黑博士“临考点题猜题”命题浓缩精华系列

2004年硕士研究生入学考试

数学 11月

最后冲刺密押五套A卷

数学四

组编 黑博士考研信息工作室
编著 陈跃祥 周华强 王东明
（北京大学著名命题预测专家）
蔡昌林 林祥源 魏柏芳
（清华大学著名命题研究专家）

世界图书出版公司

数学 11月

最后冲刺密押

五套卷

黑博士“临考点题猜题”详解与命题研究系列

2004年硕士研究生入学考试

数学最后冲刺密押5套

A卷（11月）

——新典型100题·数学四

（经济类·经典版）

组　编　黑博士考研信息工作室

主　编　铁　军　李　强（著名命题研究专家）

编　著　北京大学著名数学教授　周华强

清华大学著名数学教授　林祥源

北京大学著名数学教授　陈跃祥

清华大学著名数学教授　蔡昌林

北京理工大学数学博士　魏柏芳

上海交通大学数学博士　王东明

策划人　汪　澜

世界图书出版公司

西安·北京·广州·上海

图书在版编目（CIP）数据

硕士研究生入学考试试题详解与命题研究 / 陈志良 主编

—西安：世界图书出版西安公司，2003.10

ISBN 7 - 5062 - 6141 - 3

Ⅰ. 硕… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 098353 号

黑博士“临考点题猜题”详解与命题研究系列

数学最后冲刺密押5套卷（数学四）

——新典型100题

铁 军　李 强　　主　编

焦 毓 本　　责任编辑

黑博士工作室　　总 策 划

世界图书出版西安公司 出版发行

（西安市南大街17号　邮编：710001　电话：7279676）

旗舰印务有限公司印刷

各地新华书店经销

开本：787×1092（毫米）1/16　印张：58　字数：1160千字

2003年11月第1版　2003年11月第1次印刷

ISBN　7-5062-6141-3/H · 507

Wx 6141　全套十二册定价：120.00元

目 录

经济类 数学四

● 点题猜题 核心讲稿 ●

2004年全国硕士研究生入学考试
经济类·数学11月最后冲刺浓缩密押5套试卷

黑博士数学四试卷(一)

——北京大学数学强化班命题预测信息及精华浓缩

黑博士考研信息工作室
2003年11月于北京

高分经验警示: 在当前激烈的考研竞争中,对于数学基础较好或具有中高级以上水平的同学而言,做一定数量的典型题是成功的关系,也就是说:“数学要想考高分,除过做典型题之外,再没有其它的秘诀或捷径!”

提醒特别注意: 此部分题目具有一定的代表性、典型性、预测性、综合性,特别推荐!在2003年考研中,本书中48道题相似或命中考题中非客观题(大题)32道(次),其中数学一,10题136分;数学二,9题124分;数学三,11题142分;数学四,9题120分。

黑博士锦囊妙计: 命题试卷中带 ※ 者为二级重点预测典型题,带 ※※ 者为一级重点预测典型题。此部分题目具有一定代表性、典型性、预测性、综合性,特别推荐!

得分	评卷人

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中的横线上.)

(1) $\int \frac{\ln x - 1}{x^2}dx =$ ________.

(2) 设某商品的需求函数为 $Q = \frac{25}{P+1} - 4$,则收益 R 关于价格 P 的弹性是________.

※(3) 设 $z = xf(\frac{y}{x}) + yg(\frac{x}{y})$,其中 f,g 二次可微,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ________.

※※(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$则 $\boldsymbol{B} =$ ________.

(5) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是________,设 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是________.

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$,如果 $P\{X \leqslant -1\} = \frac{1}{4}$,则 $P\{\max(X,Y) \leqslant 2, \min(X,Y) \leqslant -1\} =$ ________.

得分	评卷人

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设$f(x)\begin{cases}\dfrac{\ln(1+bx)}{x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$则当$f(x)$在$x=0$处可导时,有$f'(0)=$(　　).

