苏联大百科全書选譯

数学·算术

高等教育出版社

数学·算术

*

赵孟养譯

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇号
（北京市書刊出版業营業許可証出字第〇五四号）

京华印書局印刷　新华書店总經售

開本 787×1092 1/32　印張 2 13/16　字数 30,00

一九五六年十二月北京第一版

一九五六年十二月北京第一次印刷

印数 00001—14,000　定價（7）¥0.26

統一書号17010·4

数　学

I. 数学对象的定义，跟其他科学及技术的关系

数学（在希腊文为 μαθηματικη，源出 μαθημα——知識，科学）是关于現实世界的数量关系和空間形狀的科学。

“純粹数学的对象是現实世界的空間形狀和数量关系，所以是一种非常实在的資料。这种資料以極度抽象的形式出現，这一事实只能够在表面上掩盖其来自外界的起源。但是要能够純粹地来研究这些形狀和关系，就必須把它們跟它們的內容完全分开，把后者当作無足輕重的东西撇在一边”（見恩格斯：“反杜林論”俄譯本 1953 年版第 37 頁*）。可是数学的抽象性并不意味它脫离物質的現实。不可分割地联系着技术和自然科学上的需要，数学所研究的数量关系和空間形狀的儲备不断地扩大起来，以致上述数学一般定义已含有越来越丰富的内容（关于这一点詳見下文，特別是第 III 部分近世数学）。

数学与其他科学　数学的应用是極其多种多样的。在原則上，数学方法的应用范圍并無限制：一切形态的物質运动，都可用数学方法来研究。但数学方法的作用和重要性在各种不同的情况下是各不相同的。任何确定的数学概型（схема）都無法穷究实际現象的一切具体性；所以認識具体事物的过程总是在兩种傾向的斗爭中进行的：一方面是要

*）這里可参看同書中譯本，人民出版社 1956 年版，第 37—38 頁。——譯者

突出所研究的現象的形式,并用邏輯方法加以分析;另一方面是要揭露出在已确立的形式中所不曾包容的因素并轉而考慮更灵活的、更全面地把現象概括起来的新形式。要是对于任何一类現象的研究，所有困难在于第二种傾向的实現，要是随着每一个新的探究步驟都得考慮到現象的某些性質上新异的方面,那末数学方法便退居次要地位;在这种情况下，对于現象的一切具体性的辯証分析只能因数学的概型化而弄得曖昧不明。反之，要是有比較簡單稳定的基本形式很准确和完备地概括了所研討的現象，而同时就在这些已确定的形式的范圍內發生了充分困难和复杂的問題,需要特殊的数学探究,尤其是为了这种問題的求解，需要創造特殊的符号記写法和特殊的算法(алгоритм)，那末我們就进入数学方法的統治范圍了。

完全受数学方法支配的典型例子是天体力学，特别是行星运动的学說。單是有着極簡單数学式的万有引力定律就几乎完全确定了这里所研究的現象界。除了月球运动的理論外，忽略天体的形狀和大小而代之以“質点”，在我們所能够达到的观察准确度內乃是合法的。但求解这里所發生的 n 个質点在引力作用下运动的問題，当 $n=3$ 时就有巨大的困难。另一方面，靠了已取定的現象概型的数学分析而求到的每一个結果，都以極大的准确度在現实中获得了应驗：邏輯上非常簡單的概型恰好反映了所选定的現象界,而一切困难在于从已取定的概型中得出数学的結論。

从力学轉到物理学去，数学方法的作用还沒有显著的减小，而其应用的困难却大大地增加了。几乎沒有一个物理学的領域不需要使用非常發达的数学工具，但是往往研究的基本困难不在于数学理論的發展，而在于怎样选擇供

数学处理的前提，怎样解释由数学方法得到的結果。在这样的意义上，近代量子物理学，縱然使用高深独特的数学工具，但跟經典物理学的某些部門（經典热力学、电学等）相比，只可在較小的程度上看作是数学方法所統治的园地。

