矩阵理论基础

姜家辉 编著

大连理工大学出版社

矩阵理论基础

姜家辉　编著

大连理工大学出版社

矩阵理论基础

Juzhen Lilun Jichu

姜家辉 编著

* * *

大连理工大学出版社出版发行

（邮政编码：116024）

大连理工大学印刷厂印刷

* * *

开本：850×1168 1/32 印张：$9\frac{1}{4}$ 字数：240千字

1995年6月第1版 1997年10月第2次印刷

印数：1501—2500册

* * *

责任编辑：王君仁 责任校对：寸土

封面设计：孙宝福

* * *

ISBN 7-5611-0853-2 定价：10.00元

O·131

序

本书作者近年来在研习矩阵理论领域中几位中外名家的教材、专著的基础上，结合作者本人在为工科研究生担任矩阵分析主讲时的教学工作经验和参加为计算数学专业的研究生、高年级大学生举办的数值代数讨论班活动时开展的科研工作，编写了本书。

由于前述的那些有益的活动，使得本书的成书过程，在一开始时就具有较宽阔的视野。什么是近代矩阵理论中最基本的内容，大学生和研究生在毕业以后，当从事某些应用课题的研究与开发时应当具有什么样的基础，矩阵结构本身的内在的美和应用学科期待于矩阵分析所应回答的问题各是什么以及在现有的学习条件和学习环境下应当如何处理，本书在内容取材和章节结构上做了综合的可望获得成功的回答。

学习矩阵分析，亦如学习其他学科一样，不宜以获取知识为唯一目的，对于某些良好的思维习惯的形成，本书作者亦均给予了充分的关注和导引。例如，重要的定义概念的形成与提出，必然应在某种唯一性或不变性分析之后，重要的矩阵分类务必应以不脱离一般等价类分析为前提，证题方法务必不宜强调其构思之奇巧，而应取其思维推理之必然，本书中许多证题方法的选取或改进，亦都遵循此一原则，但有的需要对之进行反复的体味求索方能得其隽永。

本书的习题，有的是其它教材中的定理或推理，目的在于帮助读者回顾和运用本书中阐述过的基本概念和方法，它们也是组成本书基本内容的材料，这种安排在一定程度上节省了篇幅。它

们一般具有中等难度，在熟悉本书的基本内容之后，它们的获解应当是水到渠成的。

熊西文　谨识

1994 年 7 月

前　言

矩阵理论作为现代数学和其他应用技术学科的描述、分析工具，往往不仅能使所描述的问题具有极简洁的形式，而且也是使所描述的问题得以深入系统研究的手段。Richard Bellman 在他的《矩阵分析导论》一书中多方面地、令人信服地论述了这个主题。他说"矩阵理论是高等数学中的算术"，恰如是说矩阵理论对于现代数学和应用学科好比庖丁的犀利的解牛之刀。

为了能给理工科大学的研究生和应用数学、计算数学专业高年级的大学生以及广大的工程技术工作者提供一个深入研究诸如量子力学、统计力学、工程结构分析和系统控制理论等应用学科所需的较为宽广、坚实的矩阵理论基础，根据作者的经验和体会，编写了本书。

本书共有四章，内容包含了矩阵理论研究和实际计算的基础知识。其中，第一章是矩阵基础知识，主要介绍了矩阵 Kronecker 积、逆、特殊矩阵、矩阵等价类、线性空间和矩阵特征值等基本运算和概念。这一章内容的熟练掌握和深刻理解，对后面的学习有着很大的影响。第二章矩阵分解，以实际计算中常用的和揭示矩阵性质的矩阵分解为线索，讲述了矩阵的 LU 分解、QU 分解、Jordan 分解和 SVD(奇异值分解)等分解形式。这是矩阵理论研究和实际计算中不可缺少的工具和手段。在给出矩阵分解的理论后，作为应用，我们对某些重要矩阵类的性质给出了描述。第三章矩阵的度量及其应用，给出了定量刻划矩阵的度量工具——范数的定义及其性质的讨论。其中包括了一般性的矩阵范数定义以及应用广泛的特殊矩阵范数——相容矩阵范数和算子矩阵范数的

