研究生教材

非线性分析

游兆永 龚怀云 徐宗本 著

西安交通大学出版社

研究生教材

非线性分析

游兆永　龚怀云　徐宗本　著

西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书是为数学系计算数学、基础数学、应用数学等专业的研究生开设的学位课程编写的教材。内容包括基础知识(F(强)可导，G(弱)可导，各种连续等)，Banach 空间几何学，凸分析，拓扑度及其应用，变分不等式与樊畿不等式。其中包含了作者的许多研究成果。

本书亦可作为高校数学教师，数学系高年级优秀学生、有较高数学修养的理工科研究生的参考书。

非 线 性 分 析

游兆永　龚怀云　徐宗本　著

责任编辑　王延华

*

西安交通大学出版社出版

邮政编码：710049

西安交通大学出版社印刷厂印刷

陕西省新华书店经售

*

开本 850×1168　1/32　印张 11.375　字数：283 千字

1991 年 6 月第 1 版　　1991 年 6 月第 1 次印刷

印数：1——1500

ISBN7-5605-0379-9/O·68　　定价：3.75 元

研究生教材总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，是为国家培养高层次的人才。他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此，我们组织出版这套研究生教材，以满足当前研究生教学，主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作，有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后，能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应"四化"建设的要求；其次，也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容。这是研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识所必要的。因此，在研究生教材中仍应强调突出重点、突出基本原理和基本内容，以保持学位课程的相对稳定性和系统性，内容有足够的深度，而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套研究生教材虽然从选题、大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作，但毕竟是第一次编辑这样高层次的教材系列，水平和经验都感不足，缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

1986年12月

序　言

非线性分析是由 M. Fréchet 的奠基性工作开始的，他在集合论的基础上建立了一般分析学，即抽象空间上的数学分析。近 30 年来，非线性分析在理论及应用上获得了飞速的发展，成为泛函分析范围内最引人注目的领域。非线性分析的根本任务是解决具有分析学结构的无穷维空间之间各种算子(映象)给出的方程的求解问题，包括存在性、唯一性、连续依赖性以及构造性和计算性等问题。

无穷维空间的微分学；与非线性算子方程解的存在性和多解问题密切相关的拓扑度理论与不动点理论；对古典分析作过突出贡献的古典变分法发展成的现代变分问题(包括次微分、不能微分情形的求极值)；对某些有着广泛应用的特定算子的研究(例如对单调型算子与集值算子的研究)；分岐理论等等构成了非线性分析的基本内容。另外，在非线性分析的发展中，人们始终对计算性与构造性保持着兴趣，逐次迭代与逼近理论有着重要的地位。

如果说自然科学家与工程技术专家从实践出发，认为某些线性方程解的存在性与唯一性是明显的，从而对这些问题的纯数学研究兴趣不大，那末，非线性算子方程的情形却不一样，它的解在大范围来看并非是唯一的，处理这样的多解问题，用非线性分析作为理论工具最为适合，它能发挥别的方法不能取代的作用。

改革开放十年来，非线性分析在我国获得了很大的发展，在科研、教学上都有丰硕的成果。这个领域的专著虽已有好几本，但作为研究生的基础教材，我们认为仍有编写的必要。

本书是为数学系计算数学、基础数学、应用数学等专业的研究生开设的学位课程编写的教材．前面所谈到的基本内容，大多数在

本书中都有较详细的介绍。细心的读者不难发现，实际上本书的内容更为广泛，这里主要加进了凸分析与 Banach 空间几何学的内容，凸分析与 Banach 空间几何学近十多年的辉煌成果以及它对近代分析越来越大的影响是增加这些内容的主要原因。还有，本书的系统、结构也与其它的专著、教材不一样，这里反映了我们对某些问题的看法，也包括了我们自己的某些工作。

研究生当然应当搞科研、写论文，但若能认真、扎实地学习几门课程，扩大视野，打好基础，对他们将是终生受益的。为此，在编写过程中，我们力求做到：

i) 面尽可能广一些，有相当的深度，能反映近十几年的某些科研成果，直接对科研有所帮助。

ii) 除第一章是基础内容外，其余四章相对独立。这样，可以根据不同的要求和教学时数选用。经过我们的教学实践，80 学时可以基本上学完本书，若有所删节则 60 学时也就够了。

iii) 对内容的叙述与定理的证明尽可能作到便于学生自学。

限于著者的水平，书中不妥之处在所难免。各章虽然相对独立，但总还是有些关联的，编写中很难照应周全，凡此种种，望专家、学者及读者不吝指正。

著　　者

1991.2.

