

上海市中学课本

数学复习资料

HUXUE FUXI ZILIAO

· 下 册 ·



上海教育出版社

上海市中学课本
数 学 复 习 资 料
下 册

上海市中小学教材编写组编

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 8 字数 179,000

1978 年 12 月第 1 版 1978 年 12 月第 1 次印刷

统一书号: K7150·2002-2 定价: 0.47 元

目 录

(下册)

第十一章 三角函数	1
第一节 任意角的三角函数	1
一、角和它的度量(1) 二、任意角的三角函数(2)	
第二节 三角恒等式	21
一、两角和与两角差公式(21) 二、倍角与半角公式(21)	
三、积化和差与和差化积(22)	
第三节 解三角形	39
一、直角三角形的解法(39) 二、斜三角形的解法(39)	
第十二章 反三角函数和三角方程	59
第一节 反三角函数	59
一、反三角函数的概念(59) 二、反三角函数的基本性质(60)	
第二节 三角方程	70
一、三角方程(70) 二、三角方程的解法(71) 三、三角方程的增根和失根(72)	
第十三章 直线与平面	87
一、平面(87) 二、两条直线的位置关系(87) 三、直线和平面 的位置关系(90) 四、平面和平面 的位置关系(93) *五、多面角与空间基本轨迹(96)	
第十四章 多面体与旋转体	113
第一节 多面体	113
一、多面体的定义和性质(113) 二、棱柱、棱锥、棱台(113)	
三、拟柱体及其体积公式(116) *四、正多面体(118)	

第二节 旋转体	129
一、旋转体(129) 二、圆柱、圆锥、圆台(129)	
(131)	
第十五章 曲线和方程、直线方程	146
第一节 直角坐标系	146
一、有向线段(146) 二、平面直角坐标系(147) 三、基本公式(148)	
第二节 曲线和方程	156
一、曲线和方程的关系(156) 二、曲线和方程的两个基本问题(156) 三、两条曲线的交点(158)	
第三节 直线方程	165
一、直线方程的各种形式(165) 二、点到直线的距离公式(166) 三、两条直线的夹角(166) *四、直线的法线式方程(166) *五、直线系(169)	
第十六章 圆锥曲线	185
第一节 圆锥曲线	185
一、圆锥曲线的定义、标准方程、图形及有关性质(185)	
二、圆锥曲线的画法(188)	
*第二节 圆锥曲线的切线、法线及其性质	202
一、圆锥曲线的切线和法线的定义(202) 二、圆锥曲线的切线方程(203) 三、圆锥曲线的切线和法线的性质(203)	
第三节 坐标变换以及二次方程的讨论和化简	207
一、坐标变换(207) *二、一般二次方程的讨论(209)	
*三、一般二次方程化简的方法(210) *四、圆锥曲线的统一定义和方程(210)	
第十七章 极坐标与参数方程	221
第一节 极坐标	221
一、极坐标系(221) 二、点的极坐标(221) 三、极坐	

标和直角坐标的互换(222)	四、曲线的极坐标方程(223)
第二节 参数方程	229
一、参数方程与普通方程(229)	二、化参数方程为普通方程(230)
三、轨迹的参数方程(230)	四、画参数方程的图形(232)
第三节 等速螺线、渐开线、摆线	232
总复习题	242

第十一章 三角函数

第一节 任意角的三角函数

提 要

一、角和它的度量

1. 角

$\angle AOB$ 可看作由 OA 绕着顶点 O 旋转到 OB 所形成的图形。 OA 叫做始边， OB 叫做终边。(图 11.1)

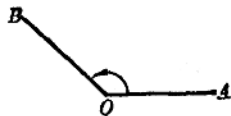


图 11.1

OA 按逆时针方向旋转所成的角是正角；按顺时针方向旋转所成的角是负角。

把角的顶点放在直角坐标系的原点，角的始边放在 x 轴的正方向上，那末，角的终边落在哪一个象限就称这个角是哪一个象限的角。如果终边落在坐标轴上，那末它不属于哪一个象限，看作特别角(如 $k \cdot 180^\circ$, $k \cdot 180^\circ + 90^\circ$ 等)。

