吴孟达 李志祥 宋松和 编著

# 数学分析

下册

国防科技大学出版社

# 数学分析

## （下 册）

吴孟达 李志祥 宋松和 编著

国防科技大学出版社
·长沙·

## 内容简介

本书按"理工结合培养模式"要求而编写,注意引导学生用直观想象、类比、归纳及分析等常用的数学思维方法,理解和解决数学分析及其应用中的问题。主要内容:上册共九章讲述一元微积分,下册讲述多元微积分、级数论和常微分方程。本书可供高等院校数学专业、应用数学专业和对数学要求较高的工科专业作教材或参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

数学分析/吴孟达,李志祥,宋松和编著.—长沙:国防科技大学出版社,2003.8

ISBN 7-81024-899-5

Ⅰ.数… Ⅱ.吴… Ⅲ.李 Ⅳ.数学分析-本科生-教材

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 075859 号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640 邮政编码:410073
E-mail: gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑:肖滨 罗青 责任校对:罗青 肖滨
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装

*

开本:787×960 1/16 印张:24 字数:444 千
2003 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1-3000 册

*

**上下册全套定价:46.00 元**

# 前　言

本书是作者按“理工结合培养模式”要求而编写的。作者认为，无论是就数学、物理、力学等理科学科或是就应用光学、电子工程、计算机工程、机电工程、自动控制、航空航天等理论性较强的工程学科而言，高素质科技人才的标志是：他们不仅掌握基本的数学知识，而且能够理解数学家们在创造数学理论的过程中所体现出的思想、观点和方法。后者不仅是发展数学理论所需要的，而且也是应用现有的数学理论、学习新的数学理论所必备的。数学思维方法的传授，应该是数学教学的主要目标。

本书分为上、下册。上册的前八章包括了一元微积分的主要内容，其中的极限部分主要用几何直观的方法进行介绍，而在不定积分的计算部分增加了求解常微分方程的变量分离法，对定积分的概念和应用的介绍则强调了微元法的思想，这样的处理与物理课程能较好地衔接，而且也适合大学新生的特点。这一部分内容大约需要 80 学时。在学生学习了如何对数学概念和理论进行直观想象和应用以后，第九章将引导他们将这种思想转化为严谨的数学语言。这一章将需要 30 学时。

下册包括多元微积分、级数论以及常微分方程三个部分，其中多元微积分部分使用了少量线性代数的知识来处理向量值函数，故不仅节省了课时、突出所研究的问题的本质，而且为讲授“类比法、归纳法”等基本数学思维方法提供了材料，对学生熟悉代数理论以及进一步学习泛函分析则更有好处。本书含有一些涉及微分方程的内容，教师可根据不同的教学计划进行取舍。下册的全部内容共需要 130 学时。

如果将涉及微分方程的内容全部剔除，则本书的讲授学时约为 220 学时。

本书(及其所配备的 Powerpoint 课件)可以作为高等院校数学专业数学分析课程的教材，也可供对数学理论要求较高的工科专业选用。

作者

2002 年 8 月

于国防科技大学

# 目　录

# 第十章　多元函数的极限与连续性

到目前为止，我们所研究的函数基本上都是一元实函数．换言之，我们所考虑的是由一个因素所确定的事物．然而在现实世界中，除了非常简单的情形以外，可用一个自变量和一个因变量来描述的事物是很少的．例如，研究自然现象往往不能脱离时间和空间：描述空间质点的运动至少需要一个自变量（时间）和三个因变量（空间坐标）；描述空间静力场中质点的受力情况则需要三个自变量（空间坐标）和三个因变量（所受的力在各坐标轴上的分量）．更不用说在化学、生物以及社会科学等领域内出现的更复杂的情况了．这种多自变量和多因变量之间的依赖关系，反映到数学上就是多元函数（或多元向量值函数）．

