

G632.6/41.2
C4

中学数学教材研究与教案选

第 二 册

北京师范大学出版社

中学数学教材研究与教案选

第 二 册

本 社 编

北京师范大学出版社

中学数学教材研究与教案选

第 二 册

本 社 编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

七二二六印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：12.75 字数：269千

1984年2月第1版 1984年2月第1次印刷

印数：1-40,000

统一书号：7243·161 定价：1.10元

前 言

多年来，广大数学教师在教学实践中积累了非常丰富的教学经验，将这些经验进行交流与推广，无疑将对开展中学数学教学的研究，提高数学教学质量有着积极的意义。为此，我们在翻阅了解放以来，尤其是近三、四年来有关中学数学教学的大量文章与资料的基础上，约请了全国二十多个省、市、自治区的几百位教师撰写文章与教案，并经过精选和修改，编辑了《中学数学教材研究与教案选》这套书。本书的作者中，绝大部分都具有二、三十年甚至更长时间的数学实践，其中数十名是特级教师。选入书中的文章与教案可以说是他们几十年辛勤劳动的结晶，在一定程度上反映了全国某些地区中学数学教学的情况。

本书是按照一九八二年公布的《全日制六年制重点中学数学教学大纲（草案）》（征求意见稿）的教学体系，结合现行统编教材编写的。各章配备的教材分析或经验文章一般概括了课本各章节的主要内容及其在初等数学中的地位和作用，提出了教学目的和要求，对重点和难点还配备了适当数量的教案。有的还对教材的结构作了分析，对教学方法提出了一些宝贵的建议。教案多数比较详尽，从中不仅能看到作者课堂教学的全过程，而且还能看出作者的一些意图和想法，少数教案较略，但言简意明，脉络清楚，重点突出。总之，本书就如何通过课堂教学加强学生的基础知识，进行基

本技能的训练以及培养学生的能力等方面各具特色，可供广大中学数学教师研究和参考。还需指出的是书中的文章与教案一般都对学生提出了较高的要求，读者在选作参考时，应结合自己的教学实践，而不能简单录用。

本书共分六册出版。前三册为初中部分；后三册为高中部分。具体内容安排：第一册为初一代数；第二册包括初二、初三代数；第三册包括初二、初三几何；第四册包括高一、高二代数与三角；第五册包括高一、高二立体几何与解析几何；第六册为高三代数与微积分。

参加本书编辑工作的有罗小伟、彭文逵、晨光、周耿等同志，最后由北京师范大学数学系钟善基、曹才翰先生审定。

由于水平有限，又兼仓促完稿，本书在内容的选材，文章与教案的安排以及文字的修饰等方面，还会存在许多问题，恳请同志们批评指正。

编 者

目 录

前 言

数的开方、二次根式..... (1)

数的开方、二次根式、指数部分教材分析..... 丁盛宝 杨应元 (1)

教案..... (19)

平方根 顾 青 (19)

算术平方根 顾 青 (24)

完全平方数的开平方..... 刘宁基 (28)

实数 刘宁基 (32)

二次根式 丁盛宝 (38)

二次根式乘法 景林超 (43)

分母有理化 景林超 (50)

指 数..... (58)

谈谈指数和常用对数的教学 周焕山 (58)

教案..... (73)

零指数和负整数指数幂的概念 周焕山 (73)

分数指数幂的概念及其运算法则 曾作人 (79)

科学记数法 郝君方 (84)

根式的基本性质 郝君方 (88)

一元二次方程..... (93)

谈“一元二次方程”一章的教学 师立群 (93)

关于二元二次方程组的教学	余元希(122)
教案	(130)
一元二次方程	景林超(131)
一元二次方程的解法——因式分解法	陈守礼(136)
一元二次方程的配方法	赵长木(138)
一元二次方程的公式解法	赵长木(142)
一元二次方程的根的判别式	刘瘦侠(148)
一元二次方程的根与系数的关系(一)	潘福田(151)
一元二次方程的根与系数的关系(二)	潘福田(156)
二次三项式的因式分解	景林超(161)
简单的高次方程(一)	付加朋(169)
简单的高次方程(二)	付加朋(176)
根式方程(一)	付加朋(182)
根式方程(二)	付加朋(191)
简单的二元二次方程组(一)	康 远(198)
简单的二元二次方程组(二)	裴立世(206)
简单的二元二次方程组(三)	吉 耳(213)
函数及其图象(教案)	(218)
函数	单际祥(218)
平面直角坐标系	查鼎盛(223)
反比例函数及其图象	陈 尧(229)
二次函数概念和 $y = ax^2$ 的图象与性质	戴汝潜(234)
函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象和性质	戴汝潜(240)
二次函数的最大值、最小值	戴汝潜(244)
一元一次不等式组及其解法	韦鸣伦(249)
$ x < a, x > a$ 型的不等式及其解法	韦鸣伦(258)

