# 数学的猜想与发现

温 光 编著

地质出版社

# 数学的猜想与发现

温　光　编著

地　质　出　版　社

数学的猜想与发现
温光 编著
*
责任编辑：赵薇
地质出版社出版发行
（北京西四）
地质出版社印刷厂印刷
（北京海淀区学院路29号）
新华书店总店科技发行所经销
*
开本：787×1092 1/32 印张：2.25 字数48000
1988年12月北京第一版·1988年12月北京第一次印刷
印数：1—1670册 国内定价：0.75元
ISBN 7-116-00349-5/O·01

# 前 言

为了帮助中学生和知识青年学好数学，笔者编写了这本《数学的猜想与发现》。

本书并不着意系统传授数学理论，而仅是介绍一些有趣的数学知识，以及数学家是如何猜想、发现这些数学问题的。数学涉及的门类众多，妙趣横生，有些问题是几世纪以来数学家一直未能解决的；有些是通过数学家的辛勤劳动发现的新内容和证明方法；有些是有趣的数学名题。阅读本书可以加深读者对某些数学知识的理解，使读者通过这些有趣的数学问题，加强对数学的认识，提高学习数学的兴趣。本书还能帮助学生和青年弄懂：数学是探索和发明的沃土，数学对世界文明总是起着重要的作用。在科学技术迅速发展的今天，没有相当的数学知识就难以适应四化建设的需要。

本书不仅讲述了一些有趣的数学问题，还介绍了一些古今中外数学家猜想、发现数学问题的过程和体会，以及一些世界数学名题的解决过程。读者可以从中提高发现数学问题的能力，了解研究数学的方法。

由于作者水平有限，错误不当之处，敬请批评指正。

温 光

1988年6月

# 目　　录

# 刘徽的数学发现

《九章算术》是我国古代流传下来最早的一部数学著作，成书约在公元一世纪东汉初年章帝时期，是我国古代科学家数学知识的结晶。

《九章算术》是以问题集的形式编写的，共收集246个应用问题，其中有秦以前流传下来的老问题，也有西汉以后的新题目，共九章：

"方田"章，主要是面积计算，列出了矩形、三角形、梯形、圆的面积的计算公式，以及弓形面积的经验公式，其中圆周率用"径一周三"。这一章的分数计算方法，基本和现代方法一致；

"粟米"章，写的是粮食交易的计算方法；

"衰分"章，是分配比例的计算方法；

"均输"章，是管理粮食运输均匀负担的计算方法；

"商功"章，是体积计算，包括立方体、长方体、圆柱体、平截头的方锥体、圆锥体、正三角柱、直三角锥、……等各种形体的体积计算；

"少广"章，则是由已知图形的面积和体积反过来求它的边长，提出了开平方、开立方的方法，和现代的开方法很类似；

"盈不足"章，是研究盈亏问题；

"方程"章，介绍了联立一次方程组的消元解法。例如此章第一题就是三元一次联立方程组，三个未知数三个方

程，其消元方法，和现代化数学中的方法实质上是一样的。

此章中，还引入了负数概念，提出了正负数的加减法则，这些，在世界数学史上都是第一次；

第九章“勾股”，叙述了勾股定理以及相似直角三角形的解法。

由上述介绍可知，我国古代数学曾经取得过何等光辉的成就。

前面说过，《九章算术》是以问题集的形式编集的，所以文字简略，对一些解法或结论以及所依据的理论，缺少解释和说明，这是它的不足；

刘徽是我国成就杰出的数学家，他生活在公元三世纪的魏晋时期，刘徽对《九章算术》的上述不足，作了很大程度的弥补．他为《九章算术》作了注．

在《九章算术注》中，刘徽精辟地阐明了各种解题方法，并提出了简要证明，论述这些解法的正确性．还指出了原书中一些近似解法的精确度，纠正了个别解法的错误．

刘徽的《九章算术注》更为可贵之处，是他做了很多创造性的工作，开拓了不少远远超过原著的新理论，新发现，新见解，将原书的水平，提到了相当可观的高度．可以说，刘徽的数学理论工作，为建立具有独特风格的我国古代数学理论体系，打下了坚实的基础．

今天，刘徽的《九章算术注》已经成为世界数学名著，被译成多种文字出版．

刘徽创造性地应用和总结了一些计算方法，如“齐同术”、“今有术”、“图验法”、“棋验法”、“重差术”、“割圆术”等．

“齐同术”就是今天的分数通分，他说：“凡母互乘之谓之齐，群母相乘谓之同．同者，相与通同共一母也．齐者，

子与母齐，势不可失本数也”.意思是说：分子、分母同乘一个数（齐），分数值不变（分数基本性质），各各分数分母相乘，叫同（通分之意），这样可以共同用一个分母.

