上海市中学课本

数学复习资料

SHUXUE FUXI ZILIAO

·下册·

上海教育出版社

上海市中学课本
数学复习资料
下　　册
上海市中小学教材编写组编
上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）
新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 8　字数 179,000
1978 年 12 月第 1 版　1978 年 12 月第 1 次印刷
统一书号：K7150·2002-2　　定价：0.47 元

目　　录

（下册）

第十一章　三角函数

第一节　任意角的三角函数

提　要

一、角和它的度量

1．角

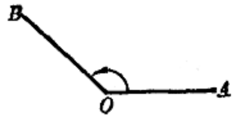

图 11.1

$\angle AOB$ 可看作由 OA 绕着顶点 O 旋转到 OB 所形成的图形．OA 叫做始边，OB 叫做终边．(图 11.1)

OA 按逆时针方向旋转所成的角是正角；按顺时针方向旋转所成的角是负角．

把角的顶点放在直角坐标系的原点，角的始边放在 x 轴的正方向上，那末，角的终边落在哪一个象限就称这个角是那一个象限的角．如果终边落在坐标轴上，那末它不属于哪一个象限，看作特别角(如 $k\cdot180°$，$k\cdot180°+90°$ 等)．

2．角的度量

角(或弧)都可以用角度制和弧度制两种单位来度量．

用弧度来表示角的大小时，一般不写单位名称．如角 $\alpha=2$ 就表示角 α 是 2 弧度．

3．角的一般表示形式

所有和角 α 的终边相同的角，连同角 α 在内，可以用下面式子表示：

$k\cdot360°+\alpha$（k 是整数，α 是角度数）或 $2k\pi+\alpha$（k 是整数，

α是弧度数).

二、任意角的三角函数

1. 三角函数的概念

(1) 三角函数　在任意角α的终边上任意取一点P(图11.2), 它的坐标是(x, y), 原点到这点的距离为r, $r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$, 角α的六个三角函数为

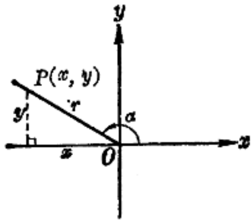

图 11.2

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};\quad \csc\alpha=\frac{r}{y};$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r};\quad \sec\alpha=\frac{r}{x};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

(2) 三角函数的符号　由于r取正值, 因此根据各象限内纵坐标y与横坐标x的符号, 可以得到各三角函数在各象限里的符号. (图11.3)

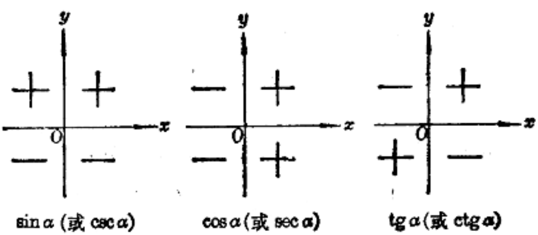

图 11.3

(3) 三角函数线　在单位圆里的线段MP、OM、AT和BS的量数连同它们的符号分别表示了角α的正弦、余弦、正切和余切的值. 它们分别叫做角α的正弦线、余弦线、正切

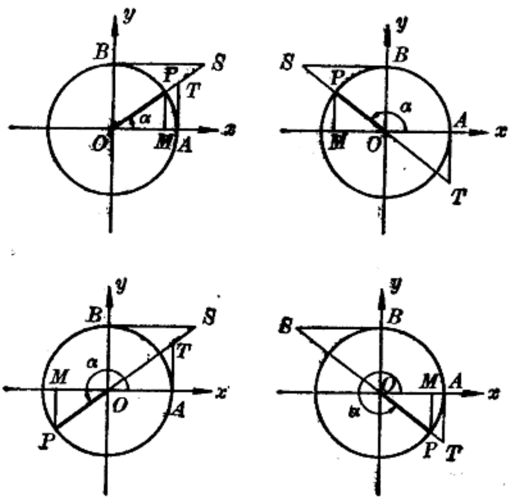

图 11.4

线和余切线. (图 11.4)

(4) 几个特殊角的三角函数值

角 α 函数值 函数	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2. 同角的三角函数间的关系

(1) 倒数关系

$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1;\ (\alpha\neq k\pi)$$

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1;\ \left(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.\ \left(\alpha\neq k\cdot\frac{k}{2}\pi\right)$$