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) -1

(C)1　　(D) $\dfrac{1}{2}$

※※(8) 设$a_n=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x$,则$\lim\limits_{x\to\infty}na_n=$(　　)。

(A)$(1+e)^{\frac{3}{2}}+1$　　(B)$(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$

(C)$(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$　　(D)$(1+e)^{\frac{3}{2}}-1$

(9) $f(x)=xe^{-x^2}\sin x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是(　　).

(A) 有界的偶函数　　(B) 有界的奇函数

(C) 无界的偶函数　　(D) 无界的奇函数

(10) 圆$r=1$之外和圆$r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$之内的公共部分面积为(　　).

(A)$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}r\mathrm{d}r$　　(B)$2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}r\mathrm{d}r$

(C)$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}r\mathrm{d}r$　　(D)$2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}r\mathrm{d}r$

(11) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b\arcsin x\mathrm{d}x$ 的值为(　　).

(A)0　　(B) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(C)$\arcsin x$　　(D)$\arcsin b-\arcsin a$

(12) 设$\lambda=2$是非奇异矩阵A的一个特征值,则矩阵$(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$有一个特征值等于(　　).

(A) $\dfrac{4}{3}$　　(B) $\dfrac{3}{4}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{1}{4}$

(13) 以A表示事件“甲种产品畅销,乙种产品滞销”则其对应事件$\bar{A}$为(　　).

(A)“甲种产品滞销,乙种产品畅销”　　(B)“甲、乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”　　(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”

※(14) 已知随机变量X服从二项分布,且$E(X)=2.4$,$D(X)=1.44$,则二项分布的参数n,p的值为(　　).

(A)$n=4,p=0.6$　　(B)$n=6,p=0.4$

(C)$n=8,p=0.3$　　(D)$n=24,p=0.1$

三、解答题（本题共9小题，满分94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

得分	评卷人

※(15)　（本题满分8分）

设$f(x,y)$连续，且$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-2|+2}}+\dfrac{1}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中$D:0\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}$，试求$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

得分	评卷人

(16)　（本题满分8分）

设某厂商生产某产品的边际成本为a，固定成本为b，需求函数为$q=\dfrac{1}{c}(d-p)$，其中q为需求量，p为单价，a、b、c、d为正常数，且$d>a$.

（Ⅰ）求该厂商利润最大化时的产量及最大利润.

（Ⅱ）计算利润最大化时的需求对价格的弹性e.

（Ⅲ）证明$p=a/(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}})$.

得分	评卷人

(17)　（本题满分9分）

设φ,ψ二阶可导，函数

$$z=\frac{1}{2}[\varphi(y+ax)+\varphi(y-ax)]+\frac{1}{2a}\int_{y-ax}^{y+ax}\psi(t)\mathrm{d}t,$$试求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial y^2}$.

得分	评卷人

(18)　（本题满分9分）

设函数$f(x)$连续，且$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$，已知$f(1)=1$，求$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$的值.

得分	评卷人

※(19) (本题满分8分)

已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{3^x-1}=2$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

得分	评卷人

(20) (本题满分13分)

问a,b为何值时,方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1. \end{cases}$$

有惟一解,无解,有无穷多组解?并求出无穷多解时的通解

得分	评卷人

(21) (本题满分13分)

(1)设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是方阵$\boldsymbol{A}$的互异特征值,$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots\boldsymbol{x}_s$是对应的特征向量.证明$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s$线性无关.

(2)设λ_1,λ_2是方阵A的不同特征值,所对应的特征向量分别为$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$,证明$a\boldsymbol{x}_1+b\boldsymbol{x}_2$不是$\boldsymbol{A}$的特征向量,其中$a,b$是非零常数.

得分	评卷人

(22) （本题满分 13 分）

设 A,B 为二个随机事件，$P(A)=p,P(B)=q,P(AB)=r,0<p<1,0<q<1$. 定义随机变量

$$X=\begin{cases}1, & \text{当 } A \text{ 发生时;}\\ 0, & A \text{ 不发生时.}\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & \text{当 } B \text{ 发生时;}\\ 0, & \text{当 } B \text{ 不发生时.}\end{cases}$$

① 计算 X 和 Y 的相关系数 $\rho(X,Y)$.

