21世纪高等学校教材

叶惠民 主编

工程数学

GONGCHENGSHUXUE

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

工 程 数 学

叶惠民　主　编

东 南 大 学 出 版 社

内容提要

本书共14章，分4单元。第1单元讲述行列式、矩阵及其运算，矩阵的初等变换与线性方程组，向量组的线性相关性，相似矩阵及二次型。第2单元作为第1单元的应用，讲述线性规划的图解法，单纯形法及对偶单纯形法。第3单元作为第4单元的基础，讲述事件概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征。第4单元讲述数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，方差分析和回归分析，介绍的都是应用范围广泛的方法和操作程序。

本书充分考虑到初学者学习工程数学的困难，对基本概念、重要公式和定理的实际意义尽可能多侧面地阐述，多举各方面例题；并有针对性地选择一些诱导性问题启发初学者更好地思考，力求做到叙述清楚，简明易懂。

本书供本科少学时的各个专业选用，4个单元的内容相对独立，不同专业、不同层次的学生都可以灵活选学其中某几个单元或全部。书中加"*"号的章节和附录供对数学要求较高的专业选用。每章之后均有习题，难度稍大的附有提示或答案；书后有2个附录和7个附表。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/叶惠民主编.—南京:东南大学出版社,2003.2

ISBN 7-81089-113-8

Ⅰ.工... Ⅱ.叶... Ⅲ.工程数学—高等学校—教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第003108号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 南京京新印刷厂印刷

开本:700mm×1000mm 1/16 印张:20.75 字数:407千字

2003年2月第1版 2003年2月第1次印刷

印数:1—5000 定价:28.00元

前　言

本书讲解的是线性代数与线性规划、基础概率与数理统计的一些基本内容和某些应用范围较广的方法。教学时数约为 84 学时，具体安排建议如下：

章序	第 1～4 章	第 5～7 章	第 8～10 章	第 11～14 章
内容	线性代数	线性规划	基础概率	数理统计
学时	30	10	26	18

相比于 10 年前的大学生，如今的大学生要花更多的时间去学外语、学计算机，而数学的课时被一再削减。学生的有限精力和时间被分割后，对大学数学的教与学提出了前所未有的挑战。另一方面，大学数学在人才培养上的作用越来越为有识之士所肯定。从 2003 年起，硕士研究生入学考试数学总分从 100 分提高到 150 分，说明从全面衡量大学生业务素质的角度来审视大学教育，数学课程无疑是最重要的教育载体。我们看到，大学数学的思想、方法和语言已渗透到各个学科中去，成为现代文化的重要组成部分；大学教育也已从“精英教育”走向“大众教育”。在这种形势下，如继续沿袭过去的教材与教法，势必造成大部分学生“食而不化”的现象。基于以上认识，两年多来，我们在教学内容的安排和取舍上遵循“尊重学科性，但不恪守学科性”的原则，删旧增新，拓宽基础，把属于不同分支的学科有机结合在一起，围绕培养学生学数学并会用数学来组织实施教学。而本书就是对这方面努力的总结。

工程数学的教学十分重视自学能力的培养。考虑到初学者在阅读数学教科书时往往“只见树木，不见森林”，把握不住要点，我们在各章节的起始部分，扼要地写有带“导学”性质的引言，文字浅显便于入门；有的还写有简单的学习方法指导，旨在帮助初学者自己看书时能透视脉络，从细节的认知升华到对全盘的把握；有的章节后面还缀有小结，目的是让初学者梳理学过的知识，使之系统化、条理化。本书的另一个特点是较多地采用几何诱导和引入支撑点过渡的办法阐述概念和定理，把某些对初学者难度过大的定理的证明以附录形式附在书后，包括打“*”号的内容，略去不读，并不影响后面的学习。编写时我们坚持“实例先行”，只要例子与一般情况没有原则差别，尽可能用实例说明，以期达到化难为易的目的；对于较多地

带有理科色彩的内容和暂时不展开讲述的知识点，书中留好“接口”，尽可能让初学者感受到学数学“入门既不难，深造也是办得到的事”。

本书由叶惠民主持编写，参加编写的还有杜蜀安和蔡国梁等；全书由叶惠民、王学弟和李医民统稿。在编写过程中，我们参考了许多相关书籍和教材，吸取了它们中的不少材料；我们还得到江苏大学理学院院长、博士生导师田立新教授的指导，谨在此致谢。

本书的出版要感谢江苏大学京江学院教学部的同志，两年多来教改课题的试点工作是他们扶植和支持的。

限于经验和水平，加上这次编写的时间十分仓促，书中疏漏和不足之处一定存在，希望使用本教材的师生及同行批评指正。

编　者

2002.10.18

目　　录

1 行列式

在生产实践和科学研究中，一些变量之间的关系可以直接地或近似地表为线性函数，因此研究线性函数是非常重要的问题．线性代数主要是研究线性函数的．随着计算机的普及，线性代数已成为21世纪每个大学生必修的一门重要基础课．从本章开始，我们用四章的篇幅，着重地讨论线性代数中的主要问题．