从本章开始，我们研究多元（向量值）函数．多元函数的分析性质无非也是极限理论、连续性、可微性、可导性以及可积性等，多元函数的这些性质与一元实函数的相应性质比较起来，既有相似性，又有较大区别．希望读者在学习这一部分内容时，注意分析相关的概念、理论以及处理方法的本质上的异同，举一反三，收到事半功倍的效果．

为了简化叙述，从这一章开始，我们使用一些数学中的常用符号．例如，用符号"$\forall$"代表"对任意"；用"$\Leftrightarrow$"代表"等价于"；而"$\exists$"代表"存在"；"$\Rightarrow$"代表"意味着"等．除希望读者正确理解它们的内涵以外，我们还希望读者仍然用自己的语言去理解和记忆有关结论．

## §10.1　$n$ 维向量空间上的基本定理

在本节，我们首先建立 $n$ 维向量空间中的极限理论，然后再将实数集合中的一些收敛原理推广到 $n$ 维向量空间中来．

记 $\boldsymbol{R}$ 为实数全体．以 $\boldsymbol{R}^n$ 表示下列由有序数组构成的集合：

$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), x_1, x_2, \cdots, x_n \in \boldsymbol{R}\}.$$

我们称 $\boldsymbol{R}^n$ 为 $n$ 维向量空间，这个集合中的一个元素 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为一个（$n$ 元）点或一个（$n$ 维）向量（在本书中，全部用黑体表示一个向量或一个矩阵），称 $x_k$ 为该向量的第 $k$ 个分量（$k = 1, 2, \cdots, n$）．在涉及到向量与矩阵的乘法时，我们把向量当成列向量；而在其他场合，则不区分行向量与列向量．

若两个向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$、$(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)$的分量对应相等:$x_k=\tilde{x}_k(k=1,2,\cdots,n)$则称两个向量相等;两个向量的和定义为它们对应分量之和构成的向量:

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)=(x_1+\tilde{x}_1,x_2+\tilde{x}_2,\cdots,x_n+\tilde{x}_n);$$

一个向量与一个实数的乘积定义为该实数与各分量之积构成的向量:

$$k\cdot(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n).$$

有时,集合$\boldsymbol{R}^n$也记为"**乘积集合**"的形式:$\boldsymbol{R}^n=\underbrace{R\times R\times\cdots\times R}_{n个}$,它表示了$\boldsymbol{R}^n$中元素的特点.

回顾实数集合上的极限理论的建立过程,可以看出:实轴上的距离(绝对值)的概念起了基础的作用.这种距离可以用来描述实轴上两点接近的程度,同时它还可用来描述相应的函数值接近的程度.由于多元函数的自变量与函数值都可以看成某个高维向量空间中的点,因此我们需要在一般的$n$维向量空间中定义点与点之间的"距离"的概念.

$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$,记$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$、$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,定义$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$的**欧氏范数**

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$$

为$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$之间的距离.

**命题 10.1.1** $\boldsymbol{R}^n$中的两点$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$之间的距离$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$具有下列性质:

(1) $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\geqslant 0$,而且$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$; (正定性)

(2) $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$; (对称性)

(3) $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|+\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|$; (三角不等式)

(4) $\forall\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$以及$\forall\,k\in R$, $\|k\cdot\boldsymbol{x}\|=|k|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$. (绝对齐次性)

除性质(3)以外,这个命题中的其他结果都是明显的.利用习题3.1之习题5(2)(或本书第十二章的例12.4.4)中的Hölder不等式,读者可以证明上述性质(3).这个命题说明,这里所定义的**距离**具有我们所熟悉的绝对值的那些性质.也就是说,我们在进行类似于以前的不等式估计时,可以把那里的估计技巧搬到这里来用.

有了距离以后,就可以引入**邻域**、**收敛**以及**开集**、**闭集**、**有界**等概念.这里,邻域的概念具有决定性作用.

**定义 10.1.1**　设 $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$，$\delta > 0$，称点集 $O(\boldsymbol{a},\delta) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta\}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的 $\delta$ - 邻域.

