



研究生教材

非线性分析

游兆永 龚怀云 徐宗本 著

西安交通大学出版社

研究生教材

非线性分析

游兆永 龚怀云 徐宗本 著

西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书是为数学系计算数学、基础数学、应用数学等专业的研究生开设的学位课程编写的教材。内容包括基础知识(F (强)可导, G (弱)可导, 各种连续等), Banach 空间几何学, 凸分析, 拓扑度及其应用, 变分不等式与樊畿不等式。其中包含了作者的许多研究成果。

本书亦可作为高校数学教师, 数学系高年级优秀学生、有较高数学修养的理工科研究生的参考书。

非 线 性 分 析

游兆永 龚怀云 徐宗本 著

责任编辑 王延华

*

西安交通大学出版社出版

邮政编码: 710049

西安交通大学出版社印刷厂印刷

陕西省新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.375 字数: 283 千字

1991 年 6 月第 1 版 1991 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1—1500

ISBN7-5605-0379-9/O·68 定价: 3.75 元

研究生教材总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次,是为国家培养高层次人才的人才。他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识,以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此,我们组织出版这套研究生教材,以满足当前研究生教学,主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作,有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要,充分反映国内外的最新学术动态,使研究生学习之后,能迅速接近当代科技发展的前沿,以适应“四化”建设的要求;其次,也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容。这是研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识所必需的。因此,在研究生教材中仍应强调突出重点,突出基本原理和基本内容,以保持学位课程的相对稳定性和系统性,内容有足够的深度,而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套研究生教材虽然从选题、大纲、组织编写到编辑出版,都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作,但毕竟是第一次编辑这样高层次的教材系列,水平和经验都感不足,缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践,广泛听取校内外专家学者和使用者的意见,使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

1986年12月

序 言

非线性分析是由 M. Frechet 的奠基性工作开始的,他在集合论的基础上建立了一般分析学,即抽象空间上的数学分析。近 30 年来,非线性分析在理论及应用上获得了飞速的发展,成为泛函分析范围内最引人注目的领域。非线性分析的根本任务是解决具有分析学结构的无穷维空间之间各种算子(映象)给出的方程的求解问题,包括存在性、唯一性、连续依赖性以及构造性和计算性等问题。

无穷维空间的微分学;与非线性算子方程解的存在性和多解问题密切相关的拓扑度理论与不动点理论;对古典分析作过突出贡献的古典变分法发展成的现代变分问题(包括次微分、不能微分情形的求极值);对某些有着广泛应用的特定算子的研究(例如对单调型算子与集值算子的研究);分歧理论等等构成了非线性分析的基本内容。另外,在非线性分析的发展中,人们始终对计算性与构造性保持着兴趣,逐次迭代与逼近理论有着重要的地位。

如果说自然科学家与工程技术专家从实践出发,认为某些线性方程解的存在性与唯一性是明显的,从而对这些问题的纯数学研究兴趣不大,那末,非线性算子方程的情形却不一样,它的解在大范围来看并非是唯一的,处理这样的多解问题,用非线性分析作为理论工具最为适合,它能发挥别的方法不能取代的作用。

改革开放十年来,非线性分析在我国获得了很大的发展,在科研、教学上都有丰硕的成果。这个领域的专著虽已有好几本,但作为研究生的基础教材,我们认为仍有编写的必要。

本书是为数学系计算数学、基础数学、应用数学等专业的研究生开设的学位课程编写的教材。前面所谈到的基本内容,大多数在

本书中都有较详细的介绍。细心的读者不难发现,实际上本书的内容更为广泛,这里主要加进了凸分析与 Banach 空间几何学的内容,凸分析与 Banach 空间几何学近十多年的辉煌成果以及它对近代分析越来越大的影响是增加这些内容的主要原因。还有,本书的系统、结构也与其它专著、教材不一样,这里反映了我们对某些问题的看法,也包括了我们自己的某些工作。

研究生当然应当搞科研、写论文,但若认真、扎实地学习几门课程,扩大视野,打好基础,对他们将是终生受益的。为此,在编写过程中,我们力求做到:

i) 面尽可能广一些,有相当的深度,能反映近十几年的某些科研成果,直接对科研有所帮助。

ii) 除第一章是基础内容外,其余四章相对独立。这样,可以根据不同的要求和教学时数选用。经过我们的教学实践,80 学时可以基本上学完本书,若有所删节则 60 学时也就够了。

iii) 对内容的叙述与定理的证明尽可能作到便于学生自学。

限于著者的水平,书中不妥之处在所难免。各章虽然相对独立,但总还是有些关联的,编写中很难照应周全,凡此种种,望专家、学者及读者不吝指正。

著 者

1991. 2.