2. 角的度量

角(或弧)都可以用角度制和弧度制两种单位来度量。

用弧度来表示角的大小时，一般不写单位名称。如角 $\alpha = 2$ 就表示角 α 是 2 弧度。

3. 角的一般表示形式

所有和角 α 的终边相同的角，连同角 α 在内，可以用下面式子表示：

$k \cdot 360^\circ + \alpha$ (k 是整数， α 是角度数) 或 $2k\pi + \alpha$ (k 是整数，

α 是弧度数)。

二、任意角的三角函数

1. 三角函数的概念

(1) 三角函数 在任意角 α 的终边上任意取一点 P (图 11.2), 它的坐标是 (x, y) , 原点到这点的距离为 r , $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$, 角 α 的六个三角函数为

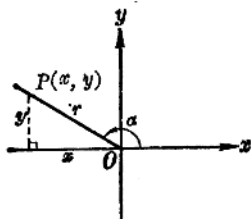


图 11.2

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}; \quad \csc \alpha = \frac{r}{y};$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}; \quad \sec \alpha = \frac{r}{x};$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}; \quad \cot \alpha = \frac{x}{y}.$$

(2) 三角函数的符号 由于 r 取正值, 因此根据各象限内纵坐标 y 与横坐标 x 的符号, 可以得到各三角函数在各象限里的符号。(图 11.3)

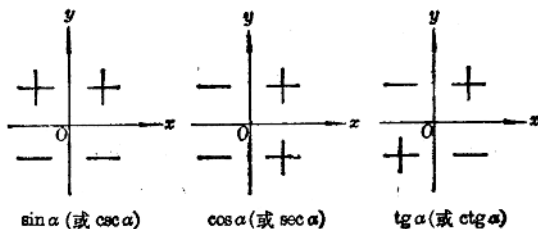


图 11.3

(3) 三角函数线 在单位圆里的线段 MP 、 OM 、 AT 和 BS 的量数连同它们的符号分别表示了角 α 的正弦、余弦、正切和余切的值。它们分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切

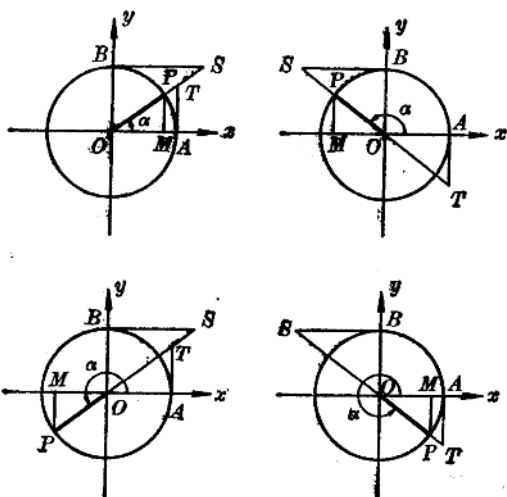


图 11.4

线和余切线. (图 11.4)

(4) 几个特殊角的三角函数值

函数值 函数 \ 角 α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2. 同角的三角函数间的关系

(1) 倒数关系

$$\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1; (\alpha \neq k\pi)$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1; \left(\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1. \left(\alpha \neq k \cdot \frac{k}{2} \pi\right)$$

(2) 商数关系

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \left(\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. (\alpha \neq k\pi)$$

(3) 平方关系

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha; \left(\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \csc^2 \alpha. (\alpha \neq k\pi)$$

这里, 三个倒数关系式、 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 和 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

是同角三角函数间的基本关系式, 其他三个关系式可以从这五个关系式导出。同时还应注意这些关系式成立的条件。

3. 化任意角的三角函数为锐角的三角函数——诱导公式

$-\alpha, 90^\circ \pm \alpha, 180^\circ \pm \alpha, 270^\circ \pm \alpha, 360^\circ - \alpha, k \cdot 360^\circ + \alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系, 如下表所示,