一元二次不等式及其解法	韦鸣伦(263)
常用对数	(272)
常用对数一章的教材分析	陈受诚(272)
教案	(278)
对数	陈受诚(278)
积、商、幂、方根的对数	陈受诚(282)
常用对数的首数和尾数	刘金城(285)
对数换底公式(一)	刘金城(290)
对数换底公式(二)	刘金城(294)
解三角形	(299)
解三角形一章的教材分析	赵宪初(299)
教案	(316)
三角函数	马国璋(316)
30° 、 45° 、 60° 角的三角函数值	马国璋(322)
直角三角形中边和角间的关系	章昌宁(328)
已知两边解直角三角形	章昌宁(333)
余弦定理	黄汉禹(338)
正弦定理	黄汉禹(346)
用余弦定理理解斜三角形	赵宪初(353)
统计初步(教案)	(358)
总体和样本	冯士腾 许行范(358)
平均数(一)	冯士腾 许行范(364)
平均数(二)	冯士腾 许行范(369)
方差	冯士腾 许行范(378)
频率分布(一)	冯士腾 许行范(388)
频率分布(二)	冯士腾 许行范(394)

数的开方、二次根式

数的开方、二次根式、指数部分

教 材 分 析

一、数的开方

本章教材首先通过实际问题引进平方根的概念，着重指出正数有两个平方根，零的平方根是零，接着讲解算术平方根的概念，然后着重讲数的开平方的一般方法，先讲能开得尽的（即完全平方数的开平方），再讲开不尽的（即非完全平方数的近似平方根），同时介绍平方根表的构造与用法。接着讲立方根的概念，立方根表。在此基础上，讲解了无理数的概念及实数的概念。

（一）教学要求。

1. 使学生了解平方根、立方根和算术平方根的意义，以及平方根和算术平方根之间的联系和区别，能够正确地用符号来表示一个数的平方根、立方根和算术平方根。

2. 使学生掌握开平方的一般方法，能够熟练地求出一个数的平方根。

3. 使学生掌握“中学数学用表”中平方根表和立方根表的用法。

4. 使学生在了解无理数意义的基础上，能理解实数的一些概念，以及实数和数轴上的点一一对应关系。

(二) 本章教材的重点是对算术平方根概念的正确理解以及平方根和立方根的求法。开方运算是六种基本运算之一，其中开平方是最常用的，在解二次方程时，就要用到，因此除了要会查平方根表以外，还要能掌握开平方的一般方法，由于用笔算开平方的方法比较复杂，学生理解与掌握它都有一定的困难，但这对培养学生具有正确的运算能力是有好处的。

在求平方根和立方根的过程中，熟悉了它们的表示形式，为以后根式的表示形式打好基础。在开方过程中，会碰到开不尽的问题，对以后无理数概念的理解，提供了感性的认识。

(三) 本章教材的难点是对实数概念和算术根概念的理解。

学生在实际解题中，常常把平方根与算术平方根混淆，错用符号。为了解决这一问题，教材中，在求 36 的平方根时，不是直接写出 36 的平方根是 ± 6 ，而是采用如下的写法：

$$\because (\pm 6)^2 = 36,$$

$$\therefore 36 \text{ 的平方根是 } \pm 6, \text{ 即 } \pm\sqrt{36} = \pm 6.$$

同样，教材在求 100 的算术平方根时，采用如下写法：

$$\because 10^2 = 100,$$

$$\therefore 100 \text{ 的算术平方根是 } 10, \text{ 即 } \sqrt{100} = 10.$$

通过以上格式的训练，可以更加明确算术根的概念。

教学中，还应该强调 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 只表示算术根。由于学生所接触到的数大都表示有理数，习惯于整数与分数的形式，对于无限不循环小数的形式，即无理数的形式一时难以理解。教师讲解时稍有疏忽，则学生往往只以为 $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{3}$ 是