定义。利用矩阵范数，对矩阵特征值、广义逆及最小二乘问题进行了简要的扰动分析。第四章矩阵分析，主要讲述了矩阵序列和级数、矩阵函数以及函数矩阵微积分等知识。并由此给出了正矩阵(非负不可约阵)的性质和线性方程组迭代解法等分析。这一章既是矩阵理论研究和计算的必需内容，又广泛地应用于控制论等应用学科之中。

最后本书列出了一些主要参考文献。它们可以帮助读者深入理解及进一步探讨，也是本书取材的重要依据。

本书体系完备，力求在不失数学严谨性的同时深入浅出。因此本书不仅能做为一本实用的教科书，而且也是工程界有实际价值的参考书。

本书是在熊西文、施吉林两位教授的精心指导下完成的，他们对本书进行了审阅，并承熊西文教授在百忙之中为本书作序。高望东、廉庆荣两位副教授为本书提出了许多建设性的意见。同时作者还要向张海涛、谷强、陈秋勇和王晨等研究生表示谢意，他们在本书的学习过程中提供了不少宝贵意见。

感谢大连理工大学研究生院刘元芳副院长、迟来萍老师和应用数学系等领导对本书出版予以的关怀和支持。

限于作者的水平，书中难免会有错误和不妥之处，敬希读者批评指正。

编　者

1994年7月

目　录

第一章　矩阵基础知识

本章主要介绍矩阵及其有关运算的基本概念和定义，是有关线性代数知识的简要复习和提高。

§1　矩阵及其基本运算

称元素为 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$、写成如下形式的 $m\times n$ 维有序数组

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

为 $\boldsymbol{m\times n}$ **阶矩阵**。简记为 $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ 或 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$. 其中 $a_{ij}(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$表示矩阵 A 的第 i 行、第 j 列交点位置上的元素，它取自数域 F(本书中，F 或是实数域 R 或是复数域 C).

元素取自数域 F 的所有 $m\times n$ 阶矩阵组成的集合通常记为 $F^{m\times n}$.

如果矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$的行数与列数相等，即 $m=n$，则称 A 为 $\boldsymbol{n}$ **阶方阵**。此时，称元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}为方阵 A 的**主对角线**，而称元素 a_{n1}，$a_{n-1\,2}$，…，a_{1n}为它的**次对角线**。有时我们将主对角线就简称为**对角线**，a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}称为**对角元**。

称主对角线以外的元素均为零的 n 阶方阵为**对角阵**。用 diag$[a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}]$表示，即

$$\mathrm{diag}[a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}] \triangleq \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

若对角阵 $\mathrm{diag}[a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}]$的对角元均相等，即 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，则称之为**度量阵**；进一步，若 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$，则称该度量阵为**单位阵**，记为 $\boldsymbol{I}_n$，或简记为 $\boldsymbol{I}$.

矩阵就是向量的推广。因此，下面的几种矩阵基本运算也就是向量基本运算的推广。

1. **矩阵加法**：$A+B\triangleq[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$，其中 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$.

矩阵减法做为矩阵加法的逆运算，由加法定义易得 $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$.

2. **数乘**：$\alpha A\triangleq[\alpha a_{ij}]_{m\times n}$，其中 α 是数，$A=[a_{ij}]_{m\times n}$.

显然，$(-1)A=[-a_{ij}]_{m\times n}$. 由此，通常将$(-1)A$ 记为$-A$.

3. **矩阵乘法**：$AB\triangleq\left[\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times n}$，其中 $A=[a_{ij}]_{m\times p}$，$B=[b_{ij}]_{p\times n}$.

当 A 为 n 阶方阵时，定义 A 的 k 次幂为：$A^k\triangleq\underbrace{AA\cdots A}_{k个}$，其中 k 为某个正整数；定义 $A^0\triangleq I_n$.

4. **矩阵转置**：$A^T\triangleq[a_{ji}]_{n\times m}$，其中 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$.

5. **矩阵共轭**：$\overline{A}\triangleq[\overline{a}_{ij}]_{m\times n}$，其中 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\overline{a}_{ij}$表示 a_{ij}的共轭复数。

6. **矩阵共轭转置**：$A^H\triangleq(\overline{A})^T$.