目　　录

第四章 拓扑度理论与应用及不动点定理

第一章　基本概念与基本定理

对无穷维空间中非线性算子(映象)的研究是非线性分析的主要内容。本章论述非线性算子的一些普遍性质,包括连续性、有界性、全连续性、可微性等。

第一节　有界性与连续性

有界性与连续性是分析学最基础的概念。本节在无穷维空间上讲述有关非线性算子的各类有界性与连续性的定义,并讨论它们之间的相互关系。

§1.1　基本定义

如不特别指出,以下恒设 $X.Y$ 均为实赋范线性空间,T 是从 X 到 Y 的算子(映象),并用 $D(T)$表示 T 的定义域,记为

$$T:D(T)\subset X\to Y$$

特别地,$T:X\to Y$ 表示 $D(T)=X$.

定义 1.1　设 $T:D(T)\subset X\to Y$

i)　设 $x_0\in \mathrm{int}D(T)$,称 T 在 x_0 局部有界,如果存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$,使

$$\sup\{\|Tx\|\,|x\in U(x_0)\}<+\infty$$

ii)　称 T 在 $\Omega\subset\mathrm{int}D(T)$上局部有界,如 T 在 Ω 上任一点局部有界;

iii)　称 T 在 $\Omega\subset D(T)$上有界,如果 T 映 Ω 中任一有界集为 Y 中的有界集。

定义 1.2　设 $T:D(T)\subset X\to Y$

i)　称 T 在 $x_0\in D(T)$**连续**,如果$\forall$ $\{x_n\}\subset D(T)$,有

$$x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$$

ii） 称 T 在 $\Omega \subset D(T)$ 上连续，如 T 在 Ω 的每一点连续；

iii） 称 T 在 $\Omega \subset D(T)$ 上一致连续，如$\forall\ \varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使

$$\| x_1 - x_2 \| < \delta \Rightarrow \| Tx_1 - Tx_2 \| < \varepsilon \quad (\forall\ x_1、x_2 \in \Omega)$$

不难验证，上述在 x_0 连续的定义等价于：$\forall\ \varepsilon > 0$，存在 $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$，使

$$\| x - x_0 \| < \delta \Rightarrow \| Tx - Tx_0 \| < \varepsilon \quad (\forall\ x \in D(T))$$

于是在 Ω 上一致连续必在 Ω 上连续。

算子的有界性与连续性本质上是拓扑概念，换句话说，对于 X 与 Y 上不同的收敛含意，可引出不同的有界和连续概念。由于收敛的概念有强有弱，所对应导出的概念也有强弱之分。在研究具体问题时，许多算子往往不具有较强的有界性或连续性，但却具有较弱的有界性或连续性。

我们引入其它几类常见的连续性概念，而有界性的其它定义将在第三章讨论。

下面我们以$\to$、$\xrightarrow{w}$、$\xrightarrow{w^*}$分别表示相应空间中强收敛，弱收敛和弱*收敛。

定义 1.3 设 $T: D(T) \subset X \to Y$，$x_0 \in D(T)$.

i） 称 T 在 x_0 是次连续的（*demicontinuous*），如果$\forall\ \{x_n\} \subset D(T)$有

$$x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{w} Tx_0$$

ii） 称 T 在 x_0 是弱连续的（*Weakly Continuous*），如果 $\forall\ \{x_n\} \subset D(T)$有

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{w} Tx_0$$

iii） 称 T 在 x_0 是强连续的（*Strongly Continuous*），如果$\forall\ \{x_n\} \subset D(T)$有

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$$

iv) 如果 $Y=X^*$，称 $T:D(T)\subset X\to X^*$ 在 x_0 是**半连续的**(*hemi-continuous*)，如果 $\forall\ h\in X$，当 $t_n>0, x_0+t_nh\in D(T)$ 时有

$$t_n\to 0\Rightarrow T(x_0+t_nh)\xrightarrow{w^*}Tx_0$$

类似地，如果 T 在 $\Omega\subset D(T)$ 每一点都具有某种连续性时，则称 T 在 Ω 上具有这种连续性。

如果 T 是线性算子，则由定义 1.1 所给出的所有有界性都与定义 1.2 所给出的连续性等价；如果 X、Y 都是有限维的，则弱连续、次连续、强连续都与连续相互等价。一般地，这些概念之间有如下关系：

$$\begin{tikzcd}
 & \text{一致连续} \arrow[r, Rightarrow, "\text{凸}"] \arrow[d, Rightarrow] & \text{有界} \arrow[dd, Rightarrow] \\
\text{强连续} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{连续} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{弱连续} \arrow[r, Rightarrow] & \text{次连续} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{局部有界} \\
 & \text{半连续} &
\end{tikzcd}$$

在有限维空间，有界闭集上的连续算子一定有界，但在无穷维空间上考虑非线性算子时，它的连续性与有界性的关系大大地复杂化了。下面为此进行探索。

定义 1.4 设 $T:D(T)\subset X\to Y, \Omega\subset D(T)$，令

$$W(t)=\sup\{\|Tx-Ty\|\ |x,y\in\Omega,\|x-y\|\leqslant t\}\tag{1.1}$$

$$D(W)=\{t|t\in[0+\infty),W(t)<+\infty\}$$

称 $W:D(W)\subset[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是 T 在 Ω 上的**连续模**。

