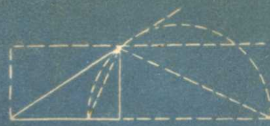
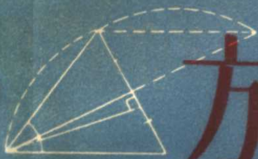


$$u=\frac{x_1x_2+x_3x_4}{x_1+x_2-x}$$

青年数学丛書

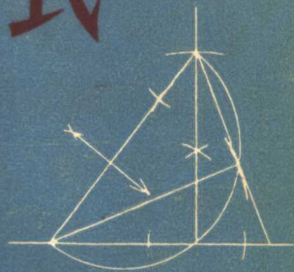
$$e=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$



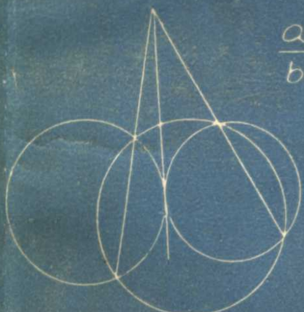
方程式

魏璧著

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$$



$$\frac{a}{b}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}$$



$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan\alpha=\frac{a}{x}.\quad \tan\beta=\frac{b}{x}$$

中国青年出版社

$$\tan\theta=\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}$$

13.1312/138

方 程 式

[illegible] 著

*

中国青年出版社出版

（北京东四12条老君堂11号）

北京市书刊出版业营业许可证出字第036号

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092 1/32　4 1/4印张　79,000字

1952年5月北京第1版　1952年12月北京第2版

1962年7月北京第14次印刷

印数 62,001--182,000

统一书号:13009·[illegible]

定价(6)四角[illegible]

青年数学叢書

方　程　式

魏　埜　著

中国青年出版社

1962年·北京

內 容 提 要

方程式是代數裏很重要的一部分，我們要學好代數，對這部分的原理必須有清楚的瞭解，對解法必須有熟練的技巧。本書把方程的原理和解法作了有系統的敍述，着重歸納的方法，從數字的實例歸到定義、定理和法則。在方程的討論方面，還着重函數圖解，把代數和幾何緊密聯系起來。對進修高等數學和學習工科的同學都有幫助。

作 者 的 話

1. 这一本書主要是給学习高中代数的同学們閱讀的；但內容由淺入深，初学代数的也可以用作参考。作者在未写之前，先根据这个目标，編排了一个目录。

2. 根据目录来选材料，参考了下列的六种書籍：

(1) 高中代数学講义(馬文元)；

(2) 高中代数学(余介石)；

(3) 范氏大代数(中譯本)；

(4) 法文代数 (Algèbre. 作者 F. G. M.)；

(5) 法文代数 (Algèbre. 作者 Emile Borel 和 Maurice Royer)；

(6) 法文簡明代数(Précis d'algèbre.作者Carlo Bourlet).

在这些書中能取用的材料是相当丰富的，于是作了一番精簡工作。其中有些材料，感到刪減嫌不足，加入又恐太多。經过几番考虑，得出这样一个想法：应刪減，但須刪減得恰当。

3. 編时着重于用归納的办法。每节先講数字例題，再归到定义和定理。关于解高次方程着重在介紹技巧的方法。关于方程的討論，除討論外还着重函数图解，想讓讀者对代数与几何間的分不开的联系，得到一个初步的認識，并为学工的同

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c

学在作图应用方面打下一点基础.

4. 总結这一工作,虽然在个人是化了一点功夫的,但缺点一定是很多. 希望数学界同志多提意見,以便改进成为适用的書.

5. 本書目录写出后,曾請教过数学家刘熏宇先生. 承他給了我許多指示,編完后又承他为我精简一番,謹在此致謝.

魏 璧 1951年11月

目　次

一 方程的基本性質

1.【恆等和方程】 設有等式

$$3(10+4)=30+12 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{i}),$$

我們用算术运算,就知道

$$30+12=30+12,$$

$$42=42。$$

又如等式: $5(x+6)=5x+30 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{ii}),$

我們无論用什么数去換 x,这式子的兩边都是相等的。

这 (i)(ii) 兩式叫做**恆等式**.

如果用文字 x 代表式中一个特殊值,把式子写成

$$3x+12=5x-8$$

的形式,就叫做**方程式**,或簡称**方程**.

方程式和恆等式不同的地方,就是在式中有一个或多个文字 $x, y\cdots\cdots$ 代替一个或多个特殊值. 这些文字 $x, y\cdots\cdots$ 叫做**未知数**.

例如方程 $3x+12=5x-8,$

式中未知数的值是 $x=10$,用 $x=10$ 代入式中,得

$$3\cdot10+12=5\cdot10-8,$$

$$30+12=50-8,$$

或 $$42=42.$$

从这里，我們知道所謂未知数的特殊值，就是代入式中使等号兩端的数值相等的值. 因此得出一般定义如下：

方程定义 一般的說，所謂方程，就是一个等式，它的形式，除数字外还有一个或多个叫做未知数的文字 $x, y\cdots\cdots$. 这些未知数只有用某些一定的特殊值去代替，等式才能成立，它是一个有条件的等式.