目 录

序 言

第一章 基本概念与基本定理

- 第一节 有界性与连续性..... (1)
 - § 1.1 基本定义 (1)
 - § 1.2 Caratheodory 算子..... (7)
- 第二节 紧性与全连续性 (12)
 - § 2.1 全连续算子的基本性质..... (12)
 - § 2.2 连续算子的延拓..... (16)
- 第三节 微分与导数 (20)
 - § 3.1 Gâteaux 微分与 Gâteaux 导数 (20)
 - § 3.2 Fréchet 微分与 Fréchet 导数 (24)
 - § 3.3 偏导数..... (29)
- 第四节 Taylor 展开 (31)
 - § 4.1 抽象函数的 Riemann 积分..... (31)
 - § 4.2 n 线性算子..... (34)
 - § 4.3 高阶导数..... (38)
 - § 4.4 Taylor 展式 (40)
- 第五节 梯度算子 (43)
- 第六节 隐函数定理 (50)
 - § 6.1 一致压缩映象..... (50)
 - § 6.2 隐函数定理..... (51)

第二章 凸集理论与凸分析

- 第一节 凸集与凸函数 (57)
- 第二节 凸集的分离性 (64)

§ 2.1	超平面.....	(64)
§ 2.2	凸集的分离定理.....	(65)
§ 2.3	分离定理的应用举例.....	(69)
第三节	Bauer 极值原理与紧凸集的端点表示.....	(72)
第四节	凸函数的连续性与次微分	(75)
第五节	凸函数基本定理与 Von · Neumann 极小 极大定理	(86)
第六节	共轭函数与对偶理论	(91)
第七节	Ekeland 变分原理	(100)
第八节	非光滑分析.....	(104)
第三章 Banach 空间上的几何学		
第一节	Baire 的纲论与应用	(115)
第二节	Banach 空间的弱拓扑与紧性	(120)
§ 2.1	Banach 空间上的弱拓扑	(120)
§ 2.2	Banach 空间中的紧性	(124)
第三节	自反 Banach 空间	(129)
§ 3.1	自反性的拓扑刻画	(129)
§ 3.2	自反性的几何刻画	(132)
第四节	严格凸性与平滑性.....	(136)
§ 4.1	严格凸性	(137)
§ 4.2	平滑性与范数的 Gateaux 可微性	(140)
§ 4.3	严格凸性与平滑性的对偶	(143)
第五节	一致凸性与一致平滑性.....	(145)
§ 5.1	一致凸性	(145)
§ 5.2	一致平滑性与范数的一致 Fréchet 可微	(156)
第六节	凸性、平滑性与可微性的拓广	(165)
§ 6.1	概念的推广与加细	(165)
§ 6.2	局部一致凸性	(169)

§ 6.3	强平滑性与 Frechet 可微性	(172)
§ 6.4	凸性、平滑性、可微性与自反性的关系 ...	(175)
§ 6.5	重赋范问题	(176)
第七节	Banach 空间中的最佳逼近	(176)
§ 7.1	最佳逼近的特征与存在性	(177)
§ 7.2	距离投影的连续性	(179)
§ 7.3	自反性与最佳逼近存在性的关系	(187)
第八节	正规结构与一致 Lipschitz 映象	(188)
§ 8.1	Banach 空间的正规结构	(188)
§ 8.2	一致正规结构与自反性的关系	(190)
§ 8.3	一致 Lipschitz 映象的不动点定理	(193)
第九节	Banach 空间几何常数	(198)
§ 9.1	关于凸性模与平滑模	(198)
§ 9.2	关于正规结构常数	(203)
第十节	典型例子—— L^p 空间	(208)
§ 10.1	$L^p (p \geq 2)$ 的“2-凸性”与 $L^p (1 < p \leq 2)$ 的“2-凹性”	(208)
§ 10.2	L^p 空间的 2-特征不等式	(211)
§ 10.3	L^p 空间的 p -特征不等式	(216)
§ 10.4	应用	(222)
第四章 拓扑度理论与应用及不动点定理		
第一节	引言	(227)
第二节	拓扑度的定义与性质	(230)
§ 2.1	拓扑度的定义	(230)
§ 2.2	拓扑度的性质	(232)
第三节	拓扑度的延拓与局限	(236)
第四节	Brouwer 度	(240)
§ 4.1	预备知识	(241)
§ 4.2	C^2 度与 Brouwer 度	(245)