以一些物理学理論作为例子，可以看到数学方法也能够把我們在認識現实时从一个阶段轉到下一个更高而性質全异的阶段的过程本身概括起来。

可以作为經典范例的，是宏观扩散理論和統計扩散理論之間的相互关系，前者假設扩散物質連續分布，而后者則从考虑扩散物質个别粒子的运动出發。在第一种理論中，扩散物質的密度滿足一个确定的偏微分方程。有关扩散的各种不同問題的研究就归結为在适当的边界条件和初値条件下求解这个微分方程。只就我們寻常（宏观）的空間与时間尺度来說，这种連續的扩散理論以極大的准确度表达了現象的实际进程。可是对于空間的很小部分（只包括为数不多的扩散物質的粒子），密度概念本身已失去确定的意义。統計扩散理論就起源于考虑扩散粒子在溶解物質分子的冲击作用下的微观、随机位移。我們并不知道这种微观位移的准确的数量上規律性。但是数学概率論（根据在很短时間內位移很小及在接連兩段时間內粒子位移各自独立的一般前提）使我們能够得出确定的数量上的結論，（近似地）确立在很長（宏观）时間內粒子位移的概率分布定律。因为扩散物質个别粒子的数目是非常巨大的，所以关于个别粒子位移的概率分布定律，在粒子位移各自独立的假定下，就引导出关于整个扩散物質位移的完全确定而不再随机的規律性，引导出連續理論所由建立的微分方程。所引述的例子在这一意义上是充分地典型的：就是借助于随机現象的統計，屡屡地在某一类規律性（在本例中是扩散物質个别粒子的运动定律）的基础上形成了性質全异的另一种規律性（在本例中是連續扩散理論的微分方程）。

在生物科学中数学方法起着更加从屬的作用。要是生物学現象的过程也得以用数学公式来描写的話，那末这些

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

公式所适用的范圍始終是極其有限的，而这些公式跟現象实在进程的相应始終是粗疎地近似的。这並不是因为生物学的現象在原則上不可能用数学来研究，而是因为这种現象在性質上是極其多种多样的。

在社会科学中，数学方法，要比在生物学中，在益發大的程度上，讓位給对現象的一切具体复杂性的直接分析。在这里把現象过程的形式加以抽象后，就有特别大的危險，会忽視性質上新异的而使整个过程有实質上不同趋向的各种因素的累积。出以一种輔助科学——数理統計学——的形态，数学对于各門社会科学（正如对于生物科学一样）仍然有重大的意义。但在社会現象的最終分析中，每一个历史阶段的性質上特征的因素具有那样左右一切的地位，以致数学方法就退居次要地位了。

数学与技术 在下面历史的概述中，我們將看到算术和初等几何学的萌芽都是在实踐的直接需要中产生的；在数理自然科学（天文学、力学、物理学等）的影响下則进一步形成了新的数学方法和思想，而这些科学本身的發展也倚靠了同样的实踐上需要。数学跟技术的直接关系多半有着这样的性質：就是先前已确立的数学理論后来被应用于技术上的問題。可是我們要举例說明，也有新的一般的数学理論是在技术直接需要的基础上兴起来的。最小二乘法的建立跟測地学的工作有关系；許多新类型偏微分方程的研究最初起源于技术問題的求解；微分方程的运算解法是在电工学等等的基础上發展起来的。在最近的时期，由于电工学的需要，兴起了概率論的一个新分支——訊息傳遞論（теория передачи информации）。把控制和計算裝置綜合起来的課題則促成代数学的一些新分支的發展。画法几何

学和列綫圖解主要是在技术需要的直接影响下产生的。对于微分方程近似解法的發展起了决定性作用的，除了天文学的需要外，还有技术的問題。偏微分方程和积分方程的許多近似解法完全是在技术的基础上建立起来的。随着技术問題的复杂化，怎样把数値解迅速而确实求出的課題也益發尖銳起来。可是向計算技术提出越来越多的要求的，还有理論的科学研究，甚至在自然科学的那样新的領域，如地球物理学中，也有这样的要求。因此数学問題数値解法的机械化就具有越来越大的意义。技术本身現在来帮助数学了。在最簡單的計算机、面积仪和积分仪之后，出現了諧波分析器，求解微分方程的积分机，求解綫性方程組的机器，以及其他求解各种各样数学問題的机器。每一种这样的机器可供求解各別严格地确定的一类問題之用，而且仅由于科学家有意識的工作才可能造出求解新类型課題的新机器。机器計算的技术正是科学研究上强有力的輔助工具。