**注 10.1.1**　容易看出，这里定义一个（$n$ 元）点的 $\delta$ - 邻域的方式，与第一章中定义数轴上一个点的 $\delta$ - 邻域的方式是类似的，它们的差别仅在于距离的定义不同. 对 $n = 1$ 的情形，$O(\boldsymbol{a},\delta)$ 是一个开区间；$n = 2$ 时，$O(\boldsymbol{a},\delta)$ 是一个开圆盘；$n = 3$ 时，$O(\boldsymbol{a},\delta)$ 是一个开球. 由此知，如果记集合 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \leqslant r\}$ 为 $S(\boldsymbol{a},r)$，则 $S(\boldsymbol{a},r)$ 就应该叫做“**以 $\boldsymbol{a}$ 为中心、$r$ 为半径的闭球**”.

**定义 10.1.2**　设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点列，$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$ 是一个定点. 若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N^+$（$N^+$ 表示自然数集），使得

$$k > N \Rightarrow \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon (\text{即 } \boldsymbol{x}_k \in O(\boldsymbol{a},\varepsilon)),$$

则称点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$，记为 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$，或 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}(k \to \infty)$. 此时，称 $\boldsymbol{a}$ 为点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的极限. 如果一个点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 不收敛，则称其发散.

对应于实数轴上区间的内部、外部及端点，我们定义 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点集的相应概念：

**定义 10.1.3**　设 $S$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点集，若点 $\boldsymbol{x}$ 满足：$\exists \varepsilon > 0$ 使得 $O(\boldsymbol{x},\varepsilon) \subset S$，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 $S$ 的内点；而若点 $\boldsymbol{x}$ 满足：$\exists \varepsilon > 0$ 使得 $O(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ 与 $S$ 的交集为空集，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 $S$ 的外点. $\forall \delta > 0$，$O(x,\delta)$ 内既有 $S$ 的外点，又有 $S$ 中的点，则称 $x$ 为 $S$ 的边界点.

$S$ 的所有内点组成的集合称为 $S$ 的内部，$S$ 的所有外点组成的集合称为 $S$ 的外部，$S$ 的所有边界点组成的集合称为 $S$ 的边界，$S$ 与 $S$ 的边界的并集称为 $S$ 的闭包，$S$ 的内部、外部、边界及闭包分别记为 $S^o$、$S^e$、$\partial S$ 及 $\bar{S}$.

利用距离的概念容易证明下列命题：

**命题 10.1.2**　设 $S$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点集，则

(1) 点 $\boldsymbol{x} \in \partial S \Leftrightarrow \exists S$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 及 $S$ 的外点列 $\{\tilde{\boldsymbol{x}}_k\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x},\ \lim_{k\to\infty}\tilde{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{x}.$$

(2) 点 $\boldsymbol{x} \in \bar{S} \Leftrightarrow \exists$ 点列 $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset S$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$. 因此，$\bar{S}$ 也可以定义为 $S$ 的“极限点”构成的集合.

**注 10.1.2**　容易看出，这里对 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点列收敛性的定义方式和对实轴上

**的点列收敛性的定义方式类似，它们的差别也仅仅在于距离的定义不同．对有界、聚点、开集、闭集**等概念的定义也是一样的．以下，我们省略了这些平行的定义的叙述．建议读者用类比的方法，根据关于实数集的对应概念写出这些定义．

下列定理给出了 $\boldsymbol{R}^n$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的收敛性与诸 $\boldsymbol{x}_k$ 的 $n$ 个分量组成的 $n$ 个数列的收敛性之间的关系．利用这个定理，我们可以将第九章中的大多数结果推广到 $\boldsymbol{R}^n$ 中来．当然，关于商的极限、乘积的极限的结果，以及涉及保序性的，如保号性、比较性、确界原理、上下极限、单调有界原理等结果不能直接推广过来了，因为在二维以上的空间中，两个点之间不具有大小关系．

**定理 10.1.1** 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个点列，$\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \boldsymbol{R}^n$ 是一个定点．记 $\boldsymbol{x}_k = (x_1^k, \cdots, x_n^k)(k = 1,2,\cdots,n)$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}x_j^k = a_j(j = 1,2,\cdots,n)$．