显然，共轭、转置运算是次序可换的，即$(\overline{A})^T=\overline{A^T}$.

7. 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，划去矩阵 A 的一些行和一些列，称剩下的元素构成的矩阵 $\begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_q} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \cdots & a_{i_pj_q} \end{bmatrix}$ 为**矩阵 A 的子矩阵**。其

中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant m$；$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_q\leqslant n$.

如果上述子矩阵的行、列数相同，且 $i_k=j_k(k=1,2,\cdots,p)$，则称该子矩阵为**矩阵 A 的主子矩阵**；进一步，若 $i_k=j_k=k(k=1,2,\cdots,p)$，则称之为**矩阵 A 的顺序主子矩阵**。

8. 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，若 $m_i(i=1,2,\cdots,p)$和 $n_j(j=1,2,\cdots,q)$都是正整数，且 $\sum\limits_{i=1}^{p}m_i=m$，$\sum\limits_{j=1}^{q}n_j=n$，则按如下方式将 A 分成 $p\times q$ 个子矩阵

$$A=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \underbrace{a_{m1}} & \underbrace{\cdots} & \cdots & \underbrace{a_{mn}} \end{bmatrix} & \begin{array}{l}\}\, m_1\text{ 行} \\ \}\, m_2\text{ 行} \\ \vdots \quad \vdots \\ \}\, m_p\text{ 行}\end{array} \\ \quad n_1\text{ 列} \quad n_2\text{ 列} \quad \cdots \quad n_q\text{ 列} & \end{array}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}$$

此时称矩阵 A 为 $p\times q$ **分块矩阵**。简记为 $A=[A_{ij}]_{p\times q}$. 其中 A_{ij}表示分块矩阵中第 i 行、第 j 列交点位置上的块(子)矩阵。

矩阵的许多定义和运算都可以推广到分块矩阵上，如对角块阵定义、块阵的加法、乘法等，这里不再一一叙述了。

下面我们引入矩阵的另一重要运算——Kronecker 积。

定义 1.1 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$B\in F^{p\times q}$，定义

$$A\otimes B\triangleq\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

称为矩阵 A 与矩阵 B 的 **Kronecker 积**。

显然，$A\otimes B\in F^{mp\times nq}$.

易于验证矩阵的 Kronecker 积满足下述性质：

定理 1.1 设下面所用矩阵均满足所需的矩阵运算。则

(1) $\mu\cdot(A\otimes B)=(\mu A)\otimes B=A\otimes(\mu B)\qquad\forall\ \mu\in F$；

(2) $(A+B)\otimes C=(A\otimes C)+(B\otimes C)$；

(3) $A\otimes(B+C)=(A\otimes B)+(A\otimes C)$；

(4) $A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$；

(5) $(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$，$(A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H$.

一条更为重要、常用的性质是：

定理 1.2 设 $A\in F^{m\times l}$，$B\in F^{n\times q}$，$C\in F^{l\times p}$，$D\in F^{q\times k}$，则

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD) \tag{1.2}$$

证明 记 $A=[a_{ij}]_{m\times l}$，$C=[c_{ij}]_{l\times p}$，则

$$(A\otimes B)=[a_{ij}B]_{m\times l},\ (C\otimes D)=[c_{ij}D]_{l\times p}.$$

于是$(A\otimes B)(C\otimes D)$的第(i,j)块是

$$F_{ij}=\sum_{s=1}^{l}(a_{is}B)(c_{sj}D)=\sum_{s=1}^{l}(a_{is}c_{sj})(BD) \tag{1.3}$$

从(1.3)即得：

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=\begin{bmatrix} r_{11}(BD) & r_{12}(BD) & \cdots & r_{1p}(BD) \\ r_{21}(BD) & r_{22}(BD) & \cdots & r_{2p}(BD) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1}(BD) & r_{m2}(BD) & \cdots & r_{mp}(BD) \end{bmatrix}$$

其中 $r_{ij}=\sum_{s=1}^{l}a_{is}c_{sj}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,p)$.