解一个方程，就是找出等式里面未知数的特殊值. 我們叫它們做方程的根，但有的方程可能是沒有根的.

〔例 1〕 等式 $2x+3=x+5$

不是恆等式，因为很容易看出，不是随意給 x 一个值，都能使等号兩端相等的.

設 $x=1$，等号左端得 5，右端就得 6；又設 $x=10$，左端得 23，右端却得 15.

这样就知道上面这个等式，乃是一个方程.

解这个方程，就是要找到用它的根来代替 x，能使等号兩端的数值相等.

这里应令 $x=2$；因为將 $x=2$ 代入式中，等号兩端都等于7.

$x=2$ 就是要找的方程的根，也就是它的解，并且只有这一个解.

〔例 2〕 一个方程可能有多个解，例如

$$x^2+2=3x,$$

这样的一个方程，它的根是

$$x=1 \text{ 和 } x=2;$$

并且可以証明，除 1 和 2 外，沒有另外的根.

［例 3］ 方程 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{3}{2}$,

它的根是 $x=3$ 和 $x=\frac{4}{3}$,

这是很容易証明的.

［例 4］ 兩个未知数的方程

$$10x+y=63,$$

它的可能的解是 $x=6$ 和 $y=3$.

但这个方程除 $x=6$, $y=3$ 以外,凡是 x 的一个特殊值,必定对应出 y 的一个特殊值,即如 $x=0$ 則 $y=63$, $x=1$ 則 $y=53$……,所以我們說它有无穷多的解.

注意 用文字代替已知数的方程,如

$$ax-ab=bx,$$

叫做**文字方程**. 式中的 a,b 叫做**泛常数**.

用数字代替已知数的方程,如

$$5x+8=7x,$$

叫做**数字方程**.

一个等式是一元或多元方程,看式中包含了一个或多个表出未知量的元来規定.

注 元即代未知数的文字的簡称.

一个方程是**整式**或**分式**,**有理式**或**无理式**,看等号兩端的式子对于未知元来說,是整式或分式,有理式或无理式而定.

例如 $3x-15=12x+2$, 这个方程叫做有理整方程.

又如 $\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x+2}=\frac{9-x}{x}$,这样的叫做有理分方程.

$\sqrt{3y+2}=5y-8$,叫做无理方程.

一个有理整方程,如果它的未知元的指数是 1, 就叫做**一次方程**;如果是 2, 就叫做**二次方程**;由此类推,如果指数是n,

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

就叫做 n 次方程.

2.【相当方程】 兩个有相同的解的方程,解这一个或者解另一个都沒有差別,就是說这一个方程的根代入另一个也适合,这样的兩个方程叫做**相当方程**

3.【定理一】 如果在方程的兩边加上或減去同样一个代数式,所得出来的便是原方程的一个相当方程.

[証] 設方程 $2x+3=x+5$ ……………… (i),

兩端加上同一代数式 $(x+1)$,得

$$(2x+3)+(x+1)=(x+5)+(x+1) \quad \cdots\cdots(\text{ii}),$$

設若我們知道 (i) 式的解是 $x=2$,用它代入 (i) 卽得

$$2\cdot 2+3=2+5,$$

$$7=7.$$

用 $x=2$ 代入 (ii) 式,卽得

$$2\cdot 2+3+2+1=2+5+2+1,$$

$$10=10.$$

所以 (ii) 是 (i) 的相当方程.

兩端同減去一个代数式,这就和加上一个負代数式相同,所以可用同法証明.

4.【定理一的应用】 根据上面的定理,可以把等号这端的項移到另一端.

例如 $2x-5y+6=x+3y-7,$

兩端同加 $(-3y)$,則得相当方程

$$2x-5y+6-3y=x-7.$$

这里可以看出,我們已經把右端的 $(3y)$ 这一項搬到等号的左端了,并且可以知道这样搬动的条件是只要变换它的符

号就行.

5.【定理二】 用同样一个已知而不为零的常数去乘或除方程的兩端,也可以得出一个相当方程.

[証] 設方程 $x-1=2x-3$ ………………(i),

用 4 去乘 (i) 式兩端,得方程

$$4(x-1)=4(2x-3) \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)},$$

(i) 式的根为 $x=2$, 用它代入 (ii) 式也适合,所以 (ii) 是 (i) 的相当方程.

若是用同一已知而不为零的常数去除兩端,用它的倒数去乘兩端就行.

6.【定理二的应用】 根据定理二的原理,可以消去方程的分母.

例如 $$\frac{2x}{3}-\frac{1}{6}+x=\frac{x}{4}-5+\frac{x}{2},$$

用分母的最小公倍数去乘兩端,消去分母后,即得一相当方程

$$8x-2+12x=3x-60+6x.$$

7.【定理三】 方程的兩端各求平方、立方或任何次方以后,所得的方程仍可用原式的一些解去做它的解,但这个方程,一般的說,不是原方程的相当方程.