**证明** 由定义知，$\forall j = 1,2,\cdots,n$，成立 $|x_j^k - a_j| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{j=1}^n (x_j^k - a_j)^2} = \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\|$，以及 $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| \leqslant \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{\sqrt{n}\,|x_j^k - a_j|\}$．

必要性．设 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = a$，则由收敛性的定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N^+$，使 $k > N \Rightarrow \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$．因此，$\forall j = 1,2,\cdots,n$，$k > N \Rightarrow |x_j^k - a_j| \leqslant \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$．即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_j^k = a_j(j = 1,2,\cdots,n)$．

充分性．设 $\forall j = 1,2,\cdots,n$，有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_j^k = a_j$．于是，由数列的收敛性定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N^+$，使 $k > N \Rightarrow |x_j^k - a_j| < \varepsilon/\sqrt{n}(j = 1,2,\cdots,n)$．因此，$k > N \Rightarrow \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^n (x_j^k - a_j)^2} < \varepsilon$．证毕．

以下，我们讨论向量空间中的相互等价的几个收敛原理：**列紧性定理、聚点原理、Cauchy 收敛原理、有限覆盖定理以及闭球套定理**．

**定理 10.1.2** 设 $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset \boldsymbol{R}^n$ 是一个有界点列，则 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 至少有一个收敛子列．

**证明** 记 $\boldsymbol{x}_k = (x_1{}^k, \cdots, x_n{}^k)(k = 1,2,\cdots)$．为简化记号，我们考虑 $n = 2$ 的情形．设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 有界，即 $\exists M > 0$，使得 $\|\boldsymbol{x}_k\| \leqslant M$，$\forall k = 1,2,\cdots$．从而 $\{x_1{}^k\}_{k=1}^\infty$ 和 $\{x_2{}^k\}_{k=1}^\infty$ 是有界数列．因此，由有界数列的列紧性，可在 $\{x_1{}^k\}_{k=1}^\infty$ 中取到收敛子列，记为 $\{x_1{}^{k_m}\}_{m=1}^\infty$，并设它收敛于 $x_1^0$．

又因为$\{x_2^{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$是有界数列$\{x_2^{k}\}_{m=1}^{\infty}$的子列，因此可从$\{x_2^{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$中选出收敛于某个$x_1^0$的子列，记为$\{x_2^{k_{m_j}}\}_{m=1}^{\infty}$. 这里，$\{x_2^{k_{m_j}}\}_{m=1}^{\infty}$是$\{x_2^{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$的子列，故上标序列$\{k_{m_j}\}$满足$k_{m_1} < k_{m_2} < \cdots$，且是$\{k_m\}$的子列. 因此，$\{x_1^{k_{m_j}}\}_{m=1}^{\infty}$是前段选出的收敛数列$\{x_1^{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$的子列. 总之，$\{x_1^{k_{m_j}}\}_{m=1}^{\infty}$、$\{x_2^{k_{m_j}}\}_{m=1}^{\infty}$分别收敛于$x_1^0$、$x_2^0$. 再由定理 10.1.1 可知$\{\boldsymbol{x}_k\}$的子列$\{x_{k_{m_j}}\}$收敛于$\boldsymbol{a} = (x_1^0, x_2^0)$. 证毕.

**定理 10.1.3**　设$E \subset \boldsymbol{R}^n$是一个有界无穷点集，则$E$至少有一个聚点.

**证明**　在$E$中任取一个完全由相异点组成的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$，则由定理 10.1.2，可知存在$\{\boldsymbol{x}_k\}$的一个子列$\{\boldsymbol{x}_{k_m}\}$收敛于某个$\boldsymbol{a}$. 这样一来，在$\boldsymbol{a}$的任何一个给定邻域$O(\boldsymbol{a}, \varepsilon)$内，就有点集$E$的无穷多个相异点，从而$\boldsymbol{a}$是$E$的一个聚点. 证毕.