无理数（即开不尽的数是无理数），而对 π 、 e 、 $0.101001001\cdots$ 等就不知为什么也是无理数。由于对无理数的概念缺乏正确的认识，因而影响对实数概念的理解，特别是实数与数轴上的点一一对应，不能找出它们的对应规律。

（四）本章教材的关键。

理解和掌握开平方法则的关键，在于正确理解数位分段，以及怎样根据公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b(2a+b)$ 导出开平方的法则，并且注意每相邻两个计数单位之间的进率是 10。

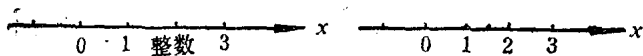
理解实数概念的关键，在于理解无理数的概念。由于教材对于无理数的概念是采取直观叙述的方法，“我们把无限不循环小数叫做无理数”而没有加以理论上的论证。因此在教学中，除举不同形式的无理数外，还可要求学生按上述定义，自行写出几个不同形式的无理数，用直观的方法来弥补理论上的不足，从而加深对无理数概念的理解。

（五）关于能力的培养。

为了培养学生的运算能力，在教学中要求学生学会查平方根表、立方根表。不仅会查表内数字的平方根或立方根，而且要能正确、迅速地查出表外数字的平方根或立方根，这对于以后的实数运算，二次方程的求根，以及数学用表中其它数表的掌握，是一个基本要求。高年级学生在运算时怕烦、怕难，对数表、倒数表不会正确使用，这与初二代数开方教学不是没有关系的。

空间想象能力的培养，在于教学中讲解实数时，要充分应用数轴的直观性，不仅要求学生能了解整数、分数在数轴上有其对应点，而且能扩大图形上的想象，了解无理数在数

轴上也具有相应的对应点。为了解释一一对应，可以反过来问学生，数轴上的任意一点是否一定是一个实数呢？这时，可以用图形直观地解释：当点在单位格上时，就是整数；若在某一单位线段中，则可分成两种情况：



将其一个单位再分成十等分或一百等分……，若该点落在其中的等分点上，就是分数。若该点始终不能落在其中的等分点上，而且不会周而复始，那就是无限不循环小数，即无理数。运用数轴不仅形象地解决了实数与数轴上点的一一对应问题，而且也对比较实数的大小，讲解绝对值的概念带来方便，同时也是以后研究函数图象不可缺少的基础知识与基本技能。

恰当地运用正反例，让学生判断，是巩固基本概念的一个方法。如为使学生对平方根的性质有较深的印象，可举如下数：64，-36， $\frac{25}{121}$ ，0，-9，0.0004等，要学生思考，其中哪些数有平方根？哪些数没有平方根？为什么？又如，为使学生能正确理解算术平方根概念，能与平方根概念作出区别，要求思考： $\sqrt{16}$ 表示什么？ $\sqrt{16} = \pm 4$ 对不对？ $\sqrt{-16} = -\sqrt{16} = -4$ 对不对？

二、二次根式

本章教材首先通过平方根，立方根引进根式概念。因二次根式是根式中最简单的形式，学生容易接受，它的性质和运算法则可推广到二次以上的根式，所以教材接着介绍二次根式的性质：算术平方根的表示，乘积的算术平方根，商的

算术平方根。接着讲解最简二次根式、同类根式的意义。最后讲解二次根式的四种运算：加法、减法、乘法、除法，为使计算简捷，在除法前先介绍分母有理化。

(一) 教学要求。

1. 使学生理解根式的概念，能够熟练地判别在什么情况下根式有意义和无意义。

2. 使学生理解二次根式的概念、性质，并能正确迅速地进行根式化简与求值。

3. 使学生掌握二次根式加、减、乘、除的运算法则，能熟练地进行二次根式的运算。

(二) 本章教材的重点是二次根式的运算。

二次根式运算是一种代数式的恒等变形，应用很广泛。例如一元二次方程中求根公式，根与系数的关系，解无理方程等。在学习平面三角、立体几何、解析几何、微积分等课程时，也常用到根式运算。