§ 4.3	Brouwer 度的性质与应用	(252)
第五节	Leray-Schauder 度	(259)
§ 5.1	Brouwer 度的推广问题	(259)
§ 5.2	预备知识	(260)
§ 5.3	L-S 度的建立	(262)
§ 5.4	L-S 度的应用	(264)
第六节	不动点定理更具体的应用	(266)
§ 6.1	代数基本定理	(266)
§ 6.2	对积分方程的应用	(267)
§ 6.3	对微分方程的应用	(269)
第七节	K-K-M 定理及其推广	(273)
第八节	集值映象及其不动点	(280)
§ 8.1	几个基本概念	(280)
§ 8.2	集值映象的不动点定理	(284)
第五章 单调映象		
第一节	单调映象及其基本性质	(289)
§ 1.1	基本概念	(289)
§ 1.2	单调映象的基本性质	(293)
第二节	极大单调映象与伪单调映象	(297)
§ 2.1	极大单调映象	(297)
§ 2.2	伪单调映象	(301)
第三节	单值伪单调映象的满射性	(304)
§ 3.1	樊畿不等式的推广	(304)
§ 3.2	基本的满射性定理	(308)
第四节	极大单调映象的满射性	(309)
§ 4.1	Debrunne-Flor 变分不等式	(309)
§ 4.2	基本的满射性定理	(314)
§ 4.3	极大单调映象满射的充要条件	(316)
第五节	单调映象构造可解性	(318)

§ 5.1	极大单调映象的 Yosida 近似与预解式	(319)
§ 5.2	预解式迭代过程与原问题的化简	(323)
§ 5.3	强单调映象方程的构造可解性	(328)
第六节	应用举例.....	(338)
§ 6.1	椭圆边值问题	(338)
§ 6.2	Hammerstein 积分方程	(342)
§ 6.3	非线性特征值问题	(345)



数据加载失败，请稍后重试！

第一章 基本概念与基本定理

对无穷维空间中非线性算子(映象)的研究是非线性分析的主要内容。本章论述非线性算子的一些普遍性质,包括连续性、有界性、全连续性、可微性等。

第一节 有界性与连续性

有界性与连续性是分析学最基础的概念。本节在无穷维空间上讲述有关非线性算子的各类有界性与连续性的定义,并讨论它们之间的相互关系。

§ 1.1 基本定义

如不特别指出,以下恒设 X, Y 均为实赋范线性空间, T 是从 X 到 Y 的算子(映象),并用 $D(T)$ 表示 T 的定义域,记为

$$T: D(T) \subset X \rightarrow Y$$

特别地, $T: X \rightarrow Y$ 表示 $D(T) = X$.

定义 1.1 设 $T: D(T) \subset X \rightarrow Y$

i) 设 $x_0 \in \text{int}D(T)$, 称 T 在 x_0 局部有界, 如果存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$, 使

$$\sup\{\|Tx\| \mid x \in U(x_0)\} < +\infty$$

ii) 称 T 在 $\Omega \subset \text{int}D(T)$ 上局部有界, 如 T 在 Ω 上任一点局部有界;

iii) 称 T 在 $\Omega \subset D(T)$ 上有界, 如果 T 映 Ω 中任一有界集为 Y 中的有界集。

定义 1.2 设 $T: D(T) \subset X \rightarrow Y$

i) 称 T 在 $x_0 \in D(T)$ 连续, 如果 $\forall \{x_n\} \subset D(T)$, 有

$$x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx_0$$

ii) 称 T 在 $\Omega \subset D(T)$ 上连续, 如 T 在 Ω 的每一点连续;

iii) 称 T 在 $\Omega \subset D(T)$ 上一致连续, 如 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$,