II. 十九世紀以前的数学史略

把数学看作一門具有独特的对象和方法的特殊科学，只有在累积了充分多的实际資料之后才可能对于它的独立地位有明确的观念，而这样的观念最早就在公元前第六至第五世紀出現于古代的希腊。在此时之前的数学發展当然屬于数学萌芽时期，而公元前第六至第五世紀正是初等数学时期的开端。在这兩个最早的时期內，数学的研究几乎只牽涉到極有限的基本概念的儲备，这些概念还是在历史發展的很早阶段由于經济生活上的最簡單需要而發生的，

所謂最简單需要不外乎物件的計数，生产品数量及土地面积的测定，建筑物各别部分大小的确定，时間的测量，商業的計算等等。力学与物理学的初步發展都还可以由这些基本数学概念的儲备来滿足需要［希腊科学家阿基米得(Archimedes)(公元前第三世紀)的个别研究，已經需要雛形的無穷小演算，乃是例外］。在十七与十八世紀广泛展开自然現象的数学研究之前，在各門科学中唯有天文学曾長时期系統地对数学提出了特殊的而且極多的要求，例如三角学的初期發展就完全由天文学促成。数学在十七世紀初叶以前所涉及的种种概念，直到現在依旧構成中小学校里所教授的“初等数学”的基础。

在十七世紀中，自然科学和技术上的新的需要迫使数学家集中注意于創造方法，以便用数学来研究运动、量的变化过程及几何圖形（在射影等情况下）的变換。随着变量在法国科学家笛卡兒（R. Descartes）的解析几何学中的使用及微积分学的建立，开始了变量数学时期，这一时期也可以有条件地叫做“高等数学”时期。可是，当然，無論在这一时期或下一时期，初等数学并未終止其繼續發展。

由于数学所研究的数量关系和空間形狀繼續扩大范圍的結果，在十九世紀初叶就必須把数学研究对象的扩大过程有意識地来加以处理了；已經摆在面前的任务是要以充分普遍的观点对可能有的各式各样的数量关系和空間形狀进行有系統的研究。在这一方面的第一个重大进步就是俄罗斯数学家罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский)創造了“拟想的几何学”，这种几何学后来已經得到完全現实的应用。諸如此类的研究的开展在数学的結構中引进了那样重要的

新特征，以致十九和二十世紀的数学当然屬于一个特殊的近世数学时期。

1. 数学的萌芽

由于物件的計数，在文化發展的最早阶段就产生了最簡單的自然数算术概念。但是只在口头記数法已經發展完成的基础上才出現書写的記数法，并逐漸产生对自然数实施四則算术运算的方法（其中只有除法仍然長时期呈現很大的困难）。由于測量（谷物数目、路程長度等）的需要，更出現了最簡單分数的名称和記法并产生了对分数实施四則运算的方法。这样，資料累积起来，便逐漸形成了最古的一門数学科学——算术。面积和体积的測定，建筑技术上及稍后天文学上的需要，則引起了几何学的初步發展。这种过程在很大程度上曾独立地与平行地在許多民族中發生。对于科学的随后發展起了特殊作用的，是算术与几何知識在埃及和巴比倫的累积。在巴比倫，在已經發达的算术計算技巧的基础上也出現了代数学的萌芽，而由于天文学上的需要則出現了三角学的萌芽。

埃及 留傳至今的古埃及数学文献，多半是由各別問題解法的例子所組成，充其量也不过是求解的秘訣，这种秘訣有时候只在分析了原文中所列举的数字例子后才得以明了。正应該說是求解各别类型問題的秘訣，因为像一般定理的証明那样的数学理論显然是完全不存在的。关于这一点，例如，准确的解法被毫無区別地跟近似的解法一样使用，就是一个佐証。虽然如此，相应于当时的高度建筑技术，土地关系的繁复，正确历法的需要等等，已經确立的数学事实的儲备是相当巨大的。根据公元前第二千年前半期的紙草卷，那时候埃及数学的情况可以說有如下的特征。当时在埃及所使用的記数法，不难从这一个例子看出来：

$=2323$.

