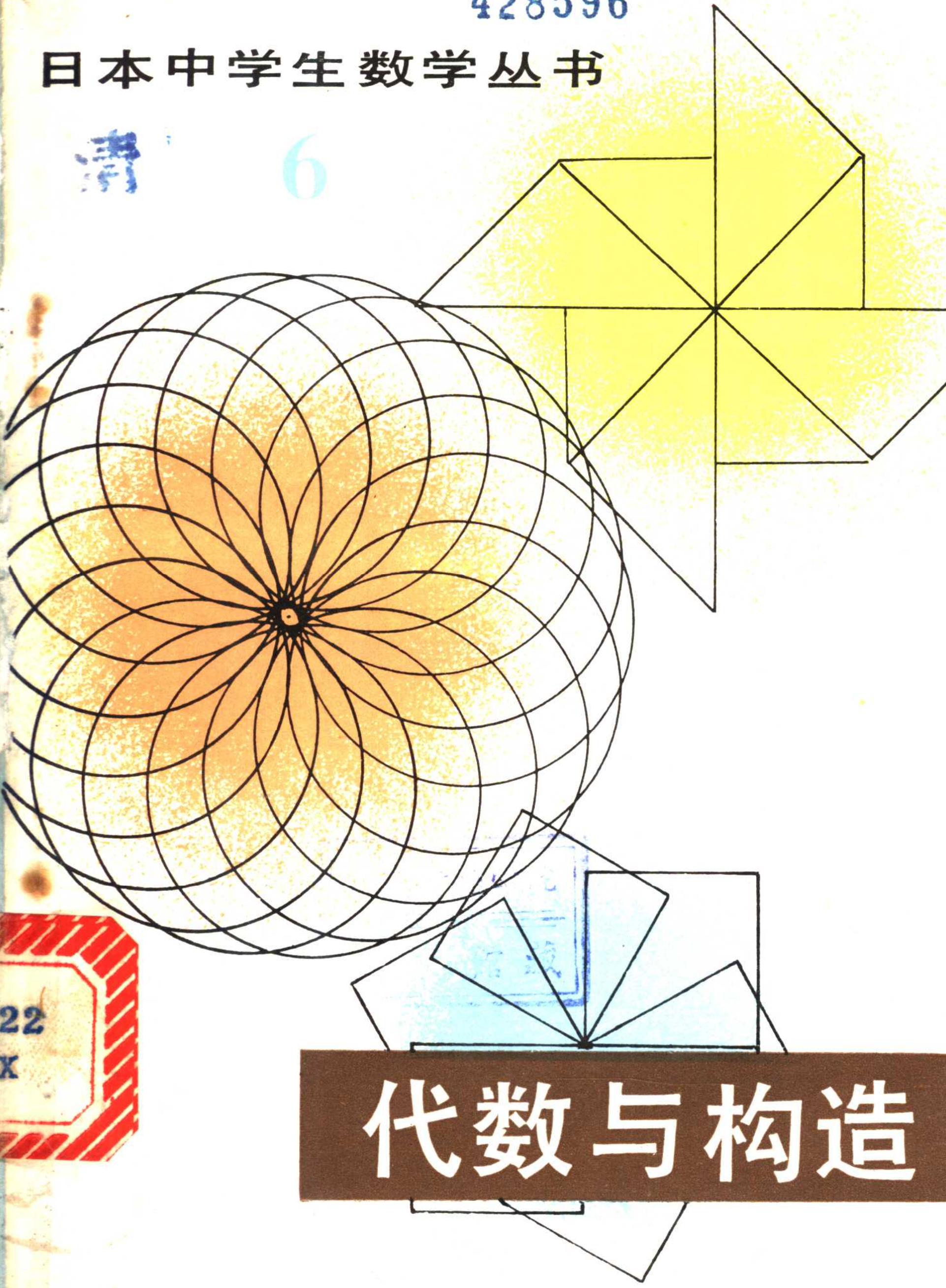
日本中学生数学丛书

6



代数与构造

日本中学生数学丛书（6）

代数与构造

[日]·高桥秀雄 著

高绪珏 译 马忠林 校

吉林人民出版社

内 容 提 要

《代数与构造》一书是日本山梨大学教授横地　清主编的日本中学生数学丛书第6卷，共有：整数的结构、运算的构造、新代数、和构造的研究方法等四章。分别阐述了倍数集合的结构，记数法与剩余类；集合的运算，群、环、体的概念及其构造；逻辑代数有关知识和映射，同构、同态还有一次变换群等数学内容。