(2) 商数关系

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \left(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\ (\alpha\neq k\pi)$$

(3) 平方关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha;\left(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha.\ (\alpha\neq k\pi)$$

这里，三个倒数关系式、$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$和$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，是同角三角函数间的基本关系式，其他三个关系式可以从这五个关系式导出．同时还应注意这些关系式成立的条件．

3. 化任意角的三角函数为锐角的三角函数——诱导公式

$-\alpha$, $90°\pm\alpha$, $180°\pm\alpha$, $270°\pm\alpha$, $360°-\alpha$, $k\cdot360°+\alpha$与锐角α的三角函数间的关系，如下表所示：

角	正弦	余弦	正切	余切
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$90^\circ-\alpha$ $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$90^\circ+\alpha$ $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$180^\circ-\alpha$ $(\pi-\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$180^\circ+\alpha$ $(\pi+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$270^\circ-\alpha$ $\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$270^\circ+\alpha$ $\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$360^\circ-\alpha$ $(2\pi-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$360^\circ+\alpha$ $(2\pi+\alpha)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

从上表可以看出，诱导公式有下面两个特点：

(1) $2n\cdot 90^\circ\pm\alpha$($n$ 为整数)，例如，$-\alpha$、$180^\circ\pm\alpha$、$360^\circ\pm\alpha$

等的三角函数值等于 α 的同名函数值；

$(2n+1)\cdot 90^\circ \pm \alpha$（$n$ 为整数），例如，$90^\circ \pm \alpha$、$270^\circ \pm \alpha$ 的三角函数值等于 α 相应的余函数的值.

由于这里 $2n$ 是偶数，$2n+1$ 是奇数，因此这个特点可以简单地说成“奇变偶不变”.

(2) $2n\cdot 90^\circ \pm \alpha$、$(2n+1)\cdot 90^\circ \pm \alpha$ 的三角函数值的符号，就是把 α 看成锐角时，原函数在相应象限内的符号. 这个特点可以简单地说成“符号看象限”.

掌握“奇变偶不变，符号看象限”这一特点，可以帮助我们记住这些诱导公式.

注意：在这些诱导公式里，α 不一定是 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的角.

4．三角函数的性质

三角函数有以下一些主要性质：

(1) 单调性　三角函数的单调性质，是对自变量角 α 在某一区间来说的. 根据 α 在不同的象限，角 α 的三角函数单调性质列表如下：

函数值变化情况 / 角 α / 函数	0°	↗	90°	↗	180°	↗	270°	↗	360°
$\sin\alpha$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
$\cos\alpha$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$+\infty$ ↗	不存在	↗ $-\infty$	0	$+\infty$ ↗	不存在	↗ $-\infty$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	不存在	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	不存在	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	不存在

(2) 有界性　根据三角函数的定义可以知道：

$$|\sin\alpha|\leqslant 1,\quad |\cos\alpha|\leqslant 1,$$

$\mathrm{tg}\,\alpha$、$\mathrm{ctg}\,\alpha$ 可以是任意实数，

$$|\sec\alpha|\geqslant 1,\quad |\csc\alpha|\geqslant 1.$$

所以，$y=\sin\alpha$ 和 $y=\cos\alpha$ 是有界函数，其他三角函数都是无界函数.

(3) 奇偶性　根据诱导公式，我们有

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(-\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha.$$

$\therefore$　$y=\sin\alpha$, $y=\csc\alpha$, $y=\mathrm{tg}\,\alpha$,

$y=\mathrm{ctg}\,\alpha$ 是奇函数；

$y=\cos\alpha$, $y=\sec\alpha$ 是偶函数.

(4) 周期性

根据三角函数的定义，有相同始边和终边的角的同名三角函数都相等，所以三角函数都是周期函数.

由于 $\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$；$\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$；$\mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$，所以正弦、余弦、正割、余割函数的周期为 2π，正切、余切函数的周期为 π.