**定理 10.1.4**　设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\boldsymbol{R}^n$中的点列，则$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛的充要条件是：$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$R^n$中的 Cauchy 序列.

**分析**　记$\boldsymbol{x}_k = (x_1^k, \cdots, x_n^k)(k = 1, 2, \cdots)$，则由 Cauchy 序列的定义知，$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\boldsymbol{R}^n$中的 Cauchy 序列$\Leftrightarrow \forall j = 1, 2, \cdots, n$，$\{x_j^k\}_{k=1}^{\infty}$是 Cauchy 数列. 再由 Cauchy 收敛原理以及定理 10.1.1，便可得本定理的结论.

从上述定理的分析及证明来看，以定理 10.1.1 作为桥梁并利用实数理论中的相应结果，是处理向量空间中的收敛问题的主要方法. 另外，在处理这类问题时，我们总可以把“点”想象为平面或三维空间中的点，借助几何直观获得思路.

下面两个结论的分析及证明均留给读者.

**定理 10.1.5**　设$E \subset \boldsymbol{R}^n$是一个有界闭集，而$\{E_\lambda\}$是$E$的一个开覆盖，则存在有限多个$E_\lambda$，例如$E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \cdots, E_{\lambda_n}$，构成$E$的有限覆盖，即：$E \subset E_{\lambda_1} \cup E_{\lambda_2} \cup \cdots \cup E_{\lambda_n}$.

**定理 10.1.6**　设$E_n(n = 1, 2, 3, \cdots)$是一串逐个包含的闭球，即对任意自然数$n$，都有

$$E_{n+1} \subseteq E_n, (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

又设当$n \to \infty$时，$E_n$的直径$r_n \to 0$，则必存在唯一的一点$c$，使得$c$属于所有这些闭球，即$c \in E_n, (n = 1, 2, 3, \cdots)$.

## 习 题 10.1

1. 试对 $n=2$ 的情形证明命题10.1.1：距离 $\|\cdot\|$ 满足正定性、对称性和三角不等式.

2. 证明：若 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛，则其极限是唯一的.

3. 设 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 和 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ 收敛，证明对于任何实数 $\alpha,\beta$，下列等式成立：

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha\boldsymbol{x}_k+\beta\boldsymbol{y}_k)=\alpha\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k+\beta\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k.$$

4. 求下列 $\boldsymbol{R}^2$ 中子集的**内部**：

(1) $S=\{(x,y)\mid x>0,y\neq 0\}$;

(2) $S=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$;

(3) $S=\left\{(x,y)\mid 0<x\leqslant 1,y=\sin\dfrac{1}{x}\right\}$.

5. 求下列点集的全部聚点：

(1) $S=\left\{\left(\cos\dfrac{2k\pi}{5},\sin\dfrac{2k\pi}{5}\right)\middle| k=1,2,\cdots\right\}$;

(2) $S=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)(y^2-x^2+1)\leqslant 0\}$.

6. 试证明：$\boldsymbol{a}$ 是 $S$ 的聚点 $\Leftrightarrow\exists$ 点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}\subset S$ 满足：$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 由相异点所组成，而且 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$.

7. 设 $S$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 上的开集，是否 $S$ 中的每个点都是 $S$ 的聚点？对于 $\boldsymbol{R}^2$ 上的闭集又如何呢？

8. 设 $S$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集. 试证明 $S$ 的内部、外部是开集，而 $S$ 的边界是闭集.

9. 试证明定理 10.1.6.

## §10.2 多元函数的极限与连续性

在第一章中，我们已经仿照一元实函数的概念定义过***多元实函数***：设有两个变量 $\boldsymbol{x}$ 与 $y$，变量 $\boldsymbol{x}$ 的变域 $D$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个子集，$y$ 的变域为实数集. 如果对于 $D$ 中任意一点 $\boldsymbol{x}$，按照某个对应法则 $f$，都可以唯一地确定 $y$ 的对应数值，则称对应法则 $f$ 是一个($n$ 元) 实函数. 然而，正如我们在本章开始时所介绍过的那样，这种定义并不能包含我们所感兴趣的许多情形. 在实际问题(因而在理论研究)

中，我们往往需要处理"函数值"是向量的情况.