(三) 本章教材的难点是算术根概念。

二次根式的两个重要公式：

$$\textcircled{1} (\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0);$$

$$\textcircled{2} \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

是根据二次根式的概念推出的，学生一般较难理解。运算中也常发生差错，其原因是绝大多数都和算术平方根有关。例如常发生以下的一些错误： $-3\sqrt{2} = \sqrt{(-3)^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$ ， $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$ ；当 $a < b$ 时， $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$ 等，甚至影响到以后的学习内容，如：解无理方程时，对于

$\sqrt{x^2+3x} = -5$ 不能立即判断它是无解的；在三角中错误地变形 $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\sin^2\alpha} = \sin\alpha$ 等。因此牢固地掌握算术根的条件，是本章的重点和难点。

(四) 本章教材中应抓住的关键：

讲清根式的定义、二次根式的概念是学生能否正确、熟练地进行二次根式运算的关键。由于二次根式是根式中特殊情况，按照“由特殊到一般”的认识规律，本章的教学将直接影响根式运算的教学效果。由于根式相加减必须先化成最简根式，然后合并同类根式。而要化成最简二次根式，则必须根据算术平方根的性质。根式的乘除法，也是利用算术平方根的性质化为同次根式后进行的。算术根的性质能否正确掌握以及合理应用，则又在于清楚地掌握方根的性质，所以讲清根式，二次根式的概念是本章教材的关键。

(五) 关于能力的培养。

本章要着重注意培养学生获得数学知识和运用数学知识的能力。例如在讲二次根式时，教师可强调指出二次根式的特点：①从形式上看有根式，②在实数范围内要有意义。然后可布置以下题目让学生思考：(1)判断下列各式哪些是根式？哪些不是根式？哪些是二次根式？ $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{-3}$ ， $\sqrt[3]{3}$ ， $\sqrt[3]{-3}$ ， $\sqrt[4]{3}$ ， $\sqrt[4]{-3}$ ，(2)如果 a 是任何实数，等式 $\sqrt[3]{a^3} = a$ 总能成立吗？等式 $\sqrt{a^2} = a$ 总能成立吗？又如在讲授二次根式的两个重要公式以后，教师可以通过运用正反例，引导学生运用二次根式概念的知识去判断，从而提高学生的判断能力。例如可举：①下列等式在什么条件下才能成立？

$$(1) \sqrt{a^2} = -a, \quad (2) (\sqrt{-a})^2 = -a, \quad (3) \sqrt{(a-1)^2} = a-1, \quad (4) \sqrt{(2-a)^2} = a-2, \quad (5) \sqrt{(2a+5b)^2} =$$

$= -(2a+5b)$, (6) $(\sqrt{b-a})^2 = b-a$. ②下列计算对不对? 如

果是错误的, 应当怎样改正? (1) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{2}{3}$,

(2) $\sqrt{(x-y)^2} = x-y$, (3) $(\sqrt{m-n})^2 = m-n$,

(4) $\sqrt{(-3)^2} = (\sqrt{-3})^2$, (5) $\sqrt{x^8} = x^4$.

教师所选取的题目, 要求学生在练习时, 必须养成这样的习惯: 为什么要这样变形? (目的是什么?) 为什么能够这样变形? (运用什么性质?) 这样才能不断提高学生运用数学知识的能力.

为了培养学生的逻辑思维能力, 教师可以有意识地把一个根式加上某一个条件, 然后再去掉某一个条件, 让学生对比分析, 从而得出正确的结论. 例如在讲授二次根式时, 可以先给出条件让学生计算: ① $\sqrt{(p-2)^2}$ ($p \geq 2$),

② $\sqrt{x^2-2x+1}$ ($x \geq 4$), ③ $\sqrt{a^2-4a+4}$ ($a \leq -1$) 等. 再不

给条件, 让学生计算: ① $\sqrt{(x+3)^2}$, ② $\sqrt{4a^2-4ab+b^2}$,

③ $\sqrt{(x-y)^6}$ 等.

(六) 教学建议.

1. 对根式定义的理解.

课本中规定: “我们把表示方根的代数式叫做根式”. 而有的初中复习资料却定义为 “有根号的式子叫做根式.” 这样就涉及到 $\sqrt{-2}$ 是不是根式和 $\sqrt{x+1}$ 是否在 x 取任何数值时都可以认为是根式这样一些问题.