线性方程组是线性代数的一个重要部分．研究线性方程组首先需要行列式这个工具．在行列式这一章中，我们讨论以下3个问题：

1．n 阶行列式概念的形成；

2．行列式的基本性质及主要计算方法；

3．利用行列式求解线性方程组，即用克拉默法则解未知数个数与方程组所含方程个数相等的线性方程组．

1.1 行列式的概念

就人类认识运动的秩序说来，人们总是由认识个别和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物．为了理解 n 阶行列式概念，我们从 $n=2$ 开始，从二阶行列式的引入说起．

求解两个未知量 x_1, x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 b_1, b_2 是常数项；a_{ij} 叫做 x_j 的系数，它有两个附标(下标)，第一个附标 i 表示它在第 i 个方程，第二个附标 j 表示它是第 j 个未知量的系数．比如 a_{12} 就是第一个方程中 x_2 的系数．用消元法消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

同样，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

因此，当 $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，我们有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

这就是说，满足方程组(1.1)的 x_1, x_2 就是式(1.2)；或者说假如方程组(1.1)有解，那么这解就一定是式(1.2)．把式(1.2)代入方程组(1.1)直接验证，得知式(1.2)的确是方程组(1.1)的解．所以这时式(1.2)就是方程组(1.1)的惟一解．

为了便于记忆这个表达式，我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

叫做二阶行列式．它是由方程组(1.1)未知量的系数构成的．它含有两行，两列；横写的叫做行，竖写的叫做列．二阶行列式由 2^2 个数组成，$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素．从上式我们得知，二阶行列式是这样两项的代数和：一项是从左上角到右下角的对角线(叫做行列式的主对角线)上两个元素的乘积，取正号；另一项是从右上角到左下角的对角线(叫做行列式的次对角线)上两个元素的乘积，取负号．这种计算方法称作**对角线法则**．比如

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3\times 7-(-5)\times 2 = 31$$

根据定义，我们容易得知，式(1.2)中两个分子可以分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad a_{11}b_2-b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

如果我们记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是方程组(1)的惟一解(2)就可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

像这样用行列式来表示线性方程组的解，形状简洁，容易记忆．

例 1 解线性方程组$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$.

解 这里 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11$$

因此，所给方程组的惟一解是

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-19}{-7} = \frac{19}{7}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-11}{-7} = \frac{11}{7}$$

我们再来求解含三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.3}$$

同上面一样，先从前两式消去 x_3，后两式也消去 x_3，得到只含 x_1，x_2 的两个新的线性方程；再从这两个新线性方程消去 x_2，就得到

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\
&=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3
\end{aligned}
$$

当 x_1 的系数

$$
\begin{aligned}
D=&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

时，得出

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3)$$

同样，我们可以求得

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31})$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31})$$

所以，当 $D\neq 0$ 时，如果方程组(1.3)有解，就一定是上述惟一形式．

同前面一样，为了便于记忆，我们可以定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

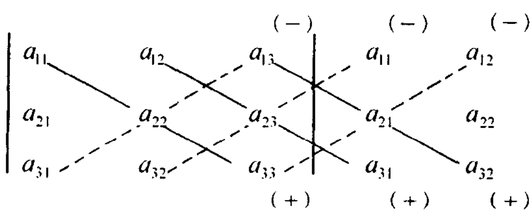
为三阶行列式，则它由 3^2 个元素组成，仍表示一个算式求得的代数和，即

$$
\begin{aligned}
D=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\
=&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

这个代数和由 $3!=6$ 项组成，前三项为正，后三项为负．每项均由3个位于行列式中不同行、不同列的元素相乘所得．

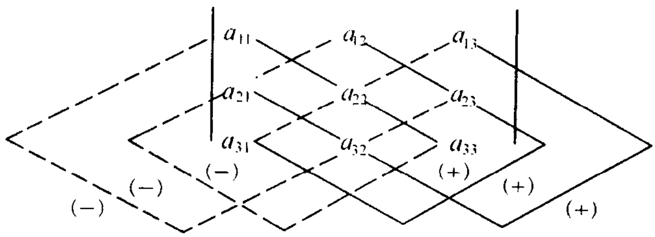
为了便于进行三阶行列式的计算，我们仍用对角线法来记忆和运算(对角线法则只适用于二阶与三阶行列式)．

此方法是将行列式 D 中的第一列与第二列重写于 D 的右侧，然后求对角线上元素之积的代数和而得行列式的值：



位于实线上的三个元素相乘而得的项前冠以“+”号，位于虚线上的三个元素相乘而得的项前冠以“-”号.