5．三角函数的图象

(1) 三角函数的图象

$y=\sin x$ 的图象，根据函数 $y=\sin x$ 的性质可以知道，在区间 $[0,\ 2\pi]$ 里，当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，y 有极大值 1，当 $x=\frac{3\pi}{2}$ 时，y 有极小值 -1，因此，$y=\sin x$ 的图象夹在两直线 $y=1$，$y=-1$ 之间；在第 I、IV 象限内，图象上升，在第 II、III 象限内，图象下降.

在 $[0,\ 2\pi]$ 内，取一些 x 的值，算出对应的 y 值，列成下表：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

在直角坐标系里描点连接，画出它的图象，如图 11.5 所示。

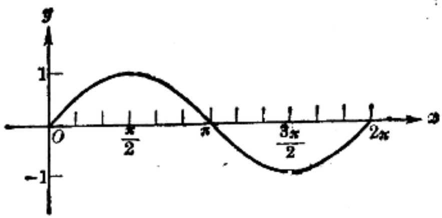

图 11.5

为了画图的方便，通常 x 只分别取 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ 和 2π，得到五组 x、y 的对应值，根据这五个特殊点(其中三个是图象与 x 轴交点，两个是函数的极值点)，画出 $y=\sin x$ 的大致图象.

正弦函数的图象也可以用单位圆法把它画出来. (图 11.6)

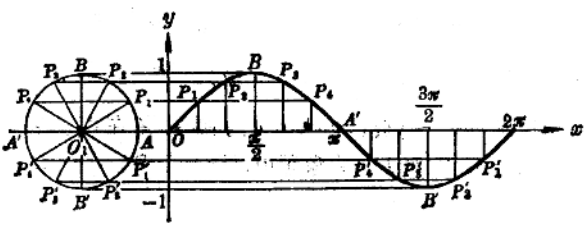

图 11.6

从三角函数的周期性知道，正弦函数的图象每过2π又重复出现，这样可以得到正弦函数$y=\sin x$在其定义域内(一切实数)的图象(图 11.7)，这个图象叫做正弦曲线.

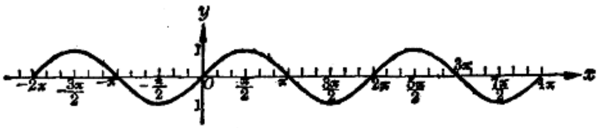

图 11.7

同样，运用描点法(或单位圆法)，可以画出函数$y=\cos x$，$y=\operatorname{tg} x$，$y=\operatorname{ctg} x$的图象.（图 11.8）

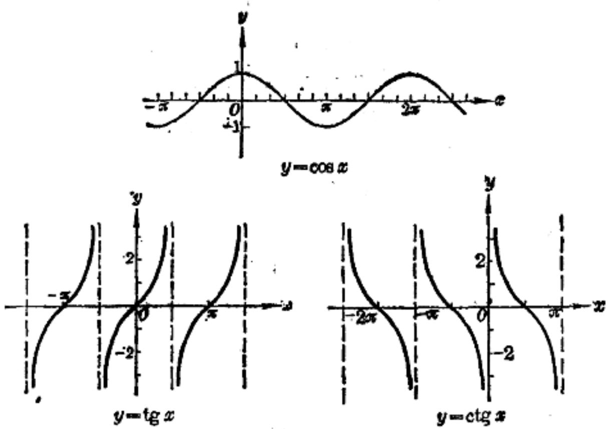

图 11.8

(2) 一般正弦函数$y=A\sin(\omega x+\varphi_0)$

函数$y=A\sin(\omega x+\varphi_0)$的特征完全由$A$、$\omega$和$\varphi_0$确定，我们把$\omega x+\varphi_0$叫做**相位角**，把$x=0$时的相位角$\varphi_0$叫做**初相角**，函数$y$的最大值$A$叫做**振幅**. 当$x$表示时间时，$\omega$叫做

角频率，单位是弧度/秒.

把 $\omega x+\varphi_0$ 当作一个角，当 $\omega x+\varphi_0$ 分别取 0、$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3\pi}{2}$、2π 时，得到五组 x、y 的对应值，在直角坐标系里找出对应的五个点. 根据这五个特殊点，就可以方便地画出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi_0)$ 图象的大致形状.

例　　题

例 1　决定下列各式的符号：

(1) $\cos 245°\cdot\sin 195°$；　　(2) $\dfrac{\sin 315°}{\mathrm{ctg}\, 315°}$；

(3) $\sin 100°+\cos 100°$；　　(4) $\sin 4°-\sin 4$.

