', & S_2'(x_n)=y_n' \end{cases} \qquad (5\cdot11)$$

为了較为簡洁地获得一些公式我們取 $\varphi(2,\overline{\Delta})$ 中的节点为：

$$\overline{x}_i=(x_{i-1}+x_i)/2,\ i=1,2,\cdots,n \qquad (5\cdot12)$$

（节点为插值点的中点）。

定理5・2，在（5・12）的限制下，$\varphi(2,\overline{\Delta})$ 中分别存在唯一的的二次插值样条使其分别滿足插值条件。

証：仿（5・4）的作法，当限于 $[x_i, x_{i+1}]$ 时命

$$S(x)=y_i+c_i(x+x_i)+\frac{M_i(x-x_i)^2}{2}+d_i(x-\overline{x}_{i+1})_+^2 \qquad (5\cdot13)$$

利用关系式 $S(x_{i+1})=y_{i+1}$，$S''(x_{i+1})=M''_{i+1}$ 即可解得：

$$d_i=\left(\frac{M_{i+1}-M_i}{2}\right)$$

$$c_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{3}{8}M_i h_{i+1}-\frac{1}{8}M_{i+1}h_{i+1} \qquad (5\cdot14)$$

分别在 $[x_i, x_{i+1}]$ 与 $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ 上利用（5・13），（5・14）并注意到 $S'(x_{i+\overline{1}})=S'(x_{i+1}+)$ 即可推出：

$$c_i+M_i h_{i+1}+d_i(h_{i+1})=c_{i+1}$$

即

$$\frac{1}{8}h_{i+1}M_i+\frac{3}{8}(h_{i+1}+h_{i+2})M_{i+1}+\frac{1}{8}h_{i+2}M_{i+2}=$$

$$=\left\{\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+2}}-\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right\},\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n-2 \tag{5·15}$$

再命

$$\varphi_{i+1}=\left\{\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+2}}-\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right\}/(h_{i+2}+h_{i+1})$$

$$i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-2$$

并注意到(5·8)式的定义，(5·15)化为:

$$\beta_{i+1}M_i+3M_{i+1}+\lambda_{i+1}M_{i+2}=8\varphi_{i+1},$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots n-2 \tag{5·16}$$

在(I)的条件下，上面(5·16)的 $n-1$ 个方程即可决定出一切 $M_1,\ \cdots,\ M_{n-1}$。(注意此时又得对角强优的三对角矩阵)。

在(II)的插值条件下，利用(5·13)式取 $i=0$ 的情形(即 $[x_0,x_1]$)，同时取 $S(x_1)=y_1$，$S''(x_1)=M_1$，容易推得:

$$3M_0+M_1=8h_1^{-2}[y_1-y_0-y_0'h_1] \tag{5·17}$$

同理可推得:

$$M_{n-1}+3M_n=8h_{n-1}^{-2}[y_{n-1}-y_n+y_n'h_n] \tag{5·18}$$

合并(5·16)，(5·17)，(5·18)又得 $n+1$ 方程组，且 M_i $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 的系数矩阵又是对角强优的三对角阵，故为非異。証毕定理5·2。

对于二、三次样条都得到了三对角阵，它有許多稳定的計算方法。这里不予细述了。

§4，§5推广到冪次較高或具有亏度(重节点的样条时就复杂了。如用我們下面所引入的B样条将是方便的。

§6 基样条函数

类似于第一章§3中式(3·6)，我們利用基样条(Cardinal spline)写出相应的插值公式。

我們仅对带一阶导数插值条件下的情形叙述基样条的构造。仿此可对其它插值問題作出相应的叙述。

仍設 $I=[a, b]$，$\Delta=\{a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}=b\}$，$\varphi(3, \Delta)$ 表示全体简单三次样条函数的集合。