这本书对了解近代代数学的发展，能起到开阔眼界的作用，内容比较全面，新颖，由浅入深，通俗易懂，是广大中学数学教师在教学，备课，辅导中最适用的参考书，也是广大中学生及数学爱好者丰富知识的一本数学课外读物。

日本中学生数学丛书(6)

代 数 与 构 造

〔日〕高桥秀雄 著

高绪珏 译　马忠林 审校

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　4印张　67,000字

1981年4月第1版　1981年4月第1次印刷

印数：1—10,090册

书号：13091·80　定价：0.53元

出 版 说 明

为了解国外教学情况，我们组织翻译出版由日本山梨大学教授横地　清主编的一套中学生数学丛书共十二卷，它是日本中学生的数学课外读物。这套丛书是以近代数学的观点和方法，系统地阐述初等数学中的一些重要专题，对我国广大中学生和中学数学教师在理论上和思考分析问题的方法上均有参考价值。

共有十二名同志参加丛书翻译工作，由吉林师大数学系马忠林同志审校，从一九八〇年起陆续出版发行。

吉林人民出版社　一九八〇年元月

目　　录

第三章　新代数

第四章　构造的研究方法

第一章　整数的结构

§ 1. 倍数集合

（1）　集　合

数学，具有着不许含糊的想法和所考虑的对象必须是明确的这样特征。因为对事物不明确加以区别，就会引起因人而异的想法来。所以对所要考虑的对象、不论谁一看就能区别清楚而且范围也明确，在这种情况下，把那些对象的总体称为**集合**。例如，自己同班同学的集合，或者棒球队成员的集合等等都可看做各种集合。而组成集合的每个对象称为**元素**或**元**。

通常，集合用大写的罗马字母表示，元素用小写字母表示，元素 a 属于集合 A，用符号

$$a \in A \quad \text{或} \quad A \ni a$$

表示。

$\in$ 和 $\ni$ 读作“属于”。

例如，当用A表示由1到10的自然数的集合时，则使用中括号{　}表为如下形式：

$$A=\{1, 2, 3, \cdots\cdots, 10\}$$

在这种情形下

$$2\in A,\quad 5\ni A$$

根据集合元素的个数，有数得尽的有限情形和数不尽的无限情形，分别称为**有限集合**和**无限集合**。但是，不论哪一个总体都可看做一个集合。所有自然数的集合，是无限集合。它用N表示时，则为

$$N=\{1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots\}$$

或表示为：

$$N=\{n \mid n\text{为自然数}\}$$

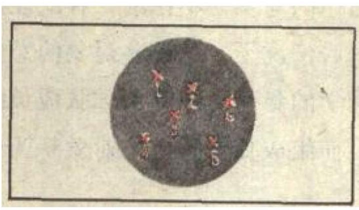


图1　文氏图

另外，用图表示集合时，可如图1画一个圆，认为圆内有元素。而元素在圆内哪一部分都可以。不论有限集合或无限集合，都可用一个圆去表示。这样的图称为**文氏图**（文为发明者的名字）。

由于集合是元素组成的，所以元素可为任意对象，下面特就数的情况加以考虑。兹讨论其中的某数的倍数集合。

例如，考虑 100 的倍数时，则如：

100,200,300,…

这样有无限个。

或者，考虑50的倍数时，如：

50，100，150，200,250,……………

那样也有无限个。

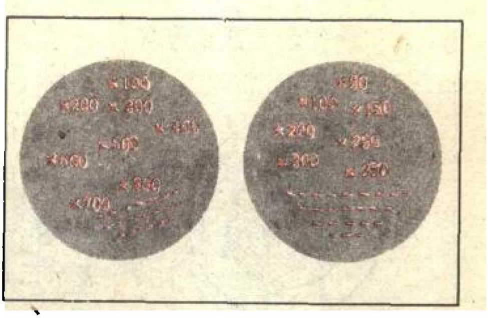


图 2　100的倍数集合，50的倍数集合

以上情况，无论就任何数 a 的倍数，都可以这样讲。

于是，为了研究这样存在无限个倍数的集合，都可用符号表示，将数 a 的倍数集合用

（a的倍数）

表示之。

例如，100的倍数集合与50的倍数集合可表示为：

（100的倍数）＝{100,200,300，400，………}

（50的倍数）＝{50，100，150，200，250，………}

但是，在这两个集合的元素当中有些是相同的，通过比较可以看出（100 的倍数）的元素，必能在（50的倍数）的元素当中找到。也就是说，前者被包含在后者之中。或者说，前者是后者的一部分。在这种情形下，称（100 的倍数）为（50的倍数）的**子集**。表为：