角	正 弦	余 弦	正 切	余 切
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$90^\circ - \alpha$ $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$90^\circ + \alpha$ $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$180^\circ - \alpha$ $(\pi - \alpha)$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$180^\circ + \alpha$ $(\pi + \alpha)$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$270^\circ - \alpha$ $\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$270^\circ + \alpha$ $\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$360^\circ - \alpha$ $(2\pi - \alpha)$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$360^\circ + \alpha$ $(2\pi + \alpha)$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

从上表可以看出, 诱导公式有下面两个特点:

(1) $2n \cdot 90^\circ \pm \alpha$ (n 为整数), 例如, $-\alpha, 180^\circ \pm \alpha, 360^\circ \pm \alpha$

等的三角函数值等于 α 的同名函数值;

$(2n+1) \cdot 90^\circ \pm \alpha$ (n 为整数), 例如, $90^\circ \pm \alpha$ 、 $270^\circ \pm \alpha$ 的三角函数值等于 α 相应的余函数的值。

由于这里 $2n$ 是偶数, $2n+1$ 是奇数, 因此这个特点可以简单地说成“奇变偶不变”。

(2) $2n \cdot 90^\circ \pm \alpha$ 、 $(2n+1) \cdot 90^\circ \pm \alpha$ 的三角函数值的符号, 就是把 α 看成锐角时, 原函数在相应象限内的符号。这个特点可以简单地说成“符号看象限”。

掌握“奇变偶不变, 符号看象限”这一特点, 可以帮助我们记住这些诱导公式。

注意: 在这些诱导公式里, α 不一定是 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的角。

4. 三角函数的性质

三角函数有以下一些主要性质:

(1) 单调性 三角函数的单调性质, 是对自变量角 α 在某一区间来说的。根据 α 在不同的象限, 角 α 的三角函数单调性质列表如下:

函数 \ 角 α	0°	$\nearrow$	90°	$\nearrow$	180°	$\nearrow$	270°	$\nearrow$	360°
$\sin \alpha$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$\cos \alpha$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$+\infty$ $\nearrow$	不存在	$-\infty$ $\nearrow$	0	$+\infty$ $\nearrow$	不存在	$-\infty$ $\nearrow$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	不存在	$+\infty$ $\searrow$	0	$-\infty$ $\searrow$	不存在	$+\infty$ $\searrow$	0	$-\infty$ $\searrow$	不存在

(2) 有界性 根据三角函数的定义可以知道,

$$|\sin \alpha| \leq 1, \quad |\cos \alpha| \leq 1,$$

$\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ 可以是任意实数,

$$|\sec \alpha| \geq 1, \quad |\csc \alpha| \geq 1.$$

所以, $y = \sin \alpha$ 和 $y = \cos \alpha$ 是有界函数, 其他三角函数都是无界函数.

(3) 奇偶性 根据诱导公式, 我们有

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$\therefore y = \sin \alpha, y = \csc \alpha, y = \operatorname{tg} \alpha,$$

$y = \operatorname{ctg} \alpha$ 是奇函数;

$y = \cos \alpha, y = \sec \alpha$ 是偶函数.

(4) 周期性

根据三角函数的定义, 有相同始边和终边的角的同名三角函数都相等, 所以三角函数都是周期函数.

由于 $\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$; $\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$; $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$, 所以正弦、余弦、正割、余割函数的周期为 2π , 正切、余切函数的周期为 π .

5. 三角函数的图象

(1) 三角函数的图象

$y = \sin x$ 的图象, 根据函数 $y = \sin x$ 的性质可以知道, 在区间 $[0, 2\pi]$ 里, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, y 有极大值 1, 当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时, y 有极小值 -1, 因此, $y = \sin x$ 的图象夹在两直线 $y = 1$, $y = -1$ 之间; 在第 I、IV 象限内, 图象上升, 在第 II、III 象限内, 图象下降.