② 证明：$|r-pq|\leqslant\frac{1}{4}$.

③ 证明：X,Y 相互独立的充分必要条件是事件 A,B 相互独立.

得分	评卷人

※※(23) （本题满分 13 分）

假设随机变量 X 的密度为

$$f_1(x)=\begin{cases}4xe^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

而随机变量 Y 在区间 $(0,X)$ 上服从均匀分布，试求：

(1) X 和 Y 的联合密度 $f(x,y)$；

(2) Y 的概率密度 $f_2(y)$.

2004年全国硕士研究生入学考试
经济类·数学11月最后冲刺浓缩密押5套试卷

黑博士数学四试卷(一)参考答案

黑博士考研信息工作室
2003年11月于北京

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中的横线上.)

(1) $-\frac{\ln x}{x}+C$

【解析】 由于$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\frac{1}{x}$,因此

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x&=\int(\ln x-1)\mathrm{d}(-\frac{1}{x})\\&=-\frac{1}{x}(\ln x-1)+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}(\ln x-1)\\&=-\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+C\\&=-\frac{\ln x}{x}+C\end{aligned}$$

(2) $\frac{21-8P-4P^2}{21+17P-4P^2}$.

【解析】 由于$R=PQ$,这样,收益关于价格的弹性

$$\begin{aligned}E&=\frac{P}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}(PQ)}{\mathrm{d}P}=1+\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\\&=1-\frac{25P}{(21-4P)(P+1)}=\frac{21-8P-4P^2}{21+17P-4P^2}.\end{aligned}$$

(3) 0

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})+g'(\frac{x}{y})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=-\frac{y}{x^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{y}{x^2}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^3}f''(\frac{y}{x})+\frac{1}{y}g''(\frac{x}{y})\\&=\frac{y^2}{x^3}f''(\frac{y}{x})+\frac{1}{y}g''(\frac{x}{y}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})-\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{x}{y^2}g''(\frac{x}{y})\\&=-\frac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{x}{y^2}g''(\frac{x}{y}).\end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$

(4) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

【解析】 本题要先化简,再求解. 由于$A^*BA=2BA-8E$,在等式两端左乘A,右乘A^{-1}得

$$|A|B=2AB-8E$$

由于$|A|=-2$,得$B+AB=4E$,即$(E+A)B=4E$. 因为$E+A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$可逆,故

$$B=4(E+A)^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

(5) 1,2,3

【解析】 均应填1,2,3. 因

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

对角阵,上(下)三角阵的特征值为对角元素.

(6) $\frac{3}{16}$

【解析】 由于$P\{\max(X,Y)\leqslant 2,\min(X,Y)\leqslant -1\}$

$=P\{\max(X,Y)\leqslant 2\}-P\{\max(X,Y)\leqslant 2,\min(X,Y)>-1\}$

$=P\{X\leqslant 2,Y\leqslant 2\}-P\{-1<x\leqslant 2,\ -1<Y\leqslant 2\}$

$=P\{X\leqslant 2\}\cdot P\{Y\leqslant 2\}-P\{-1<X\leqslant 2\}\cdot P\{-1<Y\leqslant 2\}$,

根据题意,$P\{X\leqslant -1\}=\Phi\left(\frac{-1-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{-3}{\sigma}\right)=\frac{1}{4}$,

$$P\{X\leqslant 2\}=P\{Y\leqslant 2\}=\Phi(0)=\frac{1}{2}.$$

$$P\{-1<X\leqslant 2\}=P\{-1<Y\leqslant 2\}=\Phi(0)-\Phi\left(\frac{-3}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

故所求的概率为$\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

(7) A

【解析】 因为可导必连续,所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)}{x}=b=f(0)=-1$,有$b=-1$.