使

$$\|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|Tx_1 - Tx_2\| < \varepsilon \quad (\forall x_1, x_2 \in \Omega)$$

不难验证, 上述在 x_0 连续的定义等价于: $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$,

使

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon \quad (\forall x \in D(T))$$

于是在 Ω 上一致连续必在 Ω 上连续。

算子的有界性与连续性本质上是拓扑概念, 换句话说, 对于 X 与 Y 上不同的收敛含意, 可引出不同的有界和连续概念。由于收敛的概念有强有弱, 所对应导出的概念也有强弱之分。在研究具体问题时, 许多算子往往不具有较强的有界性或连续性, 但却具有较弱的有界性或连续性。

我们引入其它几类常见的连续性概念, 而有界性的其它定义将在第三章讨论。

下面我们以前 \rightarrow 、 $\overset{w}{\rightarrow}$ 、 $\overset{w*}{\rightarrow}$ 分别表示相应空间中强收敛, 弱收敛和弱*收敛。

定义 1.3 设 $T: D(T) \subset X \rightarrow Y, x_0 \in D(T)$ 。

i) 称 T 在 x_0 是次连续的 (demicontinuous), 如果 $\forall \{x_n\} \subset D(T)$

有

$$x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow Tx_n \overset{w}{\rightarrow} Tx_0$$

ii) 称 T 在 x_0 是弱连续的 (Weakly Continuous), 如果 $\forall \{x_n\} \subset D(T)$ 有

$$x_n \overset{w}{\rightarrow} x_0 \Rightarrow Tx_n \overset{w}{\rightarrow} Tx_0$$

iii) 称 T 在 x_0 是强连续的 (Strongly Continuous), 如果 $\forall \{x_n\} \subset D(T)$ 有

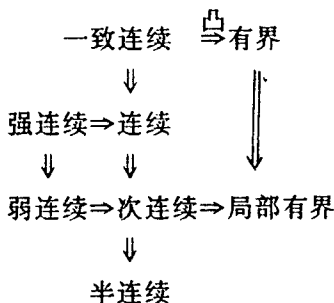
$$x_n \overset{w}{\rightarrow} x_0 \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx_0$$

iv) 如果 $Y = X^*$, 称 $T; D(T) \subset X \rightarrow X^*$ 在 x_0 是半连续的 (hemi-continuous), 如果 $\forall h \in X$, 当 $t_n > 0, x_0 + t_n h \in D(T)$ 时有

$$t_n \rightarrow 0 \Rightarrow T(x_0 + t_n h) \xrightarrow{w^*} T x_0$$

类似地, 如果 T 在 $\Omega \subset D(T)$ 每一点都具有某种连续性时, 则称 T 在 Ω 上具有这种连续性。

如果 T 是线性算子, 则由定义 1.1 所给出的所有有界性都与定义 1.2 所给出的连续性等价; 如果 X, Y 都是有限维的, 则弱连续、次连续、强连续都与连续相互等价。一般地, 这些概念之间有如下关系:



在有限维空间, 有界闭集上的连续算子一定有界, 但在无穷维空间上考虑非线性算子时, 它的连续性与有界性的关系大大地复杂化了。下面为此进行探索。

定义 1.4 设 $T; D(T) \subset X \rightarrow Y, \Omega \subset D(T)$, 令

$$W(t) = \sup\{\|Tx - Ty\| \mid x, y \in \Omega, \|x - y\| \leq t\} \quad (1.1)$$

$$D(W) = \{t \mid t \in [0, +\infty), W(t) < +\infty\}$$

称 $W; D(W) \subset [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 是 T 在 Ω 上的连续模。

显然 W 是一个单调增正函数, 且 $W(0) = 0$ 。

引理 1.1 $T; D(T) \subset X \rightarrow Y, \Omega \subset D(T)$ 是凸集, 则

i) T 在 Ω 一致连续的充要条件是 T 在 Ω 上的连续模 $W(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有定义且在 $t=0$ 连续;

ii) T 在 Ω 一致连续的充要条件是 $W(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有定义且一致连续。