就在这样的記数法的基础上，埃及人克服了整数运算的一切困难，并且还建立了独特而相当复杂的、需要特殊輔助表的分数运算工具。系統地解决了的，是一些求索未知数的問題，这种問題，現在解起来，都可以写成一元方程。几何学則归結于一些計算面积和体积的法則。被正确地計算出来的，有三角形和梯形的面积，平行六面体和方底棱錐体的体积。就我們所知道的說，埃及人在这一方面的最大成就是發明了相当于公式

$$v=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$$

的平截头方底棱錐体体积的計算方法。圓面积以及圓柱体与圓錐体体积的計算法則，有时是对应于粗略的近似值 $\pi=3$ 来确定的，有时則对应于更准确的 $\pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2=3.16\cdots$ 来确定的。

巴比倫 使巴比倫数学的情况得以判明的数学文献，是無比地較埃及的为多。巴比倫的楔形字体数学文献包括从公元前第二千年〔汉摩拉比(Hammurabi)王朝与喀西特人的时代〕起直到希腊数学兴起和發展时为止的一段时期。但是这些文献中最早的一批已經屬于巴比倫数学的全盛期；随后的文献，虽然具有某些新的因素，整个地看来反而証实了巴比倫数学的停滞不进。在汉摩拉比王朝的时候巴比倫得到了还只从苏末人时期發展起来的十进与六十进混合記数法，其中已經含有定位的原理(就是在各个不同的六十进位上由同样的符号表示相同的單位数字)，例如:

$=34\cdot60+25=2065$·

类似地記写的，还有六十进位的分数。这使得整数和六十进分数的运算得以用同样的法則来完成。靠了倒数表的帮助，除法被化成了乘法。在較晚的文献中倒数的計算达到八位六十进的数字。除了倒数表外，还有乘法、平方、平方根与立方根的表。大量經济上的記录証明在宫廷和庙宇的复杂經济活动中所有这些工具都曾广泛地得到

使用。債务利息的淸算也有广泛的發展。更有汉摩拉比王朝的一連串文献，專事求解种种应用問題，这些問題由現代的观点看来可化成一次、二次，甚至于三次方程。有一种推测，認为这种比較抽象的科学兴趣，不限于实践中所直接必需的规程，而且促成了一般代数解題法的建立，是在培养学生做經济計算工作的"書記学校"中發生的。这一种文献稍后就匿迹不見了。另一方面，由于天文学上更精确方法在公元前第一千年的發展，多位数字的計算技术却繼續有發展。在天文学的基础上产生了最早由經驗得来的相倚关系的詳明表，其中可以看到函数概念的原型。巴比倫楔形字体的数学傳統在亚述、波斯帝国并且甚至在希腊化时期还繼續不衰，直到公元前第一世紀方止。巴比倫数学在几何学領域中的成就也有超出埃及人的知識范圍的，在这种成就中应当指出精心拟成的角的量度法以及某些跟天文学的發展显然有关联的三角学萌芽。畢达哥拉(Pythagoras)定理也是巴比倫人所早已知道的。

2. 初等数学时期

只有在大量累积了像算术計算上零星的方法、确定面积和体积的法則等等具体的資料后，数学才兴起而成为一門独立的科学，对于其所用方法的特殊性，对于其基本概念与命題在充分普遍形式中系統地加以發展的必要性，才有明确的了解。就算术和代数学而論，这种过程可能早已在巴比倫开始。但这种新的趋向，即数学科学的原則被系統地和邏輯一貫地树立起来，却是在古代希腊才完全确定的。古希腊人在兩千年前所創造的初等几何学的表述系統变成了数学理論的演繹結構的范例。从算术中，数論漸漸發長起来。又出現了关于量和測量的有系統学說。实数概念(随着量的測定問題)逐漸形成的过程，在后文可以看到，是非常長久的。問題在于無理数和負数的概念属于比較复杂

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

的数学抽象，这种抽象跟自然数、分数或几何圖形的概念不同，在前乎科学的人类經驗中是沒有充分牢固的支柱的。甚至在我們这时代，当这些数学概念的眞正內容和实际用处已經得到公認的时候，初学者加以接受仍不無困难，而且通常只是由于有系統的学校敎習的結果。無怪乎这些概念的形成需要人类很大的努力。

代数学，当作一种文字的計算看待，只在所考虑的二千年时期的末尾方才建立完成。希腊数学家丢番都(Diophantus)(大概第三世紀)曾有表示未知数的特别記号，第七世紀时在印度也曾更有系統地有同样的記号出現，但是直到十六世紀才由法国数学家維埃特(F. Viète)使用文字来表示方程的系数。