在 $[0, 2\pi]$ 内, 取一些 x 的值, 算出对应的 y 值, 列成下表:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

在直角坐标系里描点连接，画出它的图象，如图 11.5 所示。

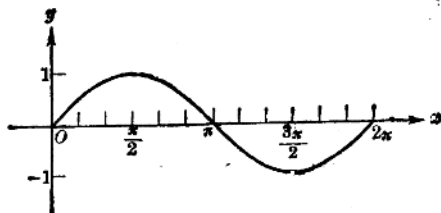


图 11.5

为了画图的方便，通常 x 只分别取 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 和 2π ，得到五组 x, y 的对应值，根据这五个特殊点（其中三个是图象与 x 轴交点，两个是函数的极值点），画出 $y = \sin x$ 的大致图象。

正弦函数的图象也可以用单位圆法把它画出来。（图 11.6）

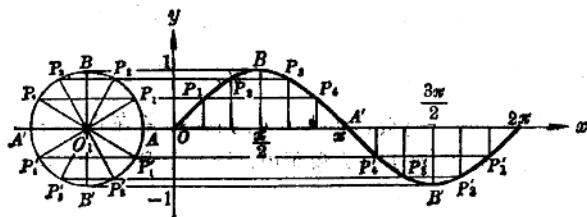


图 11.6

从三角函数的周期性知道, 正弦函数的图象每过 2π 又重复出现, 这样可以得到正弦函数 $y = \sin x$ 在其定义域内(一切实数)的图象(图 11.7), 这个图象叫做正弦曲线。

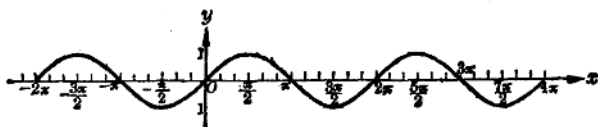


图 11.7

同样, 运用描点法(或单位圆法), 可以画出函数 $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ 的图象。(图 11.8)

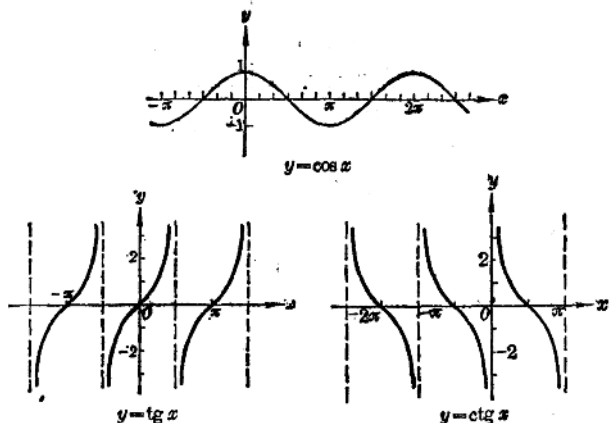


图 11.8

(2) 一般正弦函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi_0)$

函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi_0)$ 的特征完全由 A 、 ω 和 φ_0 确定, 我们把 $\omega x + \varphi_0$ 叫做相位角, 把 $x=0$ 时的相位角 φ_0 叫做初相角, 函数 y 的最大值 A 叫做振幅。当 x 表示时间时, ω 叫做

角频率, 单位是弧度/秒.

把 $\omega x + \varphi_0$ 当作一个角, 当 $\omega x + \varphi_0$ 分别取 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 时, 得到五组 x, y 的对应值, 在直角坐标系里找出对应的五个点. 根据这五个特殊点, 就可以方便地画出函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi_0)$ 图象的大致形状.

例 题

例 1 决定下列各式的符号:

(1) $\cos 245^\circ \cdot \sin 195^\circ$; (2) $\frac{\sin 315^\circ}{\operatorname{ctg} 315^\circ}$

(3) $\sin 100^\circ + \cos 100^\circ$; (4) $\sin 4^\circ - \sin 4$.