显然 W 是一个单调增正函数，且 $W(0)=0$。

引理 1.1 $T:D(T)\subset X\to Y, \Omega\subset D(T)$ 是凸集，则

i) T 在 Ω 一致连续的充要条件是 T 在 Ω 上的连续模 $W(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有定义且在 $t=0$ 连续；

ii) T 在 Ω 一致连续的充要条件是 $W(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有定义且一致连续。

证 i) 如 $W(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有定义，则 $W(t)$ 在 $t=0$ 连续意味着 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $t\leqslant\delta$ 时有 $W(t)\leqslant\varepsilon$，故

$$W(\delta) = \sup\{\ \|Tx - Ty\| \mid \|x - y\| \leqslant \delta, x、y \in \Omega\} \leqslant \varepsilon$$

而最后一个不等式等价于

$$\|x - y\| \leqslant \delta \Rightarrow \|Tx - Ty\| \leqslant \varepsilon (\forall\ x, y \in \Omega)$$

这就说明如 $W(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有定义，则 $W(t)$ 在 $t=0$ 连续的充要条件是 T 在 Ω 一致连续。

最后，只需补证 T 在 Ω 一致连续可保证 $W(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有定义。

给定 $t>0$，取 $\delta>0$，使当 $\|x-y\|\leqslant\delta$ 时，有 $\|Tx-Ty\|\leqslant t$。现取正整数 m 使 $\delta\geqslant t/m$. 从而，对任何满足 $\|x-y\|\leqslant t$ 的 x、$y\in\Omega$，由于 Ω 凸，点 $x_k=x+\dfrac{k}{m}(y-x)\in\Omega(k=0,\ 1,\ \cdots m)$ 且满足 $\|x_k-x_{k-1}\|\leqslant\delta$. 因此

$$\|Tx - Ty\| = \|Tx_m - Tx_0\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \|Tx_k - Tx_{k-1}\| \leqslant mt$$

于是 $$W(t) \leqslant mt < +\infty$$

这说明 $W(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有定义。

ii) 显然只需证明由 $W(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有定义且在 $t=0$ 连续可推得 $W(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续。

设 $t_1,t_2\in[0,+\infty)$ 且不同时为零，这时对任何满足

$$\|x - y\| \leqslant t_1 + t_2$$

的 x、$y\in\Omega$，由于 Ω 凸

$$z = x + \frac{t_1}{t_1 + t_2}(y - x) \in \Omega$$

此时，$\|x-z\|\leqslant t_1$，$\|y-z\|\leqslant t_2$，所以

$$\|Tx - Ty\| \leqslant \|Tx - Tz\| + \|Tz - Ty\|$$

$$\leqslant W(t_1) + W(t_2) \tag{1.2}$$

因此

$$W(t_1 + t_2) \leqslant W(t_1) + W(t_2)$$

由此又可得

$$|W(t_1) - W(t_2)| \leqslant W(|t_2 - t_1|) \quad \forall\, t_1, t_2 \in [0, +\infty)$$

从而由 $W(t)$在 $t=0$ 连续立即推得 $W(t)$在$[0,+\infty)$一致连续。

定理 1.1 如果算子 $T: D(T) \subset X \to Y$ 在凸集 $\Omega \subset D(T)$上一致连续,则 T 在 Ω 上有界。

证 据引理 1.1,T 在 Ω 上的连续模 $W(t)$在$[0,+\infty)$有定义。$\forall$ 有界集 $\Omega_0 \subset \Omega$,有

$$\sup\{\|x - y\| \mid x、y \in \Omega_0\} = t_0$$

而

$$\|Tx - Ty\| \leqslant \sup\{\|Tx - Ty\| \mid \|x - y\| \leqslant t_0, x、y \in \Omega_0\}$$
$$\leqslant W(t_0) < +\infty$$

即 $T(\Omega_0)$是有界集。故 T 在 Ω 上有界。

推论 1.1 T 在球上一致连续必有界。

定理 1.1 中 T 是一致连续和 Ω 是凸集的假设是不可去掉的,请看以下反例。

例 1.1 (在整个空间连续的算子而非有界的例子)

设 $T: l^2 \to R$ 定义为

$$Tx = \sum_{|\xi_i| \geqslant 1} i(|\xi_i| - 1)$$

其中 $x = \{\xi_i\} \in l^2$。由于$\forall\, x \in l^2$, $\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i = 0$。故 Tx 实际上是对有限项求和。设 $x = \{\xi_i\}$, $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \in l^2$,且 $x_n \to x$,由于 l^2 中依范数收敛等价于按坐标收敛且$\left(\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon(\forall\, n)$,易证$\forall\, x \in l^2$,$T$ 是连续的。

但选取 $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \in \overline{B}(\theta, 2) = \{x \mid x \in l^2, \|x\| \leqslant 2\}$,其中

$$\xi_i^{(n)} = \begin{cases} 2 & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$