（100的倍数）⊂（50的倍数）

（⊂读作包含或被包含）

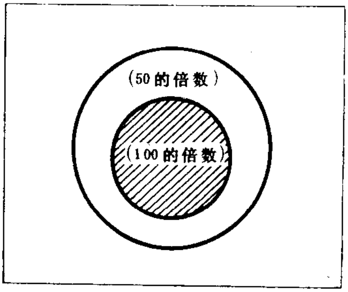


图3　子集合

或者将⊂反过来写，则有：

（50的倍数）⊃（100的倍数）

再用文氏图，可将子集表示如左。但是，圆的大小并不表示元素个数的多少。这是因为不论哪一方面，元素个数都是无限的，所不同的只是(100的倍数）的元素，都是(50的倍数)的元素罢了。这一性质，用图表示出来，即为图3。

【想一想】　①　（2的倍数）⊃（4的倍数）

②　（4的倍数）⊃（6的倍数)正确吗？

【略　解】　①　正确　②　不对

（2）　倍数集合的结构

研究一下（3的倍数）与（4的倍数）这两个集合。

因为

（3的倍数)={3，6，9，**12**，15，18，21，**24**，27，………}

（4的倍数）={4，8，**12**，16，20，**24**，28，**36**，……}

所以，这两个集合的公共元素的集合是：

{12，24，36，…………}

它是3与4的公倍数的集合，而且12又是3与4的最小公倍数。因此，这个公倍数的集合与（12的倍数）相同。

这一性质，用文氏图可表示如右，二圆相重叠的公共部分为（12的倍数），这样的集合称为**交集**。

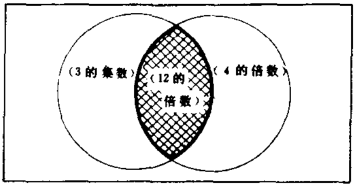


图4　交集

【想一想】　指出下列每一组的交集:

①　（4的倍数）与（6的倍数）

②　（5的倍数）与（7的倍数）

③　（10的倍数）与（2的倍数）

【略　解】　①(12的倍数)②(35的倍数)③(10的倍数)

其次，来计算一下（3的倍数）的元素之间的和、差、商。首先,从(3的倍数)中取出9与15,看一下它俩的和,则为

$$9+15=24$$

24也是（3的倍数）的元素。再看一下它们的差:

$$9-15=-6$$

-6,仍然是（3的倍数）的元素。其次看一下除法，则有

$$15\div 9=1 余 6$$

余数6，是（3的倍数）的元素。

就其它元素来说，可知这一性质也成立。这是为什么?