解：(1) $\because\ \cos 245°<0,\ \sin 195°<0,$

$\therefore\ \cos 245°\cdot\sin 195°>0$；

(2) $\because\ \sin 315°<0,\ \mathrm{ctg}\, 315°<0,$

$\therefore\ \dfrac{\sin 315°}{\mathrm{ctg}\, 315°}>0$；

(3) $\sin 100°+\cos 100°=\sin 100°-\sin 10°$

$=\sin 80°-\sin 10°,$

$\because$ 正弦函数在第 I 象限是增函数，

$\therefore\ \sin 80°-\sin 10°>0.$

即　　$\sin 100°+\cos 100°>0$；

(4) $\because$ 4 是第 III 象限的角，$\sin 4<0$，

$\therefore\ \sin 4°-\sin 4=\sin 4°+|\sin 4|>0.$

说明：要决定两个三角函数的和（或差）的符号时，一般要把式里的异名三角函数化为同名三角函数

例 2　(1) 已知：$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，求 $\cos\alpha$、$\mathrm{tg}\,\alpha$ 的值；

*(2) 已知：$\cos\theta=m$，求 $\sin\theta$、$\operatorname{tg}\theta$ 的值.

解：(1) $\because \sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\therefore \alpha$ 在第 III 或第 IV 象限.

当 α 在第 III 象限时，$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3},$$

当 α 在第 IV 象限时，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5}$，

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}.$$

(2) 当 $0<m<1$ 时，θ 在第 I 象限，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-m^2},\ \operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{1-m^2}}{m};$$

θ 在第 IV 象限，

$$\sin\theta=-\sqrt{1-m^2},\ \operatorname{tg}\theta=-\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}.$$

当 $-1<m<0$ 时，θ 在第 II 象限，

$$\sin\theta=\sqrt{1-m^2},\ \operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{1-m^2}}{m};$$

θ 在第 III 象限，

$$\sin\theta=-\sqrt{1-m^2},\ \operatorname{tg}\theta=-\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}.$$

当 $m=1$ 时，$\theta=2n\pi$，$\sin\theta=0$，$\operatorname{tg}\theta=0$；

当 $m=-1$ 时，$\theta=(2n+1)\pi$，$\sin\theta=0$，$\operatorname{tg}\theta=0$；

当 $m=0$ 时，$\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$\sin\theta=1$，$\operatorname{tg}\theta$ 不存在，

$$\theta=2n\pi+\frac{3\pi}{2},\ \sin\theta=-1,\ \operatorname{tg}\theta \text{ 不存在}.$$

说明：在利用同角三角函数关系式求三角函数的值（或化简三角函数式）时，必须注意所求三角函数的值的符号.

一般可分三种情况：

如果指明已知角 α 所在的象限，那末在指定的象限求出其他各三

角函数的值(或化简三角函数式)，这时所求的值只有一组解；如果没有指明已知角 α 所在的象限，那末需要根据已知条件，对 α 所在的象限进行讨论，然后分别在不同象限内，求出其他各三角函数的值(或化简三角函数式)，这时所求的解有两组；如果已知角 α 的三角函数值是一个字母，那末必须对字母的取值情况，角 α 所在象限进行讨论，根据不同的象限，分别求出其他各三角函数的值(或化简三角函数式)，这时所求的解就有四组。

例 3 已知：$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$，求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值。

解：$\because\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，

$$\therefore\ \cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=-\frac{12}{13}.$$

$$\therefore\ \sin\alpha+\cos\alpha=\cos\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)$$

$$=-\frac{12}{13}\left(1-\frac{5}{12}\right)=-\frac{7}{13}.$$

例 4 化简：$\frac{\sec\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$.

解：当 α 在第 I 象限时，

$$\text{原式}=\frac{\sec\alpha}{\sec\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1+2=3;$$

当 α 在第 II 象限时，

$$\text{原式}=\frac{\sec\alpha}{-\sec\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}=-1-2=-3;$$

当 α 在第 III 象限时，

$$\text{原式}=\frac{\sec\alpha}{-\sec\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=-1+2=1;$$

当 α 在第 IV 象限时，