为此，我们首先仿照一元实函数的概念给出多元向量值函数的定义：

**定义 10.2.1** 设有两个变量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x} \in D \subset \boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m$. 如果对于 $D$ 中任意一点 $\boldsymbol{x}$，按照某个对应法则 $\boldsymbol{f}$，都可以唯一地确定 $\boldsymbol{y}$ 的对应值，则称对应法则 $\boldsymbol{f}$ 是一个 ***n* 元 *m* 维向量值函数**(或**多元函数组**).

如果变量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间有这种对应关系，则记 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，并称 $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的函数(因变量)，称 $\boldsymbol{x}$ 为自变量，称 $D$ 为函数 $\boldsymbol{f}$ 的定义域，而集合 $\{\boldsymbol{y} \mid \exists\, \boldsymbol{x} \in D$, 使得 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\}$ 则称为函数 $\boldsymbol{f}$ 的值域. 函数 $\boldsymbol{f}$ 也可记成 $\boldsymbol{f}: D \subset \boldsymbol{R}^n \mapsto \boldsymbol{R}^m$.

**例 10.2.1** 设一质点在下坠的过程中受到垂直方向的重力、水平方向的均匀风力及空气阻力的综合作用，试求该质点的运动方程(记所考虑的时间段为 $t \in [0, T]$).

**解** 在各种因素的综合作用下，该质点在垂直方向上作匀加速直线运动，在水平方向上作匀速直线运动. 因此，以地面上某定点作为原点、$z$ 轴垂直向上建立直角坐标系，并设质点的初始坐标为 $(x_0, y_0, z_0)$，则质点的运动方程为：

$$x = x_0 + v_1 t, \quad y = y_0 + v_2 t, \quad z = z_0 - \frac{1}{2}at^2, \quad t \in [0, T],$$

其中，$v_1, v_2$ 分别是质点沿 $x$ 轴方向、$y$ 轴方向的速度，而 $a$ 是垂直加速度，它们都是常数. 这样我们就得到了一个一元三维向量值函数，因为任意给定一个 $t \in [0, T]$，都可以根据上述对应法则确定唯一的一个向量 $\boldsymbol{f}(t)$：

$$\boldsymbol{f}(t) = \left(x_0 + v_1 t, y_0 + v_2 t, z_0 - \frac{1}{2}at^2\right), t \in [0, T],$$

实际问题便归结为研究这个向量函数随 $t$ 变化的情况. 如果有必要对质点的运动考虑得更加细致一些，比方说，风力的大小和方向、下坠时的空气阻力都依高度 $h$ 而变化，则相应的质点运动方程的形式应为

$$x = x_0 + s_1(h, t),\ y = y_0 + s_1(h, t), z = z_0 - u(h, t),$$
$$t \in [0, T], h \in [0, z_0].$$

此时，质点的每个坐标就是一个二元实函数；而上述 $\boldsymbol{f}$ 也就是一个二元三维向量值函数：

$$\boldsymbol{f}(h, t) = (x_0 + s_1(h, t), y_0 + s_2(h, t), z_0 - u(h, t)),$$
$$t \in [0, T], h \in [0, z_0].$$

这个例子说明，虽然多元向量值函数的定义是比照一元实函数给出的，但多

元向量值函数并不是“数学家的游戏”.如同一元实函数那样,它也是对客观世界的一种抽象.