我们也可以用画线的方法来记忆和计算.下图中三条实线看作是平行于主对角线的联线，三条虚线看作是平行于次对角线的联线，实线上三元素的乘积项前取“+”号，虚线上三元素的乘积项前取“-”号：



例 2 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则，有

$$D = 1\times3\times2+2\times4\times2+3\times(-1)\times5-1\times5\times4$$
$$-2\times(-1)\times2-3\times3\times2=-27$$

例 3 求 c 为何值时有 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & c \end{vmatrix} = 0$.

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & c \end{vmatrix} = -3c + 12$

因为 $D = 0$，即 $-3c + 12 = 0$，故 $c = 4$.

即 c 为 4 时所给行列式的值为 0

例 4 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

解 方程左端的三阶行列式

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 12 - 2x^2 - 9x = x^2 - 5x + 6$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 解得 $x = 3$ 或 $x = 2$.

为了定义 n 阶行列式，先介绍**余子式**和**代数余子式**的概念.

在三阶行列式中划去 a_{ij} 元素所在的第 i 行和第 j 列的元素，剩下的元素按原顺序构成的二阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}. a_{ij} 的余子式乘上 $(-1)^{i+j}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 A_{ij}，因此，$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

定理 1　三阶行列式 D 的值等于其任意一行(列)的所有元素与它们各自对应的代数余子式乘积之和．

证　选取第一行,证明 $D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. 选其他任一行(列)所有元素与其对应的代数余子式乘积之和为 D 的值的证法与此证法类似．

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}
\end{aligned}$$

这样,我们就可以通过计算三个二阶行列式来求得三阶行列式的值．这个定理称为拉普拉斯定理,D 的展开式称为**拉普拉斯展开式**,它又可以简记如下:

$$D = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \qquad (i = 1,2,3; j = 1,2,3)$$

三阶行列式的余子式和代数余子式的概念完全适用于 n 阶行列式．

利用拉普拉斯展开的方法,由三阶行列式可以定义四阶行列式;由四阶行列式可以定义五阶行列式;依次类推,假定定义了$(n-1)$阶行列式,就可以定义 n 阶行列式．

定义　由 n^2(n 为正整数)个元素组成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n* 阶行列式**．它表示一个算式,其展开的结果是一个代数和表示的值,定义为

$$\begin{aligned}
D &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}
\end{aligned}$$

$$(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,n)$$

这里的 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式．在 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素,按原顺序而得到的$(n-1)$阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},而将 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称作元素 a_{ij} 的代数余子式．

按照 n 阶行列式的定义,我们将行列式展开,得到的是含有 $n!$ 项的代数和,每项是由位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积,展开式中有一半$\left(\frac{n!}{2}\right)$项前为正号,

另一半项前为负号．

为了确定行列式的展开式中每一项项前的符号，我们引进排列的**逆序数**的概念．

由 1,2,3,…,n 组成的一个有序数组称为一个 n 级（或 n 元）排列，如果一对数的前后位置与它们的大小次序相反，即，排在前面的数比后面的数大，它们就构成一个**逆序**；一个排列中逆序的总和数称为该排列的**逆序数** $\boldsymbol{N}$，排列的逆序数由其中每一个元素引起的逆序个数相加得到．如 2 1 5 3 4，该排列的逆序数是 3，即 $N = 1 + 1 + 1 = 3$.

计算排列的逆序数可用如下方法：按自然顺序自左向右依次划去排列中的 1，2，…，$n-1$，遇到比该数大的数的个数，即为逆序．

排列 5 3 1 2 6 4 依次划去 1 时，有 2 个逆序；划去 2 时有 2 个逆序；划去 3 时有 1 个逆序；划去 4 时有 2 个逆序．故该排列的逆序数 $N = 2 + 2 + 1 + 2 = 7$.

将行列式展开式中的项中元素第一个下标按自然顺序排列后，第二个下标排列的逆序数若为偶数，则项前符号为正；若逆序数为奇数，则项前符号为负．

因此，n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^N a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

其中 $1 \quad 2 \quad \cdots \quad i \quad \cdots \quad n$ 为自然排列，N 为排列 $p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_i \quad \cdots \quad p_n$ 的逆序数．

如四阶行列式中某项为 $a_{13}a_{32}a_{41}a_{24}$，将第一下标按自然顺序排列后得：$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$，第二下标排列的逆序数为：$N\ (3\ 4\ 2\ 1) = 2 + 3 = 5$. 所以该项在行列式展开式中的项前符号为负．

例 5 用定义计算三角形行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 的值．

解 由定义按第一行展开，有

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{再按第一行}} a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

用完全类似的方法可以求得 n 阶三角形行列式 D_n 的值：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$