再利用导数定义求导数:$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1-x)+x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$

$$=-\frac{1}{2}.$$

(8) B

【解析】 $a_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\frac{n}{n+1}}(1+x^n)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+x^n)$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+x^n)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$$

因$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\mathrm{e}^{-1}$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\right]^{\frac{3}{2}}-1=(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$

因此选(B).

(9) B

【解析】 从$f(x)$的结构看,它是x(奇函数)与$\mathrm{e}^{-x^2}\sin x^2$(偶函数)的乘积,因而是奇偶函数. 这表明($A$),($C$)不正确.

因为$\sin x^2$有界,从而$f(x)$是否有界取决于$x\mathrm{e}^{-x^2}$在区间$(-\infty,+\infty)$上是否有界. 由洛必达法则不难得出

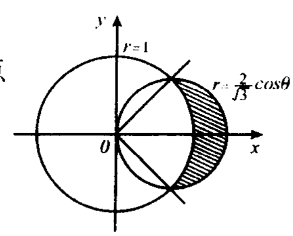
$$\lim_{x\to\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=0,$$

再由$x\mathrm{e}^{-x^2}$的连续性即知$x\mathrm{e}^{-x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

根据上面分析可知(B)正确,(D)不正确.

评注 把上面讨论有界性的作法可一般化为:设$f(x)$在$(a,+\infty)$连续,且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,则$f(x)$在$(a,+\infty)$有界. 原因在于$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在保证了$f(x)$分别在区间$(a,a+\delta]$($\delta>0$是一个常数)和区间$[X,+\infty)$($X>a+\delta$是一个常数)上的有界性,而$f(x)$在闭区间$[a+\delta,X]$上的连续性又保证了它在这个区间上的有界性,取$f(x)$在这三个区间上的界的最大者就是$f(x)$在$(a,+\infty)$上的一个界. 对于其它类型的无界区间也有类似的结论.

(10) D



【解析】 作平面图形如图,从而知公共部分的面积,边界交点是:

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\theta=\frac{\pi}{6},S=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}r\mathrm{d}r$. 应选(D).

(11) A

【解析】 此题比较隐蔽,如果注意到积分值$\int_a^b\arcsin x\mathrm{d}x$为一常数,与$x$无关,则不难得出正确答案为(A).

(12) B

【解析】 应该用定义法求抽象矩阵的特征值,设方阵$\boldsymbol{A}$对应于$\lambda=2$的特征向量为$\boldsymbol{X}$,则$\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}$.

于是,$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AX})=2\boldsymbol{AX}=4\boldsymbol{X}$,从而$(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2)\boldsymbol{X}=\frac{4}{3}\boldsymbol{X}$.

故 $\boldsymbol{X}=\frac{4}{3}(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2)^{-1}\boldsymbol{X}$,即$(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2)^{-1}\boldsymbol{X}=\frac{3}{4}\boldsymbol{X}$,故选$B$.

(13) D

【解析】 用A_1表示甲产品畅销,A_2表示乙产品畅销,则$A=A_1\bar{A}_2$,从而

$\bar{A}=\overline{A_1A_2}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2$.

(14) B

【解析】 由 $E(X)=np,D(X)=np(1-p)$ 得方程组

$$np=2.4,\quad np(1-p)=1.44.$$

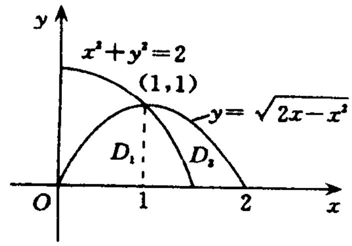
解方程组即得 $n=6,p=0.4$.