从这个例子还可看出,所谓一元向量值函数只不过是几个一元实函数放到一起而已,它的研究基础是一元实函数.例如,它的极限、连续、微分、积分可分别定义为各分量函数极限、连续、微分、积分,从而它的研究可以模仿一元实函数的相应研究来进行.所谓多元向量值函数则不过是几个多元实函数放到一起,因此它的研究基础是多元实函数.多元实函数的研究当然是一个新课题,然而,今后读者可以发现,多元向量值函数的研究并不比多元实函数的研究更困难.在利用了矩阵及向量的运算法则以后,多元向量值函数的研究以及相应结果的表达会变得非常简洁;在某种意义上,它们是通过对一元实函数理论中所用方法以及相关结果作类比而得到的. 在使用类比法考虑问题时,我们应该特别注意:**在新的背景下,原来的结论可供借鉴,但所有结论都需要仔细考察、重新证明**.例如,读者可验证:对下列简单的一元向量值函数 $f(t)$,微分中值定理是不成立的

$$f(t)=(\sin t,\cos t),\ t\in[0,2\pi].$$

**注 10.2.1** 在有些教材中,为了凸显 $n$ 元 $m$ 维向量值函数与一元实函数、多元实函数的差别,把 $n$ 元 $m$ 维向量值函数称为**多元函数组**、**映射**(实际上,**映射**这个名词的含义又比上述定义中所表达的要广泛得多).

我们还注意到:当 $n=1,m=1$ 时,$n$ 元 $m$ 维向量值函数就是一元实函数;当 $n\geqslant 2,m=1$ 时,$n$ 元 $m$ 维向量值函数就是第一章所定义的多元实函数.因此,在不需要特别指明定义域或值域所在的空间时,我们就把 $n$ 元 $m$ 维向量值函数简称为多元函数.

**注 10.2.2** 在定义 10.2.1 中,若记 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_m)$,$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$,则每个 $y_k$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 的函数,即 $y_k=f_k(\boldsymbol{x})(k=1,2,\cdots,m)$.因此,定义 10.2.1 中所定义的多元函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 又可写成分量形式:

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \cdots\cdots \\ y_m=f_m(x_1,\cdots,x_n) \end{cases} \qquad (x_1,\cdots,x_n)\in D.$$

而函数 $\boldsymbol{f}$ 也可表示为分量形式:$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$.

**注 10.2.3** 正如常数可以被看成一元实函数一样,一元实函数也可看成多元实函数.例如,根据定义 10.2.1,$f(x,y)=\sin x$,$g(x,y)=y^2$ 等都可看成定义

在 $\boldsymbol{R}^2$ 上的实函数.

**例 10.2.2**　设 $D=\{u\in \boldsymbol{R}^2 \mid u=(u_1,u_2),u_1,u_2\in R,0<u_1^2+u_2^2\leqslant 1\}$，且函数 $\boldsymbol{f}:D\mapsto \boldsymbol{R}^3$ 的分量形式是

$$x=s,\quad y=t,\quad z=\sqrt{1-s^2-t^2},\quad (s,t)\in D.$$

则 $\boldsymbol{f}$ 的定义域是平面上不包含原点的单位圆盘，$\boldsymbol{f}$ 的值域则含于三维空间中，值域的几何图形是球心在原点、挖去了顶点的单位上半球面.

**例 10.2.3**　设 $D=\{(\theta,\varphi)\in \boldsymbol{R}^2 \mid \theta\in[0,2\pi],\varphi\in[0,\frac{\pi}{4})\cup(\frac{\pi}{4},\pi]\}$，且函数 $\boldsymbol{f}:D\mapsto \boldsymbol{R}^3$ 的分量形式是

$$x=\cos\theta\sin\varphi,\quad y=\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\cos\varphi,\quad (\theta,\varphi)\in D.$$

例 10.2.2 中的函数在本质上是一个二元一维函数 $z=\sqrt{1-s^2-t^2}$，$(s,t)\in D$. 但这里的函数则是新的，它的值域的几何图形是被割了一条缝的单位球面. 另外，这里的函数 $\boldsymbol{f}$ 的定义域通常写成**乘积集合**的形式 $D=[0,2\pi]\times\left([0,\frac{\pi}{4})\cup(\frac{\pi}{4},\pi]\right)$.