在 $\varphi(3, \Delta)$ 中可唯一地決定滿足下述条件的三次插值样条 $c_i(x)$ $(i=0, 1, \cdots, n+1)$，$d_0(x)$ 与 $d_1(x)$：

$$\begin{aligned}
&c_i(x_j)=\delta_{ij} \qquad c_i'(x_0)=c_i'(x_{n+1})=0, \qquad 0\le i\le n+1\\
&d_0'(x_0)=1 \qquad d_0(x_j)=d_0'(x_{n+1})=0, \qquad 0\le j\le n+1\\
&d_{n+1}'(x_{n+1})=1, \ d_{n+1}'(x_0)=d_{n+1}(x_j)=0, \qquad 0\le j\le n+1
\end{aligned} \tag{1·1}$$

显然满足：

$$\begin{aligned}
&S(x_i)=y_i, \ 0\le i\le n+1\\
&S'(x_i)=y_0', \quad S'(x_{n+1})=y_{n+1}'
\end{aligned} \tag{1·2}$$

的三次插值样条可由下列公式给出：

$$S(x)=\sum_0^{n+1} y_i c_i(x)+y_0' d_0(x)+y_{n+1}' d_{n+1}(x) \tag{1·3}$$

(1·3) 表明：

$$\varphi(3, \Delta)=\mathrm{span}\{c_0(x), c_1(x), \cdots, c_{n+1}(x), d_0(x), d_{n+1}(x)\}$$

$c_0(x), \cdots, c_{n+1}(x)$，$d_0(x)$ 与 $d_{n+1}(x)$ 称为基样条（casdinal spline）。在数学的实踐与認识 1975 NO. 4，P. 63—71（潘承洞—— spline 函数的理论及其应用）已作了詳细的分析。这里我們就从略了。

第二章　B样条函数及其性质

現进入B样条的叙述。为了得到一般性规律，我們从0次样条到3次样条的具体情况説起。

§1　0次（一阶）B样条

假定$S_0(x)$为$[a, b]$上的0次样条，其图形如下：

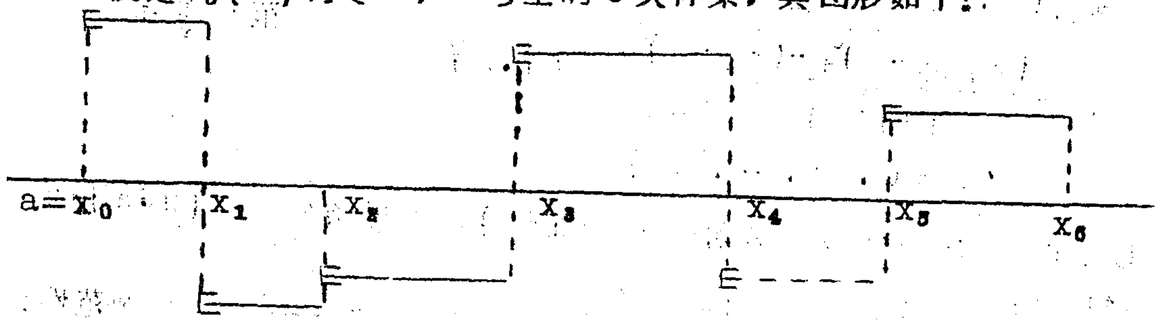

图 1

图1，0次（一阶）样条函数$S_0(x)$，$n=5$。

如果引入函数

$$M_{i-1,1}(x)=\begin{cases} 0 & x<x_{i-1},\ x\geq x_i \\ \dfrac{1}{x_i-x_{i-1}} & x_{i-1}\leq x_i \leq x_i \end{cases} \qquad i=1,\cdots,n+1 \tag{1·1}$$

$$N_{i-1}(x)=(x_i-x_{i-1})M_{i-1,1}(x)=\begin{cases} 0, & x<x_{i-1},\ x\geq x_i \\ 1, & x_{i-1}\leq x<x_i \end{cases} \tag{1·2}$$

显然，任何$S_0(x)$可統一地由$\{M_{i-1,1}(x)\}_1^{n+1}$或$\{N_{i-1,1}(x)\}_1^{n+1}$来表示，即

$$S_0(x)=\sum_0^n a_i(x_{i+1}-x_i)M_{i,1}(x)=\sum_0^n a_i N_{i,1} \tag{1·3}$$

定义，$M_{i,1}(x)$与$N_{i,1}(x)$，$i=0, 1, \cdots, n$分别依称为0次（一阶）B样条与0次（一阶）规范B样条。