证 i) 如 $W(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有定义, 则 $W(t)$ 在 $t=0$ 连续意味着 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $t \leq \delta$ 时有 $W(t) \leq \epsilon$, 故

$$W(\delta) = \sup\{\|Tx - Ty\| \mid \|x - y\| \leq \delta, x, y \in \Omega\} \leq \epsilon$$

而最后一个不等式等价于

$$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx - Ty\| \leq \epsilon (\forall x, y \in \Omega)$$

这就说明如 $W(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有定义, 则 $W(t)$ 在 $t=0$ 连续的充要条件是 T 在 Ω 一致连续。

最后, 只需补证 T 在 Ω 一致连续可保证 $W(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有定义。

给定 $t > 0$, 取 $\delta > 0$, 使当 $\|x - y\| \leq \delta$ 时, 有 $\|Tx - Ty\| \leq t$ 。现取正整数 m 使 $\delta \geq t/m$ 。从而, 对任何满足 $\|x - y\| \leq t$ 的 x 、

$y \in \Omega$, 由于 Ω 凸, 点 $x_k = x + \frac{k}{m}(y - x) \in \Omega (k=0, 1, \dots, m)$ 且满足 $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \delta$ 。因此

$$\|Tx - Ty\| = \|Tx_m - Tx_0\| \leq \sum_{i=1}^m \|Tx_i - Tx_{i-1}\| \leq mt$$

于是 $W(t) \leq mt < +\infty$

这说明 $W(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有定义。

ii) 显然只需证明由 $W(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有定义且在 $t=0$ 连续可推得 $W(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续。

设 $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$ 且不同时为零, 这时对任何满足

$$\|x - y\| \leq t_1 + t_2$$

的 $x, y \in \Omega$, 由于 Ω 凸

$$z = x + \frac{t_1}{t_1 + t_2}(y - x) \in \Omega$$

此时, $\|x - z\| \leq t_1$, $\|y - z\| \leq t_2$, 所以

$$\|Tx - Ty\| \leq \|Tx - Tz\| + \|Tz - Ty\|$$

$$\leq W(t_1) + W(t_2) \quad (1.2)$$

因此

$$W(t_1 + t_2) \leq W(t_1) + W(t_2)$$

由此又可得

$$|W(t_1) - W(t_2)| \leq W(|t_2 - t_1|) \quad \forall t_1, t_2 \in [0, +\infty)$$

从而由 $W(t)$ 在 $t=0$ 连续立即推得 $W(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续。

定理 1.1 如果算子 $T: D(T) \subset X \rightarrow Y$ 在凸集 $\Omega \subset D(T)$ 上一致连续, 则 T 在 Ω 上有界。

证 据引理 1.1, T 在 Ω 上的连续模 $W(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有定义。
 \forall 有界集 $\Omega_0 \subset \Omega$, 有

$$\sup\{\|x - y\| \mid x, y \in \Omega_0\} = t_0$$

而

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &\leq \sup\{\|Tx - Ty\| \mid \|x - y\| \leq t_0, x, y \in \Omega_0\} \\ &\leq W(t_0) < +\infty \end{aligned}$$

即 $T(\Omega_0)$ 是有界集。故 T 在 Ω 上有界。

推论 1.1 T 在球上一致连续必有界。

定理 1.1 中 T 是一致连续和 Ω 是凸集的假设是不可去掉的, 请看以下反例。

例 1.1 (在整个空间连续的算子而非有界的例子)

设 $T: l^2 \rightarrow R$ 定义为

$$Tx = \sum_{|\xi_i| > 1} i(|\xi_i| - 1)$$

其中 $x = \{\xi_i\} \in l^2$ 。由于 $\forall x \in l^2, \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = 0$ 。故 Tx 实际上是对有限项求和。设 $x = \{\xi_i\}, x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \in l^2$, 且 $x_n \rightarrow x$, 由于 l^2 中依范数收敛等价于按坐标收敛且 $(\sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^2)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon (\forall n)$, 易证 $\forall x \in l^2, T$ 是连续的。

但选取 $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \in \bar{B}(0, 2) = \{x \mid x \in l^2, \|x\| \leq 2\}$, 其中

$$\xi_i^{(n)} = \begin{cases} 2 & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$