**例 10.2.4**　设函数 $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}\mapsto \boldsymbol{R}^3$ 的分量形式是

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t,\quad t\in \boldsymbol{R},$$

则函数 $\boldsymbol{f}$ 是一个一元 $n$ 维函数，通常简称为向量值函数. 它表示了一条空间曲线，称为螺旋线.

仿照一元实函数的情形，我们引进多元函数的极限概念.

**定义 10.2.2**　设集合 $D\subset \boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{x}_0$ 是 $D$ 的一个聚点，$\boldsymbol{f}:D\subset \boldsymbol{R}^n\mapsto \boldsymbol{R}^m$，又 $\boldsymbol{A}$ 是一固定的向量. 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 以及 $\boldsymbol{x}\in D\Rightarrow\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\|<\varepsilon$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时的（**$n$ 重）极限**，并称当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 收敛于 $\boldsymbol{A}$，记为 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$，或 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0)$. 如果将上述 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0$ 及 $\boldsymbol{A}$ 的分量写出来，则（$n$ 重）极限 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$ 也可写成

$$\lim_{x_1\to x_1^0,\cdots,x_n\to x_n^0}\boldsymbol{f}(x_1,\cdots,x_n)=(a_1,\cdots,a_n).$$

**注 10.2.4**　由定理 10.1.1 所述结论，上述定义中的“$0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta$”

也可换为“$0 \leqslant |x_1 - x_1^0| < \delta, \cdots, 0 \leqslant |x_n - x_n^0| < \delta$”(其中至少有一个式子严格大于0),且函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$当$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x}_0$时的($n$重)极限存在等价于$\boldsymbol{f}$的各分量函数的相应的($n$重)极限存在.由此可知,一元函数极限的和差性质、数乘性质、内积性质对多元函数同样成立.另外,严格说来,因为$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$所在的空间可能不同:$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$,而$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}^m$,故上述定义中关于$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的距离的记号也应该有所区别.为简便起见,我们这里采用了同样记号.

**例 10.2.5** 设$f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{y}{x^2+y^2}$,证明$\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} f(x,y) = 0$.

**证明** $\forall \varepsilon > 0$,取$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$,则$0 < |x| < \delta, 0 < |y| < \delta \Rightarrow$

$$|f(x,y) - 0| \leqslant \left|(x+y)\sin\frac{y}{x^2+y^2}\right| \leqslant |x| + |y|$$
$$\leqslant 2\delta = \varepsilon.$$

这就证明了结论成立.证毕.

从形式上看,定义10.2.2与一元函数的极限概念毫无差别.除了上述利用极限定义以及不等式估计技巧的方法来证明函数极限的存在性以外,我们还可以利用§10.2给出的收敛原理证明多元一维函数极限的四则运算法则、多元向量值函数的线性运算法则,以及Heine归结原理、Cauchy收敛准则等等.

**例 10.2.6** 设$f(x,y) = \dfrac{\sin y + x^2 e^y}{x\sin(x^2+y^2)}$.根据注10.2.3的说明,$\sin y, x^2, e^y, x, y^2$都是二元实函数.又由后面的命题10.2.1至命题10.2.3,$f(x,y)$的分子和分母都是二元连续实函数,从而$f(x,y)$在任何使得分母$x\sin(x^2+y^2)$非零的点$(x,y)$都是连续的.在这些点处,函数的重极限均存在且等于函数值.

**例 10.2.7** 试计算极限$\lim\limits_{x\to 1, y\to 0} \boldsymbol{f}(x,y)$,其中$\boldsymbol{f}(x,y)$定义为:

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\sin[(y+1)\sqrt{(x-1)^2+y^2}]}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}\right).$$

**解** 首先,用类似于例10.2.6的方法易知,第一个分量函数的分子、分母在点$(1,0)$处是连续的,而且分母在该点处的值非零.因此,

$$\lim_{x\to 1, y\to 0}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to 1, y\to 0}\ln(x+e^y)}{\lim\limits_{x\to 1, y\to 0}\sqrt{x^2+y^2}}$$