利用矩阵 Kronecker 积和乘法定义：

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mp} \end{bmatrix}\otimes(BD)$$

$$=\left[\sum_{s=1}^{l}a_{is}c_{sj}\right]_{m\times p}\otimes(BD)=(AC)\otimes(BD)$$

证毕。

最后，我们研究 Kronecker 积对线性矩阵方程的应用。

设 $A_i\in F^{m\times p}$，$B_i\in F^{q\times n}(i=1,2,\cdots,k)$，$C\in F^{m\times n}$，称下面关于未知矩阵 $X\in F^{p\times q}$的线性方程

$$A_1XB_1+A_2XB_2+\cdots+A_kXB_k=C \tag{1.4}$$

为线性矩阵方程。

设 $A \in F^{m\times n}$，写成列向量形式即为 $A=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$，这里 a_j 是 A 的第 j 列，$a_j \in F^m (j=1,2,\cdots,n)$. 记

$$\mathrm{vec}A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

显然 $\mathrm{vec}A \in F^{mn}$.

注意到 $\mathrm{vec}A$ 对 A 是线性的，并且若 $B \in F^{n\times l}$，$C \in F^{l\times q}$ 我们还有

$$\mathrm{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\ \mathrm{vec}B \tag{1.6}$$

(习题 10). 于是矩阵方程(1.4)等价地化为

$$Gx = c \tag{1.7}$$

其中 $G=\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i$，$x=\mathrm{vec}X$，$c=\mathrm{vec}C$.

(1.7)是一个一般的线性方程组，利用它我们便可以得到关于线性矩阵方程的许多结论，如可解性、唯一解存在条件等等。

习　　题

1. 设 $A=[a_1, a_2, \cdots, a_p] \in F^{m\times p}$，$B=[b_1, b_2, \cdots, b_p]^T \in F^{p\times n}$，证明 $AB=\sum_{k=1}^{p} a_k b_k^T$.

2. 证明　矩阵乘法满足结合律；举例说明通常它不满足交换律。

3. 设 $A \in F^{n\times n}$. 若对任意 $X \in F^{n\times n}$ 均有 $AX=XA$，则 A 一定是度量阵。

4. 举例说明两个矩阵之积为**零矩阵** O(即所有元素均为零)，但它们均可为非零阵。进而给出 $AB=AC$ 但 $B\neq C$ 的例子。

5. 证明　$(AB)^H=B^H A^H$，其中 $A \in F^{m\times p}$，$B \in F^{p\times n}$.

6. 设 $A=[A_{ij}]_{p\times l}$，$A_{ij}\in F^{m_i\times l_j}$；$B=[B_{ij}]_{l\times q}$，$B_{ij}\in F^{l_i\times n_j}$. 证明 $AB=[\sum_{k=1}^{l}A_{ik}B_{kj}]_{p\times q}$.

7. 称 n 阶方阵 A 的对角元之和为它的迹，记为 $\mathrm{tr}A$. 证明 (1) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$，其中 $A\in F^{m\times n}$，$B\in F^{n\times m}$；(2) $\mathrm{tr}(A\otimes B)=\mathrm{tr}A\cdot\mathrm{tr}B$，其中 $A\in F^{n\times n}$，$B\in F^{m\times m}$.

8. 证明　不存在满足 $AB-BA=I_n$ 的 n 阶方阵 A、B.

9. 设 A、$B\in F^{n\times n}$，证明　$A^k-B^k=\sum_{i=0}^{k-1}B^i(A-B)A^{k-1-i}$，$k=1,2,\cdots$.

10. 证明　等式(1.6).

11. 通常的矩阵乘积也称为 **Cayley** 积，另两种在实际中应用的矩阵乘积分别是 **Jordan** 积和 **Lie** 积，它们的定义分别是：

$$A*B=\frac{(AB+BA)}{2}\qquad\text{(Jordan 积)}$$

$$A\times B=AB-BA\qquad\text{(Lie 积)}$$

证明 (1) $A*B=B*A$；$A*(B*A^2)=(A*B)*A^2$，其中 $A^2=A*A=AA$；

(2) $A\times B=-(B\times A)$；$A\times(B\times C)+B\times(C\times A)+C\times(A\times B)=O$

§2　行列式、逆和秩

在本节，我们复习并推广有关矩阵行列式、逆和秩的一些概念和重要结论。

设$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列。若 $k<l$，但 $j_k>j_l$，则称之是排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$的一个**反演**。用 $t(j)$表示排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$中出现的反演个数。

于是，n 阶方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$的**行列式**定义为

$$\det A \triangleq \sum_{j} (-1)^{\tau(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{2.1}$$

其中 $\sum\limits_{j}$ 表示对所有的 $n!$ 个 $1,2,\cdots,n$ 的排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 求和。行列式 $\det A$ 也记为 $|A|$.