解: (1) $\because \cos 245^\circ < 0, \sin 195^\circ < 0,$

$$\therefore \cos 245^\circ \cdot \sin 195^\circ > 0;$$

(2) $\because \sin 315^\circ < 0, \operatorname{ctg} 315^\circ < 0,$

$$\therefore \frac{\sin 315^\circ}{\operatorname{ctg} 315^\circ} > 0;$$

(3) $\sin 100^\circ + \cos 100^\circ = \sin 100^\circ - \sin 10^\circ$
 $= \sin 80^\circ - \sin 10^\circ,$

$\because$ 正弦函数在第 I 象限是增函数,

$$\therefore \sin 80^\circ - \sin 10^\circ > 0.$$

即

$$\sin 100^\circ + \cos 100^\circ > 0;$$

(4) $\because 4$ 是第 III 象限的角, $\sin 4 < 0,$

$$\therefore \sin 4^\circ - \sin 4 = \sin 4^\circ + |\sin 4| > 0.$$

说明: 要决定两个三角函数的和(或差)的符号时, 一般要把式里的异名三角函数化为同名三角函数

例 2 (1) 已知: $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 求 $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ 的值;

* (2) 已知: $\cos \theta = m$, 求 $\sin \theta$ 、 $\operatorname{tg} \theta$ 的值.

解: (1) $\because \sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\therefore \alpha$ 在第 III 或第 IV 象限.

当 α 在第 III 象限时, $\cos \alpha = -\sqrt{1-\sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3},$$

当 α 在第 IV 象限时, $\cos \alpha = \sqrt{1-\sin^2 \alpha} = \frac{4}{5}$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}.$$

(2) 当 $0 < m < 1$ 时, θ 在第 I 象限,

$$\sin \theta = \sqrt{1-\cos^2 \theta} = \sqrt{1-m^2}, \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m};$$

θ 在第 IV 象限,

$$\sin \theta = -\sqrt{1-m^2}, \operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}.$$

当 $-1 < m < 0$ 时, θ 在第 II 象限,

$$\sin \theta = \sqrt{1-m^2}, \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m};$$

θ 在第 III 象限,

$$\sin \theta = -\sqrt{1-m^2}, \operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}.$$

当 $m=1$ 时, $\theta=2n\pi$, $\sin \theta=0$, $\operatorname{tg} \theta=0$;

当 $m=-1$ 时, $\theta=(2n+1)\pi$, $\sin \theta=0$, $\operatorname{tg} \theta=0$;

当 $m=0$ 时, $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, $\sin \theta=1$, $\operatorname{tg} \theta$ 不存在,

$$\theta=2n\pi+\frac{3\pi}{2}, \sin \theta=-1, \operatorname{tg} \theta \text{ 不存在.}$$

说明: 在利用同角三角函数关系式求三角函数的值(或化简三角函数式)时, 必须注意所求三角函数的值的符号.

一般可分三种情况:

如果指明已知角 α 所在的象限, 那末在指定的象限求出其他各三

角函数的值(或化简三角函数式),这时所求的值只有一组解;如果没有指明已知角 α 所在的象限,那末需要根据已知条件,对 α 所在的象限进行讨论,然后分别在不同象限内,求出其他各三角函数的值(或化简三角函数式),这时所求的解有两组;如果已知角 α 的三角函数值是一个字母,那末必须对字母的取值情况,角 α 所在象限进行讨论,根据不同的象限,分别求出其他各三角函数的值(或化简三角函数式),这时所求的解就有四组.

例 3 已知: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), 求 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 的值.

解: $\because \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{12}{13}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \alpha + \cos \alpha &= \cos \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) \\ &= -\frac{12}{13} \left(1 - \frac{5}{12} \right) = -\frac{7}{13}. \end{aligned}$$

例 4 化简: $\frac{\sec \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}.$

解: 当 α 在第 I 象限时,

$$\text{原式} = \frac{\sec \alpha}{\sec \alpha} + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 1 + 2 = 3;$$

当 α 在第 II 象限时,

$$\text{原式} = \frac{\sec \alpha}{-\sec \alpha} + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{-\operatorname{tg} \alpha} = -1 - 2 = -3;$$

当 α 在第 III 象限时,

$$\text{原式} = \frac{\sec \alpha}{-\sec \alpha} + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = -1 + 2 = 1;$$

当 α 在第 IV 象限时,