“今有术”提出了正反比例、复比、连销比例的解算方法。

“图验法”是研究图形的，例如对于面积的计算用“以盈补虚”，即切割、移动，把不易计算的图形面积切补成长方形来计算，这种等积变形，就是在今天的平面几何中，也是常用的。

他还用图形的分割组合，成功的证明了勾股定理、开平方的方法步骤，显示了他的高度抽象概括能力。

“棋验法”是利用切割方法，研究立方体体积的计算，这也是今天我们研究体积的方法。

用此法明确地指出一些体积的计算方法，利用这计算方法能准确的计算出简单几何体体积，再用这些基本立体模型（“棋”），拼合，得出较复杂的几何体体积计算公式.

刘徽更大的贡献，是他的“割圆术”.

“割圆术”就是在圆内作内接正多边形，求出正多边形的面积，再用这个面积来近似地代替圆的面积，并用它来计算圆周率的近似值（不足近似值）.

今天我们知道：圆面积 $s=\pi r^2$，$r$为圆的半径，当 $r=1$ 时，则圆面积的值就是圆周率$\pi$的值。所以，当圆的半径为1时，求圆面积的近似值，也就是求圆周率$\pi$的近似值。

下面我们详细叙述一下刘徽的“割圆术”。可分三步：

1．求内接正多边形的边长，如图1，设已知圆$O$的半径$OA=OB=OC=1$，$AB$是内接正$n$边形的一边，它的长是$l_n$，$C$是$\overparen{AB}$中点，那末$AC$和$CB$是内接正$2n$边形的边。如果用

$l_{2n}$表示$AC$或$CB$的长，那么由勾股定理可得：在直角$\triangle AOD$内

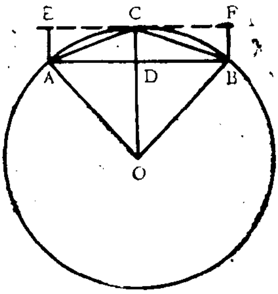


图 1

$$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}$$
$$=\sqrt{1^2-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{4-l_n^2}$$

$$DC=OC-OD=1-\frac{1}{2}\sqrt{4-l_n^2}$$

在直角$\triangle ADC$内：

$$l_{2n}=AC=\sqrt{AD^2+DC^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{l_n}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{4-l_n^2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}} \qquad ①$$

2。由边长求面积：

因为$AB\perp OC$，所以四边形$AOBC$的面积是

$$\frac{1}{2}OC\times AB=\frac{1}{2}\times 1\times AB=\frac{1}{2}l_n\ (=2\times S_{\triangle AOC})$$

但$AOBC$是内接正$2n$边形的$n$分之一，所以正$2n$边形的面积是

$$S_{2n}=n\times\frac{1}{2}l_n=\frac{1}{2}nl_n \qquad ②$$

3. 定不足近似值和过剩近似值

我们再构造一个多边形。上边我们做了圆内接正$n$边形，我们再做这个圆的外切正$n$边形，但要去$n$个小三角形，我们不妨叫做近似圆外切$n$边形吧。如图2，具体作法是在图1的基础上，以$AB$为底，$OC$作高，作矩形$ABFE$，则$EF$必切于圆。