如果一个方阵的行列式等于零，则称该方阵**奇异**，否则称为**非奇异**。

设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，称它的 p 阶子方阵的行列式为 **p 阶子式**，即

$$A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_p \\ j_1,j_2,\cdots,j_p \end{pmatrix} \triangleq \det\begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_p} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \cdots & a_{i_pj_p} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

其中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant m$; $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_p\leqslant n$. 若该 p 阶子方阵是 A 的主子矩阵，则相应的子式称为**主子式**；进一步，若该主子矩阵是顺序主子矩阵，则该子式就称为**顺序主子式**。

若矩阵 A 是一个方阵，即 $m=n$，那么划去上述 p 阶子式所在的行、列得到了一个 $n-p$ 阶子矩阵，称该 $n-p$ 阶子矩阵的行列式为原子式 $A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_p \\ j_1,j_2,\cdots,j_p \end{pmatrix}$ 的**余子式**，记为 $A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_p \\ j_1,j_2,\cdots,j_p \end{pmatrix}^c$.

而子式 $A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_p \\ j_1,j_2,\cdots,j_p \end{pmatrix}$ 的**代数余子式**定义为

$$A^c\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_p \\ j_1,j_2,\cdots,j_p \end{pmatrix} \triangleq (-1)^s \cdot A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_p \\ j_1,j_2,\cdots,j_p \end{pmatrix}^c \tag{2.3}$$

其中 $s=\sum\limits_{k=1}^{p} i_k+\sum\limits_{k=1}^{p} j_k$.

利用子式，便可将高阶行列式进行降阶计算。方法之一是 Chio 主元压缩法。

定理 2.1 (Chio 定理) 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 且 $a_{11}\neq 0$，则

$$\det A = \left(\frac{1}{a_{11}^{n-2}}\right)\cdot \det\widetilde{A} \tag{2.4}$$

其中 $\widetilde{A}=\left[A\begin{pmatrix} 1,i \\ 1,j \end{pmatrix}\right]_{i,j=2}^{n,n}$.

证明 根据行列式基本性质有

$$a_{11}^{n-1}\cdot\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & \cdots & a_{11}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11}a_{n1} & a_{11}a_{n2} & \cdots & a_{11}a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\cdot\det\widetilde{A}$$

其中 $\widetilde{A}=\left[A\begin{pmatrix}1,i\\1,j\end{pmatrix}\right]_{i,j=2}^{n,n}$.

因 $a_{11}\neq 0$，即得定理结论。

证毕。

利用 Chio 定理，可得：

定理 2.2 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，且 $n\geqslant 3$，则

$$A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n-2\\1,2,\cdots,n-2\end{pmatrix}\cdot\det A$$

$$=\begin{vmatrix} A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n-2,n-1\\1,2,\cdots,n-2,n-1\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n-2,n-1\\1,2,\cdots,n-2,n\end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n-2,n\\1,2,\cdots,n-2,n-1\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n-2,n\\1,2,\cdots,n-2,n\end{pmatrix} \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

证明 设 $A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,k\\1,2,\cdots,k\end{pmatrix}\neq 0$，$k=1,2,\cdots,n-2$.

利用数学归纳法来证明(2.5)成立。

当 $n=3$ 时，(2.5)由 Chio 定理即得。

假设 $n\leqslant m-1$ 时均有(2.5)成立。于是当 $n=m$ 时有

$$\det A=\left(\frac{1}{a_{11}^{m-2}}\right)\cdot\det\left[A\begin{pmatrix}1,i\\1,j\end{pmatrix}\right]_{i,j=2}^{m,m}$$