三、解答题（本题共9小题，满分94分.解答应写文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15) （本题满分8分）

令 $A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，则由题设

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-2|+2}}+\frac{1}{\pi}A,$$



积分得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-2|+2}}d\sigma+\iint\limits_D\frac{1}{\pi}Ad\sigma,$$

即

$$A=\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-2|+2}}\mathrm{d}\sigma+\frac{A}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi,$$

所以 $A=2\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-2|+2}}d\sigma$

$$=2\left(\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}\right)\frac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-2|+2}}\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{4-r^2}}r\mathrm{d}r+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{4-r^2}}r\mathrm{d}r+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta}\frac{1}{r}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})\pi.$$

(16) （本题满分8分）

【解析】 (Ⅰ) 由题设可知厂商的成本函数 $c(q)=aq+b$. 从而利润函数为

$$\pi=(d-cq)q-aq-b=(d-a-cq)q-b.$$

利润最大化的必要条件为

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}q}=d-a-2cq=0,\text{从而 } q=\frac{d-a}{2c}.$$

由驻点的惟一性及 $\frac{\mathrm{d}^2\pi}{\mathrm{d}q^2}=-2c<0$ 可知，$q=\frac{d-a}{2c}$ 为所求利润最大化的产量，此时利润

$$\pi=\frac{(d-a)^2}{4c}-b.$$

(Ⅱ) 由弹性定义 $e=\frac{-\triangle q}{\triangle p}\cdot\frac{p}{q}$，代入(Ⅰ)中结果得

$$e=\frac{1}{c}\cdot\frac{\frac{d+a}{2}}{\frac{d-a}{2c}}=\frac{d+a}{d-a}.$$

（Ⅲ）原式右边 $= a/(1-\frac{1}{e}) = a/(1-\frac{d-a}{d+a}) = \frac{d+a}{2}$,

左边 $= p = \frac{d+a}{2}$,因而　左边 = 右边.

（17）（本题满分9分）

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{2}[\varphi'(y+ax) - \varphi'(y-ax)] + \frac{1}{2}[\psi(y+ax)\psi(y-ax)]$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a^2}{2}[\varphi''(y+ax) + \varphi''(y-ax)] + \frac{a}{2}[\psi'(y+ax) - \psi'(y-ax)],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}[\varphi'(y+ax) + \varphi'(y-ax)] + \frac{1}{2a}[\psi(y+ax) + \psi(y-ax)],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}[\varphi''(y+ax) + \varphi''(y-ax)] + \frac{1}{2a}[\psi'(y+ax) - \psi'(y-ax)],$$

所以 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

（18）（本题满分9分）

对所给等式左端换元，消除被积表达式中 x，再对等式两端关于自变量 x 求导，寻找求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的途径. 令 $2x-t=u$，则 $t=2x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，

$$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = -\int_{2x}^x (2x-u)f(u)\mathrm{d}u$$

$$= 2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - \int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u.$$

于是 $2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - \int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\arctan x^2$,

上式两边对 x 求导得：

$$2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u + 2x[2f(2x) - f(x)] - [2xf(2x)\cdot 2 - xf(x)] = \frac{x}{1+x^4},$$

即

$$2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u = \frac{x}{1+x^4} + xf(x).$$

令 $x=1$，得

$$2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

于是

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}$$

（19）（本题满分8分）

【解析】 由 $\lim\limits_{x\to 0}(3^x-1)=0$ 和已知条件知 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]=0$，这蕴含 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}=0$.

由于 $\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right] \sim \frac{f(x)}{\sin x}$，$3^x - 1 = e^{x\ln 3} - 1 \sim x\ln 3 \quad (x\to 0)$

因此
$$2=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]}{3^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{x\ln3}$$
$$=\frac{1}{\ln3}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{x\ln3}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$$

所以,$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$ 存在且为 2ln3.

(20) (本题满分 13 分)

【解析】 $\bar{A}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&-1&-2&a-3&-1\end{array}\right]$

$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{array}\right]$

i)当 $a\neq1$ 时,有惟一解;

ii)当 $a=1,b\neq-1$ 时,无解;

iii)当 $a=1,b=-1$ 时,$\bar{A}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$,则

$\begin{cases}x_1=-x_2-x_3-x_4,\\x_2=-2x_3-2x_4+1\end{cases}$. 于是 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\eta}^*=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$.