測地学和天文学的發展很早便促成了平面及球面三角学的周詳研究。

初等数学时期的告終(在西欧是在十七世紀初叶)，是在数学兴趣的重心轉移到变量数学方面去的时候。当然，这种轉变是有数学的先前發展預作准备的。早在古代世界的数学中，就已經在三角函数研究的資料中及編造三角函数表的时候形成了函数相倚性的观念。但是，举例来說，还只在十六世紀中才發生了(維埃特)关于由 0 变到 $+\infty$ 的角自变数以及这种自变数的三角函数的观念。希腊数学家(特别是阿基米得)已接近了無穷小解析的思想，但这种思潮当时不曾得到發展；对于这种思潮的兴趣，經过了英国数学家布拉华丁(T. Bradwardine)(十四世紀)和意大利数学家古桑的尼科劳(Nicolaus Casanus)(十五世紀)的模糊尝試之后，只在十六世紀末才[由法蘭德斯科学家斯得文(S. Stevin)]恢复起来。所以，在十七世紀以前的整个时期基本上

始終是初等数学时期。

所考虑的数学發展时期的开头(希腊、希腊化与罗馬的数学)还属于奴隶社会时代,这一时期的后半則已屬于封建社会时代(在中国、印度、中亞細亞、近东及西欧)。經过了蓬勃發展以后的希腊和希腊化数学,在奴隶制关系支配着一切的情况下越来越跟实际脫离,越来越受制于唯心主义哲学的狹隘傾向,就走向最后的衰落。在中世紀,东方各国有着巨大的水利建筑,世界貿易中心的發展,有增無已的对大規模測地工作的需要以及跟商賈密切相結合的官僚政治的較实际傾向,因此在那些国家里,数学的計算方面都获得特殊的發展。

在所考虑的时期的末尾,新的資本主义社会在封建制度内部开始萌芽的过程,影响了西欧数学發展的速度。在文艺复兴时期(十五至十六世紀),工程师、营造者、艺术家、軍人、航海者和地理学家对于数学的需要迅速地增長起来。同时,在大学校中也有了更自由科学批評和科学竞争的可能性,于是刺激了一些先前似乎無法索解的难題的解决以及理論的更大胆發展。

古希腊 数学在古代希腊發展的趋向是在本質上跟东方不同的。要是在計算的技术、代数性質的問題的解法以及天文学上数学方法的拟定等方面只在希腊化时期才达到并超过巴比倫数学的水准,那末在早得多的时候古希腊的数学就已經进入使用邏輯方法發展的簇新阶段了。那时候已經要求有明晰的数学証明,也已經作了系統地建立数学理論的最初尝試。数学,正像一切科学和艺术創作一样,不再是跟个人無关,不再是像在古代东方各国的那种样子;它已經是由現在知道名字、身后遺有数学著作(留傳至今的只是被后来的注釋家所保存的断簡殘篇)的一些数学家所創造的了。数学科学的这一質变是由于当时希腊各邦日益發达的社会政治及文化生活,

也正是这种生活促成了辯証法、論辯技术的高度發展，养成了跟反对者斗爭时堅持己見的習慣。跟宗教無关的哲学思想的产生則引起合理解釋自然現象的要求，因而在数学的面前提出了新的課題。