设k为整数，则3的倍数可写为$3k$的形式，今考虑两个

数$3k$与$3k'$，

$$3k+3k'=3\ (k+k')$$

$$3k-3k'=3\ (k-k')$$

因为 $k+k'$与$k-k'$同为整数，所以显然$3\ (k+k')$，$3\ (k-k')$都是（3的倍数）的元素。

除法的情形，因为

$$3k\div 3k'=k\div k'$$

所以设商为s，余数为r时，则可表为

$$3k=3k's+r$$

于是 $$r=3k-3k's$$

因此，由于$3k-3k's$是3的倍数之差，它也是3的倍数。

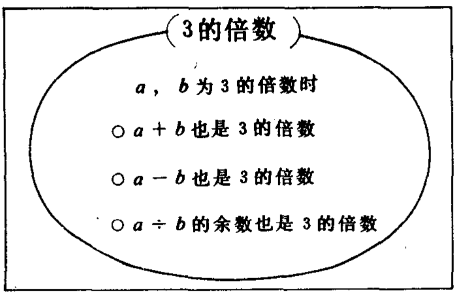


图5 和、差，余数还原

一般地说，（a的倍数）的二元素之和、差以及相除所得的余数，都是（a的倍数）的元素。

利用这一性质，考虑6的约数与8的约数，作出它们的共同约数，即公约数的集合，它是：

$$\{2,\ 1,\ -1,\ -2\}$$

今设a为6与8的公约数集合的元素时，可知

（a的倍数）$\supset$（6的倍数），（a的倍数）$\supset$（8的倍数）因此，形如$6n$（n为整数）与$8m$（m也是整数）的数是（a的倍数）的元素，所以由上述结果可知，和$6n+8m$也是（a的倍数）的元素。于是，所有$6n+8m$形的整数集合，若与所有某正整数x的所有倍数相一致时，则表明x为6与8的公约数，且是6与8的其它公约数的倍数，就是说，x是6与8的最大公约数。事实上

由$6n+8m=2(3n+4m)$，可知所有$6n+8m$形的整数集合与6与8的最大公约数2的所有倍数集合（2的倍数）相同。

已知二数4和6时，$4n+6m$形的数

当 $n=-1$，$m=1$时，为2

$n=1$，$m=0$时，为4

$n=0$，$m=1$时，为6

$n=2$，$m=0$时，为8

$n=1$，$m=1$时，为10

………………………………

因为$4n+6m=2(2n+3m)$，所以都是(2的倍数)的元素。

这一结果，在一般情形下都成立。可概括为：设g为a与b的最大公约数，因为（g的倍数）$\supset$（a的倍数）、（b的倍数），所以（g的倍数）$=\{x \mid x=an+bm\}$。特别是，当a与b的最大公约数为1时，则称**a与b是互质的**。

这时，满足：$1 = an + bm$的n和m的值也存在。

§ 2. 记数法

（1） 数的表示法

通常不论任何数，都能用数字0,1,2,3,…，9等表示出来，对此，我们并不感到有什么奇怪。但是，如果深入地想一下，关于**用数字表示数的方法**，亦即**记数法**，并不只限于单用阿拉伯数字。也常用罗马数字的Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，…

汉字数字的一，二，三，四，……

等等，不过通常只用于表示次序，而不能用于计算，这是有其恰如其份的理由的。所以如此，是因为罗马数字和汉字数字没有0，每到10，100,1000的位数，则必须使用恰当的数字，且数字的个数越增加就越复杂，就是这个道理。

例如，10，罗马数字是X，汉字数字是十，100是C和百，1000是M和千。

我们知道阿拉伯数字是非常方便的数字，用0，1，…到9这十字数字，可以表示任何一个数。而罗马数字，Ⅰ，Ⅱ到Ⅲ还可以，4是5－1写作Ⅳ，6是5＋1写作Ⅵ，9是10－1写作Ⅸ，12是10＋2写为Ⅻ，这是很麻烦的。

因为阿拉伯数字有0，所以，即使进位，也不需要再用

其它的数字。按这种定位方法表示的是进位记数法。我们通常使用的是其中的所谓 **10进法**，即逢10进位的方法。

例如，365为：

$3\times100+6\times10+5$简记为365。

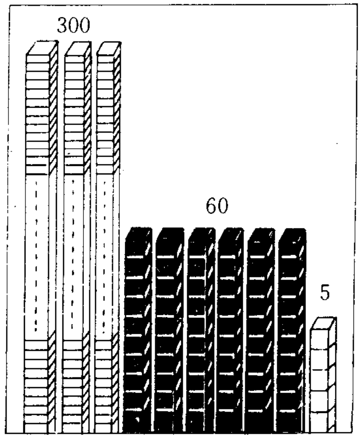


图 6　10进法的结构

这个结构是逢10进位，所以，可如图 6 以积木为例是容易理解的。积木够10块进到10位上，进一步，够10个10块积木是100块，则进到100位上。

这个方法，不只限于10进法，7进法也同样可以。

例如：

$$2\times7^2+3\times7+5$$

用 7 进法则为235。这种情形，因为是逢 7 进一位，所以有由 0 到 6 的数字就够了，7 表示为10。

（2）　5进法

与10进法类似，我们来研究逢 5 进位的 5 进法。用0,1,2,3，4 这 5 个数字就可以。为了与10进法相区别，用如下的写法去表示，例如