那么：

$$S_{ABFE}=2S_{\triangle ABC}=2(S_{ACBO}-S_{\triangle AOB})$$

$$=2\left(\frac{1}{n}S_{2n}-\frac{1}{n}S_n\right)$$

$$=\frac{1}{n}\cdot 2(S_{2n}-S_n).$$

$$n\times S_{ABFE}=2(S_{2n}-S_n).$$

那么这个近似的外切正$n$边形的面积，就等于$n$个矩形$ABFE$的面积加上内接正$n$边形的面积$S_n$，即

$$n\times S_{ABFE}+S_n.$$

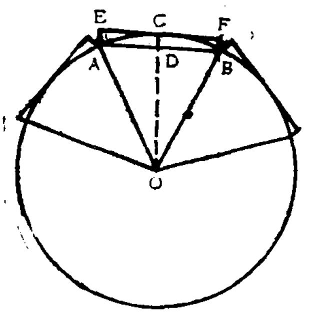


图 2

这个面积显然大于圆面积，即多出了许多个矩形（如$ABFE$等）的圆外部分。

我们已经设圆半径为1，则圆面积等于圆周率$\pi$

$$n\times S_{ABFE}+S_n=2(S_{2n}-S_n)+S_n$$

$$=S_{2n}+(S_{2n}-S_n)>\text{圆面积}=\text{圆周率}\pi.$$

又因圆面积大于$S_{2n}$，所以得不等式

$$S_{2n}<\pi<S_{2n}+(S_{2n}-S_n) \qquad ③$$

刘徽根据上面的三个结果，由内接6边形算起，因为已知半径为1的圆内接正6边形，边长也是1，所以由公式①，可得

$$l_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1^2}}=0.517638.$$

继续由公式②得

$$S_{24}=\frac{1}{2}\times 12\times 0.517638=3.105828.$$

照此进行，又可求得：

$$S_{48}=3.132627,$$

$$S_{96}=3.139344,$$

$$S_{192}=3.141024,$$

此时：其类外切多边形面积

$$S_{192}+(S_{192}-S_{96})=3.141024+(3.141024-3.139344)$$

$$=3.142704.$$

由公式③得：

$$3.141024<\pi<3.142704$$

或 $$3.14\frac{0.64}{625}<\pi<3.14\frac{1.69}{625}$$

这个结果显然有两位小数是准确的，刘徽用四舍五入法，取两位小数而定

$$圆周率\pi = 3.14 = \frac{157}{50}$$

因为这是一个不足近似值，所以他求得这个数后，还补充说明此率"犹为微少".意思是这是圆周率的不足近似值．刘徽在计算时所用的圆周率都是这个数，后人把它称做"徽率"。

刘徽总结这种用迫近的方法求圆面积，说："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆（周）合体，而无所失矣"。即圆内接正多边形边数越增多，那么多边形面积和圆面积的差也就越少，当边数不断增多（割之又割），并无限的增多，达到"以至于不可割"时，则多边形面积就和圆面积相等了。

这与我们一千七百多年后的今天所说的"极限"概念是一致的。

我们可以拿当代积分概念与之相比较．定积分的概念是由求曲边梯形的面积引进的，如图3。我们求曲边梯形$QOAK$的面积的想法是，把一边$OA$分成$n$等份，然后分别做矩形（如图3所示），这些小矩形面积的和小于曲边梯形的面积，当割之又割，则这众多小矩形面积的和越来越接近曲边梯形面积．当$n \to \infty$时，则小矩形面积和的极限就是曲边梯形的面积．这种想法完全是"割圆术"思想的再现．

刘徽的卓越贡献，对后人也有很大影响，公元五百年初，祖暅在此影响下，受到启发而得到"祖暅原理"（是今天体积推算的基础），而国外发现这一原理时，已是一千一百多年以后了。

另外"割圆术"还体现了一种方法，这也是数学发现一般采用的方法：因为圆的面积不知道，只知道正多边形面积，刘徽正是通过已知的、可以求得的去逼近未知的，他把圆面

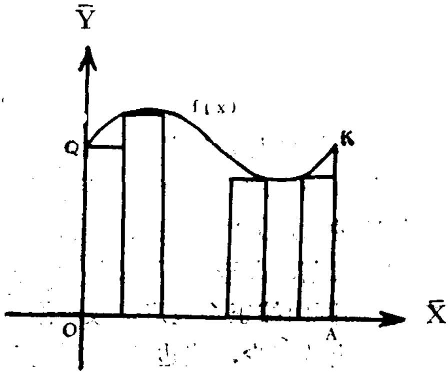


图 3

积看成边数无限增多的正多边形面积，而边数有限的正多边形的面积可求，从而可用有限来逼近无限。

# 祖冲之与圆周率

上一节我们介绍了伟大的数学家刘徽，并且提到了圆周率的计算，这使我们想起另一位伟大的科学家一祖冲之，他对圆周率精确度的提高，做出了巨大贡献。

祖冲之（公元429—500年），字文远，祖籍范阳（今河北省涞水县），是南北朝时期南朝的一位非常杰出的科学家，他在数学、天文历法、机械制造等领域内，都有着卓越的贡献。