故 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$.

(21) (本题满分 13 分)

【解析】 (1)对 s 用数学归纳法,当 $s=1$ 时,因 $\boldsymbol{x}_1$ 是特征向量,从而是非零向量,必线性无关. 设对 $s-1$ 个互异的特征值结论成立. 令 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots k_s\boldsymbol{x}_s=0$, ①

因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i(i=1,2,\cdots,s)$,用 $\boldsymbol{A}$ 左乘式①有 $k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots k_s\lambda_s\boldsymbol{x}_s=0$, ②

从式①、②中消去 $\boldsymbol{x}_s$ 有 $k_1(\lambda_1-\lambda_s)\boldsymbol{x}_1+k_2(\lambda_2-\lambda_s)\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_{s-1}(\lambda_{s-1}-\lambda_s)\boldsymbol{x}_{s-1}=0$,

由归纳假设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots\boldsymbol{x}_{s-1}$ 线性无关,于是 $k_i(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}_s)=0(i=1,2,\cdots,s-1)$. 又因 $\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}_s\neq0(i=1,2,\cdots,s-1)$,所以 $k_1=\cdots k_{s-1}=0$,代入式①得 $k_s=0$,故 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 线性无关.

(2)用反证法. 设 $a\boldsymbol{x}_1+b\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,则有 $\boldsymbol{A}(a\boldsymbol{x}_1+b\boldsymbol{x}_2)=\lambda(a\boldsymbol{x}_1+b\boldsymbol{x}_2)$,于是

$$a\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+b\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\lambda(a\boldsymbol{x}_1+b\boldsymbol{x}_2),$$

即 $$a\lambda_1\boldsymbol{x}_1+b\lambda_2\boldsymbol{x}_2=\lambda(a\boldsymbol{x}_1+b\boldsymbol{x}_2),$$

整理得　　$a(\boldsymbol{\lambda}_1-\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{x}_1+b(\boldsymbol{\lambda}_2-\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{x}=0$,

因为$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$线性无关,所以有　$a(\lambda_1-\lambda)=b(\lambda-\lambda_2)=0$.

由$a\neq 0,b\neq 0$,得　$\lambda=\lambda_1=\lambda_2$,这与$\lambda_1\neq\lambda_2$矛盾,故$a\boldsymbol{x}_1+b\boldsymbol{x}_2$不是$\boldsymbol{A}$的特征向量.

(22)（本题满分13分）

【解析】 按题意可以知道(X,Y)的联合概率分布为:

$X \backslash Y$	0	1	
0	$1-p-q+r$	$q+r$	$1-p$
1	$p-r$	r	p
	$1-q$	q	

其中$P(X=0,Y=1)=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=q-r$.

$P(X=1,Y=0)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=p-r$其余可类似求得

从而$EX=p,EY=q,EX^2=p,EY^2=q$,

$E(XY)=r$,　$DX=p(1-p)$,　$DY=q(1-q)$.

$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=r-pq$.

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=\frac{r-pq}{\sqrt{p(1-p)q(1-q)}}.$$

(2)由$|\rho(X,Y)|\leqslant 1$,以及$p(1-p)\leqslant\frac{1}{4},q(1-q)\leqslant\frac{1}{4}$,得到

$$|r-pq|\leqslant\sqrt{p(1-p)q(1-q)}=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}.$$

(3)当X,Y独立时,$\rho(X,Y)=0$即$r=pq,P(AB)=P(A)P(B)$推出$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$相互独立.

若事件A,B独立时,则$r=pq$,即p_{22},即$p_{22}=p_2\cdot p_2$容易验证对于$i=1,2,p_{ij}=p_i\cdot p_j$都成立,故$X$和$Y$独立.

(23)（本题满分13分）

【解析】 由题意知　$f_2(y\mid X=x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y\mid X=x)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-2x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}4\int_y^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{-2y}, & y>0\\ 0, & y<0\end{cases}$$