在 1979 年出版的第三册教学参考书第 146 页上明确给出: ①从 $\sqrt{(-5)^2}$ 、 $\sqrt{(a-b)^2}$ 、 $\sqrt{a^2+b^2}$ 、 $\sqrt{2a(-3)}$ ($a \leq 0$)、 $\sqrt{y}$ ($y \geq 0$) 等看出: 被开方数是非负数, 所以这些

都是二次根式. ②从 $\sqrt{-5}$ 、 $\sqrt{(-2)^3}$ 、 $\sqrt{5(-3)}$ 、 $\sqrt{\frac{-2}{3}}$ 、

$\sqrt{y-1}$ ($y < 1$) 等看出：被开方数是负数，所以这些都不是二次根式。③ $\sqrt{a+2}$ 、 $\sqrt{a-3}$ 、 $\sqrt{\frac{x}{y}}$ 各在什么情况下是根式？各在什么情况下无意义？

从现行课本中看，在讲述根式的性质时，有这样几句话：“根据方根的定义，可以得到，如果 $\sqrt[n]{a}$ 是一个根式，那么就有：“ $(\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}})^n = a \cdots$ ”虽然书本上并没有指出 n 和 a 的条件，但是用了“如果 $\sqrt[n]{a}$ 是一个根式”这一句话代替了条件：“当 n 为奇数时， a 为任意实数；当 n 为偶数时，取 $a \geq 0$ ”。

我们认为在教学中对根式的定义要强调两个特点：(1) 从形式上看有根号；(2) 在实数范围内要有意义。这两个特点和课本中的定义：“表示方根的代数式”的含意是一致的。所谓“表示”，就是从形式上看有根号；所谓“方根”，当然指在实数范围内有意义。因此，如果给定了一个根式，也就同时具有了该根式有意义的条件。

2. 教学中对习题的处理。

在解题时，对于没有附加字母取值范围的题目，应要求学生自己求出，并把求字母取值范围作为解题过程的必要部分表达出来。例如，化简 $\sqrt{5a^3}$ 。解： $\because 5a^3 \geq 0, \therefore a \geq 0$ ，原式 $= |a| \sqrt{5a} = a \sqrt{5a}$ 。有的题目有字母的附加条件，也应同时注意另一些字母的附加条件，如，化简： $\frac{1}{6} \sqrt{9a^2bc^3}$

($a > 0, b > 0$)。解： $\because 9a^2bc^3 \geq 0$ ，且 $b > 0$ ， $\therefore$ 得 $c \geq 0$ ，
原式 $= \frac{3|a| \times |c|}{6} \sqrt{bc} = \frac{1}{2} ac \sqrt{bc}$ 。

为了避免解题中讨论的复杂性，课本上字母的附加条件

大都取正值，但对学习基础较好的学生，也可对某些字母规定为负值进行练习，帮助他们加深理解。这类练习中，为了由一些字母的条件得出另一些字母的条件，把求字母允许值作为解题过程就更为必要，这样还可以帮助学生纠正字母总表示正值的错误认识。

有些题目在课本上没有附加字母的取值条件，如，化简：

$$\frac{2a^2}{3b} \sqrt{\frac{b^3}{a^4} - \frac{b^2}{a^4}}$$

解：由 $\frac{b^3}{a^4} - \frac{b^2}{a^4} \geq 0$ ，且 $3b \neq 0$ ， $a^4 \neq 0$ ，

$\therefore$ 有 $b^2(b-1) \geq 0$ ，且 $b \neq 0$ ， $a \neq 0$ ， $\therefore b \geq 1$ ，且 $a \neq 0$ ，
原式 = …… (略)

也可先给明条件： $b > 1$ ，使解题过程简化。根据我们的教学体会，写出对字母允许值的判断过程对审题、解题时概念准确、思维有条理是有帮助的。这样做有利于培养学生的能力，发展学生的智力。

3. 重视根式与绝对值的联系。

根式与绝对值的概念、性质有很密切的联系。实际上，绝对值本身是重点，又是难点，它的要求通过多次反复才能逐步完成。在根式运算中用到绝对值，也是对绝对值概念本身的巩固和深化。所以在根式教学开始时，可以分别复习绝对值的定义和有关结论。

由 $|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0), \end{cases}$ 可以得到

① $|x| \geq 0$ ；② $|x| = x \iff x \geq 0$ ；③ $|x| = -x \iff x \leq 0$ 。