他年轻时，就对天文、数学具有浓厚的兴趣，虽然他没上过什么学，也无名师指导，但他刻苦学习，勤奋努力。他广泛搜集、阅读了前人关于天文、数学的浩繁著作，但从不盲目接受，而是“亲量圭尺，躬察仪漏，目尽毫厘，心穷筹策”，一定要亲自认真的观察，精确的测量与计算，这样他发现并纠正了前人的一些不足和错误，取得了不少光辉的成就。他对圆周率（$\pi$）的研究，就是一例。

上一章谈到创立“割圆术”的刘徽，把圆周率推算到3.146的重要结果。在当时的世界上，这已经是一个相当准确的数据。但祖冲之并不满足于前人的成就，决心攀登新的高峰，他经过长期的反复测算，刻苦钻研，终于得到了更为精确的圆周率的近似值。

《隋书·律历志》记载：“宋末，南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正、

数在盈朒二限之间。密律：圆径一百一十三，圆周三百五十五。约律：圆径七，周二十二”（朒音nǜ，不足的意思）．从这段记载来看，祖冲之对圆周率的贡献有三点：第一，计算出圆周率在3.1415926、3.1415927之间，在世界数学史上第一次把圆周率的推算准确到小数点后七位。在国外，直到一千年以后，十五世纪阿拉伯数学家阿尔·卡西将圆周率计算到小数点后十六位时，才打破了祖冲之的记录。第二，明确指出了圆周率的上限和下限，用两个高准确度的固定数作界限，精确地说明了圆周率的大小范围，这在当时也是前所未有的。第三，提出约率$\frac{22}{7}$和密率$\frac{355}{113}$。这一密率值在世界上是第一次被提出，所以有人主张叫它“祖率”。德国人奥托和荷兰人安托尼兹得到这一结果，是在一千年后的十六世纪。

$$\left(\frac{22}{7}=3.1\dot{4}285\dot{7},\ \frac{355}{113}=3.1415929\right)$$

史书上没有记载祖冲之是怎样得到上述结果的。不少人推断，祖冲之是采用了刘徽的“割圆术”，利用刘徽的不等式计算出盈朒二限的。如果确是这样的话，祖冲之应当是从圆内接正六边形、十二边形、二十四边形，…，一直计算到一万二千二百八十八边形和二万四千五百七十六边形，依次求出它们的边长和面积。这需要对有九位有效数字的大数进行加、减、乘、除和开方运算，共一百多步，其中近五十次的乘方和开方，有效数字高达十七、八位之多。当时，数字运算还不是用纸、笔和数码，而是用落后的筹算法。通过纵横相间地罗列小竹木棍，用跟后世的珠算术类似的算法进行计算。可见，祖冲之需要具备多么严肃认真的精神和付出多么艰巨的劳动。

远在一千多年前，我国的科学家就已经掌握了相当丰富的数学知识，他们在辛勤劳动中，克服了难以想象的困难，做出巨大贡献，为世界数学史写下了光辉的一页。中国数学从上古到明代一直是独立发展的，而且许多创造还传播到了国外。为世界人民做出贡献。

下面我们用今天的数学，把圆周率 $\pi$ 的计算总结一下：

计算圆周率 $\pi$ 的值，常采用高等数学中的级数做工具。

我们知道 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$，$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}1$，$\pi=4\operatorname{arctg}1$.

由高等数学中，反正切函数的级数展开式为：

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

$(-1\leqslant x\leqslant 1,\ n=1,2,\cdots\cdots)$

当 $x=1$ 时，则

$$\pi=4\operatorname{arctg}1=4\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots\right]$$

照此级数可以求到任意精确度的 $\pi$ 的值。但由于此级数收敛太慢，得到误差小于0.01的近似值，就要计算到200项之外。为克服这一不足，我们不取 $x=1$，而取 $x=\frac{1}{5}$，令

$A=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$，从而 $\operatorname{tg}A=\frac{1}{5}$

则 $$\operatorname{tg}2A=\frac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2A}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg}4A=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}$$

设 $B=4A-\frac{\pi}{4}$.

则 $$\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}\left(4A-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}4A-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}4A\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}$$

$$=\frac{1}{239};$$

而 $\frac{\pi}{4}=4A-B=4\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$,

∴ $\pi=16\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-4\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$.

以此来计算 $\pi$ 的近似值，较为理想。将有关数据代入前面反正切函数的展开式中：

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\times\frac{1}{5^7}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{5^9}$$
$$-\frac{1}{11}\times\frac{1}{5^{11}}+\cdots;$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{239^3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{239^5}-\cdots$$

可以算出

$$\pi=16\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-4\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{239}=3.14159265$$

准确到小数点后第八位。