設方程 $A=B$ ………………………(i),

兩端各自乘,得 $A^2=B^2$

或 $A^2-B^2=0$,

那就是說, $(A+B)(A-B)=0$ ………… (ii).

凡 (i) 式的解也适合于 (ii) 式;但是不能反推,反推就不对了. 实际上,凡 (ii) 式的解都使下一乘积成为零:

$$(A+B)(A-B).$$

就是使因式 $A+B$ 或 $A-B$ 等于零，也就是說，无論是 $A=B$ 的解或 $A=-B$ 的解，都是 (ii) 的解，但 $A=-B$ 却不是 (i) 的解。

可知方程的兩端自乘，便引出了下面这一解：

$$A+B=0.$$

一般地說，設有方程

$$A=B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)},$$

$$A^m=B^m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)},$$

方程 (ii) 可以用下式表出：

$$(A-B)(A^{m-1}+BA^{m-2}+B^2A^{m-3}+\cdots\cdots+B^{m-1})=0.$$

这个方程容許 (i) 式的一切解，但除此以外，也容許下面这个方程的一切解：

$$A^{m-1}+BA^{m-2}+B^2A^{m-3}+\cdots\cdots+B^{m-1}=0.$$

所以方程 (i) 和 (ii) 一般說来，并不是相当方程。

8.【定理三的应用】 現在根据定理三来举例說明解无理方程的方法。

試解方程 $3-x=\sqrt{x-3} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)},$

兩端自乘，得 $(3-x)^2=x-3,$

或 $(3-x)(3-x+1)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}.$

这 (ii) 式的根是 $x=3$ 和 $x=4$。

$x=3$ 这个根能証驗原式；但 $x=4$ 不能作这样的証驗。

$x=4$ 这个根却适合于另一方程

$$3-x=-\sqrt{x-3}.$$

这样說来，方程 $(3-x)^2=x-3$ 比原方程来得一般化些，那是因为它多有一組解。

二 一次方程

9.【一元一次方程的形式】 根据第一章定理一(第3节),凡是一元一次整方程,都可以归結到下面的形式:

$$ax+b=0,$$

或相当方程的形式

$$ax=-b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}.$$

a和b表示兩个已知数. 在沒有討論方程之前,讓我們先研究几个数字的例題.

[例1] 將下一方程化到(i)的形式:

$$\frac{x}{3}-\frac{1}{4}=\frac{x}{8}+\frac{1}{12},$$

并推論出它的解.

如果用式中分母的最小公倍数24去乘方程的兩端,我們得一相当方程

$$8x-6=3x+2.$$

并可使这个方程相当于下面的方程:

$$8x-3x=6+2,$$

或
$$5x=8.$$

原式被归到(i)式后,便可看出它容許一个解,而且只有一个解,因为它在說明x是被5乘而得到的积是8的一个数.

那便是 8 被 5 除的商数，

$$x=\frac{8}{5}=1.6.$$

［例 2］ 設有方程

$$(x-1)(x-2)=x^2.$$

展开运算之后，得

$$x^2-3x+2=x^2,$$

它相当于下面的一个一次方程：

$$-3x+2=0,$$

或

$$3x=2,$$

所以

$$x=\frac{2}{3}$$

就是方程式的解。

［例 3］ 設有方程

$$\frac{x}{2}-7-\frac{x}{5}=\frac{x}{4}-\frac{1}{5}+\frac{x}{20}.$$

兩端用 20 去乘，得一相当方程

$$10x-140-4x=5x-4+x.$$

如果我們把含有 x 的項都移到左端，已知項都移到右端，并且合并起来，就得到一个相当方程

$$0\cdot x=136.$$

这里很明显地表示出原方程是一个不可能的方程，因为沒有什么数和零相乘而积不是零的。

［例 4］ 設有无理方程

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=3.$$

首先使左端只留一个根式，便是把兩根項任移一項于右端，得相当方程

$$\sqrt{x-2}=3-\sqrt{x+1},$$

然后兩端各自乘，得

$$x-2=9-6\sqrt{x+1}+x+1.$$

又使$6\sqrt{x+1}$單独在一端，而兩端再自乘，得

$$x+1=4 \text{ 或 } x=3.$$

由前面这些例題，引出下节的一元一次方程的一般化的解法．

10．【一元一次方程的解法】 解一元一次方程，一般有下列的四个步驟：

(1) 如果是无理方程，先化为有理方程；如果是分式方程，首先消去分母．

(2) 把含有未知数的各項移到一端（习慣是左端），已知数的各項移到另一端（习慣是右端），这叫做**移項**．

(3) 归并左右兩端各項，使各成一項．

(4) 最后用未知数的系数除方程的兩端，所得的商数就是所求的方程的解，也就是根．

11．【二元一次方程】 形式象

$$ax+by=c$$

的方程，叫做**二元一次方程**，因为式中包含了兩个一次的未知数．

例如　　$5x+3y=12$ ……………………(i)，

把 $3y$ 移到右端，并用 5 遍除，得

$$x=\frac{12-3y}{5} \text{ …………………… (ii)}.$$

我們可以看出，如果給予 y 一連串的值，便能求得 x 一連

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com