希腊人自己認为在算术的領域中是腓尼基人的学生，并解釋后者在算术上的高度發展是由于广闊的貿易上的需要；但希腊的几何学据傳說是从最早的希腊几何学家与哲学家米利都人泰理斯（Thales）（公元前第七世紀末至第六世紀前半）和薩摩斯人畢达哥拉（公元前第六世紀）在埃及的游历开始的。在畢达哥拉学派中，算术从簡單的計算技巧轉变为数論。一些最簡單的算术級数的和被求了出来［特別是 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$］，数的可除性与各种不同的（算术、几何及調和）平均数也得到了研究。数論中比較精致的問題（例如，完全数的求索）在畢达哥拉学派中都跟硬加在数字相互关系上的神秘玄妙的意义發生了联系。由于畢达哥拉的几何定理，則找到了一种方法以求索無限多的三个数一組的“畢达哥拉数”，即滿足关系式 $a^2+b^2=c^2$ 的三个整数。在几何学的領域中，公元前第六至第五世紀的希腊几何学家在吸收了埃及遺产后所研究的問題，自然也是从建筑技术、土地測量和航海术的最簡單要求中發生的。这样發生的，举例来說，有（“畢达哥拉定理”所表达的）直角三角形兩股与斜边長度之間的关系問題，相似形面积之間的关系問題，圓求方，三等分角及倍立方問題。但是处理这些問題的手段是嶄新的，隨着研究对象的复杂化，这种新的手段已是必需的了。不以近似的、得自經驗的解法为限，希腊几何学家探求了問題的准确証明和邏輯上詳尽無遺的解法。可以給这种新的趋向作为一个鮮明例子的，就是正方形对角綫跟其一边無公度性的証明。在公元前第五世紀的后半，希腊的哲学和科学生活集中在雅典，聚集在这里的有来自希腊世界各个角落的学者。就在这里，埃利斯人喜比阿（Hippias）和开奥斯人喜波克拉底（Hippocrates）进行着他們主要的活动。試以初等的方法求解三等分角問題，喜比阿大約在公元前420年借助于一种特殊的超越曲綫——割圓曲綫——而找到了这个問題的解法，后来狄諾斯特拉特（Dinostratus）（公元前第四世紀）还应用割圓曲綫解决了

圓求方的問題。最早的有系統的几何学教本据說就是喜波克拉底(在公元前第五世紀后半)所写的。到了这个时候無疑地早就創造出精心構成的几何系統,里边已經不忽略那样邏輯上的細节,如三角形相等的各种情形的証明等等。对物質構造加以合理解釋的最早企圖,虽則是純粹揣測的企圖,反映在数学中就是公元前五世紀时几何学上几乎最卓越的成就——找到了所有五个正多面体——这是寻求可以作为宇宙基石的最簡單理想物体的結果。在公元前第五与第四世紀之际,著名的唯物主义哲学家德謨克利特(Democritus)从原子观念出發創立了确定体积的方法,后来就成为阿基米得拟定無穷小方法的出發点。公元前第四世紀,在雅典政治反动和权力衰落的局面下,开始了数学在某种程度上被唯心主义哲学提出的限制所束縛的时期。关于数的科学在这里被严格地跟"計算术"分开来,而几何学也跟"測量术"分了家。以無公度的綫段、面积和体积的存在为根据,亞里斯多德(Aristotle)普遍地禁止了算术在几何学上的应用。在几何学本身則加上了用圓規与直尺作圖的严格限制;关于倍立方的所謂德洛斯人問題在这一时期已經找到了几种解法,但这些解法被宣布为逸出几何学的范圍,因为它要使用比較复杂的作圖工具。可以認为是公元前第四世紀数学家最重要的具体成就的,是奈达斯人欧多克斯(Eudoxus)(公元前第四世紀前半)跟邏輯地分析几何学基础的趋势有关系的研究,他精心拟成了比例的理論并給出了棱錐体体积定理的第一个証明(这定理,作为一件經驗的事实,是埃及人从公元前第二千年开始时起就已經知道了的,参見上文)。关于这一个証明,他陈述了構成穷举法基础的一般假定(常常叫做阿基米得公理)。在公元前第四世紀的数学主流之外,还应該提到塔倫特斯人阿基塔(Archytas)(公元前第五世紀后半至第四世紀前半)对力学所作的数学研究的开端。阿基塔是一位將軍,也是上述倍立方問題一种解法的作者。

希腊化与罗馬时期 从公元前第三世紀起的七百年时期中,科学研究、特别是数学研究的主要中心是亞历山大。在这里,有各种不同的世界文化的匯合,有巨大的国政和建筑上的問題,有空前广闊的

国家对于科学的奖励——在这样的环境下，希腊数学达到了它的極盛时期。虽然希腊的文化和科学兴趣傳播到整个希腊化与罗馬世界，但拥有“博物院”——照現代的意义說，就是最早的科学研究机关——和圖書館的亞历山大具有那样大的吸引力，以致当时最卓越的学者几乎全部聚集于此。在下面所說到的数学家中，只有阿基米得是始終忠实于自己的祖国叙拉古的。最紧張的数学創作是亞历山大时期最初一百年(即公元前第三世紀)所表現的特征。屬于这一世紀的，有欧几里得 (Euclid)，阿基米得，埃拉托色尼(Eratosthenes)和潘尔加的阿波罗尼 (Apollonius)。复杂的水力技术上的建筑(例如，阿基米得螺旋揚水器)，軍事技术的需要(阿基米得投擲机)，航海上的要求(阿基米得关于浮体平衡与稳定性的研究)，测地学与制圖学的發展(埃拉托色尼确定了地球的大小)，准确的天文测量与計算的完成[一年長度等于$365\frac{1}{4}$日的儒略 (Julius Caesar) 近似值]，以及最后，力学与光学的發展——这一切在数学面前提出了許多新的問题。公元前第三世紀正是跟这种种需要相应的数学的急速發展，广濶地同理論上思想的深入，富有成果地互相結合的世紀。特別是，因实际需要而产生的，对量的近似测定与近似計算的兴趣，并未使公元前第三世紀的数学家放弃数学的严格性。他們所作的許多近似开方，以及甚至天文計算，莫不准确地指出誤差的限度；成为这种近似計算的范式的，就是阿基米得在确定圓周長度时給予無可指摘的証明的著名不等式:

$$3\frac{10}{71}d<p<3\frac{1}{7}d,$$

其中 p 就是直徑为 d 的圓周的長度。这种明晰的理解，就是說，近似数学并不是“不严格”的数学，后来却曾長时期被遗忘。

欧几里得在他的“几何原本”中收集了前一时期几何学領域中的成就，并施以最后的邏輯方式的加工。同时就在这个“原本”中，欧几里得証明了素数的个数無穷性，并建立了可除性的完善理論，因而最先給有系統的数論奠定了基础。最后，在“原本”的第二、第六和第十卷中还含有独特地用几何表出的代数学，不仅使二次方程得以在几

何的形式中求解，并且使二次無理式的复杂变換也得以在几何的形式中实施。就以同样的“几何代数学”方式，阿基米得構成了他的关于算术級数各項平方和的定理。在未收入“原本”的歐几里得的几何作品中以及在潘尔加人阿波罗尼的著作中，对于数学的进一步發展有最重大意义的，是完善的圓錐曲綫論的建立。阿基米得对于几何学的主要功績則在于确定了各种各样的面积和体积（包括拋物綫弓形和球面的面积，球、球截体、拋物面截体的体积等）以及重心（例如，球截体与拋物面截体的）；阿基米得螺綫只是公元前第三世紀所研究的超越曲綫的一个例子。在阿基米得之后，虽然科学知識的范圍繼續扩大，但亞历山大的科学已經赶不上先前的严整性和深度了。在天文学上所表現的，虽然观察的精密度有增無已而数学的工具也日益进步，但前代最优秀学者所已經完全領会了的思想，即薩摩斯人亞里大各（Aristarchus）（公元前第四世紀末至第三世紀前半）关于地球繞日运动以及地球到恒星距离的思想，却遭到了摒弃。在数学上，阿基米得啓發性方法中所包含的無穷小解析的萌芽（見他的專著“方法篇”，里边指出了这种方法的不严格性；他認为在最后的表述中必須代之以穷举法）也不曾得到进一步的發展。

古代世界全部数学的主要缺点在于还沒有最后形成了的無理数概念。前面已經指出，这种情况使公元前第四世紀的哲学完全否認应用算术于几何学研究的合法性。实际上，在比例理論和穷举法中公元前第四与第三世紀的数学家还是得以間接地实現了算术在几何学上的这种应用。随后的几世紀幷不曾借助于（無理数）基本新概念的建立而获得問題的积極解决，而是問題的被逐漸遺忘，这是随着数学严格性观念的逐漸丧失而成为可能的。然而在数学史的这一阶段，数学严格性的暫时放弃倒是有益的，因为这样一来，就开辟了代数学無阻碍地發展的可能性，而先前在欧几里得“原本”的严格观念的范圍內只容許形式極不方便的关于綫段，面积与体积的“几何代数学”。

这一方面的一些重要成就，可以在海倫（Heron）（大約公元第一世紀）的“度量篇”中看到。海倫尤以其測地学著作馳名，正是这些著

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com